اصول صف و شبیه‌سازی

دکتر مصطفی زندیه

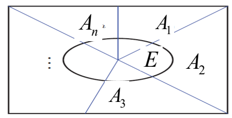
فصل دوم: مروری بر مباحث مهم در احتمالات(بخش اول)

دکتر مصطفی زندیه

قضیه احتمالات کل

- **کاربرد احتمال شرطی در محاسبه احتمال یک پیشامد (قضیه احتمالات کل[1]):**

فرض کنید فضای نمونه‌ای S به n پیشامد (شناخته‌شده) A_1، A_2 , … , A_n افراز شده باشد. اگر E یک پیشامدِ دلخواه (ناشناخته) از فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه:



$$P(E)=\sum_{i=1}^{n} P(E|A_i)\times P(A_i)$$

تذکر: اگر فضای نمونه‌ای S بر حسب مقادیر یک متغیر تصادفی Y افراز شود، آنگاه:

متغیر تصادفی Y گسسته:

$$P(E)=\sum_{\forall y} P(E|Y=y)\times P(Y=y)$$

متغیر تصادفی Y پیوسته:

$$P(E)=\int_{\forall y} P(E|Y=y)\times f_Y(y)\, dy$$

1-Law of total probability/Total probability theorem

قضیه احتمالات کل

مثال ۱: تیراندازهای A_1 و A_2 در هر بار تیراندازی مستقلا با احتمال $\frac{1}{4}$ به هدف می‌زنند. اگر تیراندازی با A_1 شروع شود، مطلوبست احتمال اینکه A_1 قبل از A_2 به هدف بزند؟

حل: روش اول

E : پیشامد اینکه شخص A_1 قبل از A_2 به هدف بزند.

A_1 : پیشامد اینکه A_1 در پرتاب اول تیرش به هدف بخورد.

A_2 : پیشامد اینکه A_2 در پرتاب اول تیرش به هدف بخورد.

A_3 : پیشامد اینکه هیچکدام از تیراندازهای A_1 و A_2 در پرتاب اول به هدف نزنند.

$$P(E)=P(E|A_1)\times P(A_1)+P(E|A_2)\times P(A_2)+P(E|A_3)\times P(A_3)$$

$$P(E)=1\times\frac{1}{4}+0\times P(A_2)+P(E)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)\Rightarrow P(E)=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{4}{7}$$

قضیه احتمالات کل

حل : روش دوم

E : پیشامد اینکه شخص A_1 قبل از A_2 به هدف بزند.

E_i : پیشامد اینکه در i اُمین تیراندازی، شخص A_1 قبل از A_2 به هدف بزند.

A_1 : پیشامد اینکه تیر A_1 در یک تیراندازی به هدف اصابت کند.

A_2 : پیشامد اینکه تیر A_2 در یک تیراندازی به هدف اصابت کند.

$$P(E) = P(E_1) + P(E_3) + P(E_5) + \dots$$
$$= P(A_1) + \left(P(A_1') \times P(A_2')\right) \times P(A_1) + \left(P(A_1') \times P(A_2')\right)^2 \times P(A_1) + \dots$$
$$P(E) = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{4}{7}$$

قضیه احتمالات کل

مثال۲: در یک فروشگاه لوازم خانگی ده تلویزیون وجود دارد که دوتای آنها معیوب است. یک مشتری ششمین تلویزیون را می‌خرد، چقدر احتمال دارد که این تلویزیون معیوب باشد؟

حل: روش اول

E: پیشامد اینکه ششمین تلویزیون معیوب باشد.

A_1: پیشامد اینکه ششمین تلویزیون، اولین تلویزیون معیوب به‌فروش رفته باشد.

A_2: پیشامد اینکه ششمین تلویزیون، دومین تلویزیون معیوب به‌فروش رفته باشد.

$$P(E) = P(E|A_1) \times P(A_1) + P(E|A_2) \times P(A_2) = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}} \times \frac{2}{5} + \frac{\binom{2}{1}\binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

قضیه احتمالات کل

حل: روش دوم

E: پیشامد اینکه ششمین تلویزیون معیوب باشد.

وقتی که از وضعیتِ معیوب یا سالم بودنِ پنج فروش اول اطلاع نداریم، مشابه این است که اولین تلویزیون از ده تلویزیون را می‌خریم، لذا احتمال معیوب بودن برابر است با:

$$P(E)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

قضیه احتمالات کل

مثال۳: فرض کنید احتمال مراجعه k مشتری به یک فروشگاه π_k باشد، احتمال اینکه در دو روز جمعاً ۱۵ مشتری به فروشگاه مراجعه کند، چقدر است؟

حل:

X : تعداد مشتریان مراجعه‌کننده در دو روز.

Y : تعداد مشتریان مراجعه‌کننده در روز اول.

$$P(X=15)=\sum_{y=0}^{15}P(X=15\mid Y=y)\times P(Y=y)$$
$$=\pi_{15}\,\pi_0+\pi_{14}\,\pi_1+\ldots+\pi_0\,\pi_{15}$$

قضیه احتمالات کل

مثال٤: فرض کنید زمان خدمت‌دهی در دو باجه مختلف یک بانک به طور مستقل دارای توزیع نمایی با توابع چگالی زیر باشند، مطلوبست احتمال اینکه: $P(X_1 < X_2)$

$$X_1 \sim exp(\mu_1) \;\; ; \;\; f_{X_1}(x_1) = \mu_1 e^{-\mu_1 x_1} \;\; , \; x_1 \geq 0 \;\; , \;\; \mu_1 > 0$$
$$X_2 \sim exp(\mu_2) \;\; ; \;\; f_{X_2}(x_2) = \mu_2 e^{-\mu_2 x_2} \;\; , \; x_2 \geq 0 \;\; , \;\; \mu_2 > 0$$

حل: برای حل این مساله باید از برخی خصوصیات توزیع نمایی به‌شرح ذیل استفاده نمود:

$$X \sim exp(\mu); \;\; f_X(x) = \mu e^{-\mu x}, \; x \geq 0, \; \mu > 0 \;\Rightarrow\; F_X(a) = P(X \leq a) = \int_0^a \mu e^{-\mu x} dx = 1 - e^{-\mu a} \;,\; x \geq 0$$

$$P(X_1 < X_2) = \int_{\forall x_2} P(X_1 < X_2 \,|\, X_2 = x_2) \; f_{X_2}(x_2) \; dx_2 = \int_{\forall x_2} (1 - e^{-\mu_1 x_2}) \; \mu_2 \, e^{-\mu_2 x_2} \; dx_2$$
$$= \int_{\forall x_2} \mu_2 \, e^{-\mu_2 x_2} \; dx_2 \; - \; \frac{\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)} \int_{\forall x_2} (\mu_1 + \mu_2) e^{-(\mu_1 + \mu_2) x_2} \; dx_2$$
$$= 1 - \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$$

قضیه احتمالات کل

نتیجه: بر اساس مثال قبل می‌توان نوشت:

$$P(X_2 < X_1) = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

روش دوم: به شیوه‌ای دیگر نیز می‌توان نتیجه فوق را بدست آورد:

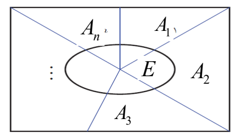
$$P(X_1 < X_2) + P(X_2 < X_1) + P(X_2 = X_1) = 1$$
$$\Rightarrow \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} + P(X_2 < X_1) + 0 = 1$$
$$\Rightarrow P(X_2 < X_1) = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

قضیه بیز

- **قضیه بیز:**

فرض کنید فضای نمونه‌ای S به n پیشامد (شناخته‌شده) A_1، A_2 , ... , A_n افراز شده باشد.
اگر E یک پیشامدِ دلخواه (ناشناخته) از فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه:

$$P(A_k|E)=\frac{P(E\cap A_k)}{P(E)}=\frac{P(E|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(E|A_i)P(A_i)}$$



تذکر: قضیه بیز بیانگر این مطلب است، اگر پیشامدی مانند E که معلولِ علت‌های A_1، A_2 , ... , A_n است، رخ داده باشد، آنگاه سهم k اُمین علت (A_k) در وقوع E چقدر است.

1-Bayes' theorem

قضیه بیز

مثال ۵: محصولات یک کارخانه از طریق دو کارگاه تولید می‌شوند. میزان تولید کارگاه اول سه برابر میزان تولید کارگاه دوم است. براساس تجربیات گذشته ۱۰ درصد محصولات کارگاه اول و ۶۰ درصد محصولات کارگاه دوم منطبق بر استاندارد نیستند. یک محصول از محصولات این کارخانه بازرسی شده است؛ به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) احتمال اینکه این محصول منطبق بر استاندارد نباشد، چقدر است؟

حل:

E: پیشامد اینکه محصول بازرسی شده منطبق بر استاندارد نیست.

A_i: پیشامد اینکه محصول بازرسی شده از تولیدات کارگاه i باشد (i= ۱,۲)

$$P(E)=P(E|A_1)\times P(A_1)+P(E|A_2)\times P(A_2)=0.10\times\frac{3}{4}+0.60\times\frac{1}{4}=0.225$$

نتیجه: قضیه احتمالات کل بیانگر میانگین وزنیِ مقادیر احتمالِ یک پیشامد شرطی است.

قضیه بیز

ب) اگر بدانیم که این محصول منطبق بر استاندارد نیست، چقدر احتمال دارد که این محصول از تولیدات کارگاه دوم باشد؟

حل:

E: پیشامد اینکه محصول بازرسی شده منطبق بر استاندارد نیست.

A_i: پیشامد اینکه محصول بازرسی شده از تولیدات کارگاه i باشد (i= ۱,۲)

$$P(A_2|E)=\frac{P(A_2|E)\times P(A_2)}{P(E)}=\frac{0.6\times\frac{1}{4}}{0.225}=\frac{2}{3}>\frac{1}{4}$$

نتیجه: گاهاً به $P(A_k)$، احتمالِ پیشین[1] و به $P(A_k|E)$ احتمالِ پسین[2] می‌گویند. به‌عبارتی اطلاع از رخدادِ پیشامد E، می‌تواند احتمال وقوع پیشامد A_k را تحت تاثیر قرار دهد.

1-Prior probability 2- Posterior probability

قضیه بیز

مثال٦: تجربه نشان داده که ۸۰ درصد از تیرهای شکارچی اول و ۴۰ درصد از تیرهای شکارچی دوم به هدف می‌خورند. این دوشکارچی درحال شکار بودند که ناگهان خرگوشی را دیدند و هردو بطور همزمان به طرف آن شلیک نمودند. خرگوش کشته شد ولی فقط یک سوراخ روی پوست خرگوش بود. اگر ارزش پوست خرگوش ۲۱۰۰۰ تومان باشد، این پول چگونه بین دو شکارچی تقسیم شود تا عادلانه تصمیم‌گیری شده باشد؟

حل:

E : پیشامد اینکه فقط یک تیر به هدف اصابت کرده است.

A_i : پیشامد اینکه تیر شکارچی i اُم به هدف اصابت کرده است (i= ۱,۲)

$$P(A_1|E)=\frac{P(E|A_1)\times P(A_1)}{P(E|A_1)\times P(A_1)+P(E|A_2)\times P(A_2)}$$

$$=\frac{P(A_2')\times P(A_1)}{P(A_2')\times P(A_1)+P(A_1')\times P(A_2)}=\frac{0.6\times 0.8}{0.6\times 0.8+0.2\times 0.4}=\frac{0.48}{0.56}=\frac{6}{7}$$

$$P(A_2|E)=1-P(A_1|E)=1-\frac{6}{7}=\frac{1}{7}$$

سهم شکارچی اول : $\frac{6}{7}\times 21000=18000$	سهم شکارچی دوم : $\frac{1}{7}\times 21000=3000$

قضیه بیز

مثال۷: در مثال ۶، اگر بدانیم روی پوست خرگوش دو سوراخ است، چگونه پول را بین دو شکارچی تقسیم نماییم تا تصمیم عادلانه‌ای گرفته شود؟

حل:

E : پیشامد اینکه هر دو تیر به هدف اصابت کرده است.

A_i : پیشامد اینکه تیر شکارچی i اُم به هدف اصابت کرده است (i= ۱,۲)

$$P(A_1|E)=\frac{P(E|A_1)\times P(A_1)}{P(E|A_1)\times P(A_1)+P(E|A_2)\times P(A_2)}$$
$$=\frac{P(A_2)\times P(A_1)}{P(A_2)\times P(A_1)+P(A_1)\times P(A_2)}=\frac{0.4\times 0.8}{0.4\times 0.8+0.8\times 0.4}=\frac{1}{2}$$
$$P(A_2|E)=1-P(A_1|E)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

سهم شکارچی اول : $\frac{1}{2}\times 21000=10500$

سهم شکارچی دوم : $\frac{1}{2}\times 21000=10500$

قضیه بیز

مثال۸: در مثال ۶، اگر فقط بدانیم خرگوش کشته شده است و از تعداد سوراخ‌های روی پوست خرگوش بی‌اطلاع باشیم، چگونه پول را بین دو شکارچی تقسیم نماییم تا تصمیم عادلانه‌ای گرفته شود؟

حل:

E : پیشامد اینکه خرگوش کشته شده است.

A_i : پیشامد اینکه تیر شکارچی i اُم به هدف اصابت کرده است (i= ۱,۲)

$$P(A_1|E)=\frac{P(E|A_1)\times P(A_1)}{P(E|A_1)\times P(A_1)+P(E|A_2)\times P(A_2)}$$
$$=\frac{1\times P(A_1)}{1\times P(A_1)+1\times P(A_2)}=\frac{0.8}{0.8+0.4}=\frac{2}{3}$$
$$P(A_2|E)=1-P(A_1|E)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

سهم شکارچی اول : $\frac{2}{3}\times 21000=14000$

سهم شکارچی دوم : $\frac{1}{3}\times 21000=7000$

کاربرد امید ریاضی شرطی در محاسبه امید ریاضی

- **کاربرد امید ریاضی شرطی در محاسبه امید ریاضی**

$$E(X)=E\left(E(X|Y)\right)$$

متغیر تصادفی Y گسسته:

$$E(X)=\sum_{\forall y} E(X\,|\,Y=y)P(Y=y)$$

متغیر تصادفی Y پیوسته:

$$E(X)=\int_{\forall y} E(X\,|\,Y=y)\,f_Y(y)\,dy$$

کاربرد امید ریاضی شرطی در محاسبه امید ریاضی

مثال۹: یک موش در تونلی به یک سه‌راهی می‌رسد. راه اول پس از ۳ ساعت به‌خارج از تونل می‌رسد، راه دوم پس از ۵ ساعت به‌جای اول می‌رسد و راه سوم نیز پس از ۷ ساعت به‌جای اول می‌رسد. با این فرض که موش هربار هرکدام از راه‌ها را به تصادف انتخاب نماید، زمان مورد انتظار برای خروج موش از تونل چقدر است؟

حل:

X : زمان مورد نیاز برای خروج موش از تونل

Y : شماره راه انتخاب شده

$$E(X)=\sum_{y=1}^{3} E(X\,|\,Y=y)\,P(Y=y)$$

$$=\frac{1}{3}\left[E(X\,|\,Y=1)+E(X\,|\,Y=2)+E(X\,|\,Y=3)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[3+(5+E(X))+(7+E(X))\right]$$

$$\Rightarrow\ E(X)=15$$

کاربرد امید ریاضی شرطی در محاسبه امید ریاضی

مثال۱۰: در جعبه‌ای سه سکه وجود دارد که احتمال شیر آمدن آنها به ترتیب ۰.۷ ، ۰.۵ و ۰.۳ است. یک سکه به تصادف از جعبه انتخاب کرده و سپس ده بار متوالی پرتاب می‌شود. اگر نتیجه هر پرتاب شیر باشد، یک تومان برنده و در غیراینصورت، یک تومان بازنده می‌شویم. درآمد مورد انتظار حاصل از این بازی چقدر است؟

حل:

X : درآمد حاصل از بازی.

Y : شماره سکه انتخاب شده.

$$E(X)=\sum_{y=1}^{3}E(X|Y=y)P(Y=y)$$

$$=\frac{1}{3}\left[E(X|Y=1)+E(X|Y=2)+E(X|Y=3)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[(10\times0.7-10\times0.3)+(10\times0.5-10\times0.5)+(10\times0.3-10\times0.7)\right]$$

$$\Rightarrow\ E(X)=0$$

کاربرد امید ریاضی شرطی در محاسبه امید ریاضی

مثال۱۱: خودروها برای تنظیم باد لاستیک، بالانس فرمان و تعویض روغن وارد یک تعمیرگاه می‌شوند. ۳۰ درصد خودروهای ورودی فقط برای تنظیم باد لاستیک، ۱۰ درصد فقط برای بالانس فرمان، ۴۰ درصد فقط برای تعویض روغن و بقیه برای تنظیم باد لاستیک و بالانس فرمان مراجعه می‌کنند. اگر مدت زمان تنظیم باد لاستیک، بالانس فرمان و تعویض روغن خودرو، متغیرهای تصادفی با توزیع نمایی و میانگین‌های به‌ترتیب ۱۰، ۲۰ و ۳۰ دقیقه باشند، میانگین مدت زمان خدمت‌دهی به هر خودرو چقدر است؟

حل:

X : مدت زمان خدمت‌دهی به هر خودرو (بر حسب دقیقه).

Y : نوع خدمت (چهار نوع: ۱- تنظیم باد لاستیک، ۲- بالانس فرمان، ۳- تعویض روغن و ۴- به طور همزمان تنظیم باد لاستیک و بالانس فرمان).

$$E(X)=\sum_{y=1}^{4}E(X|Y=y)P(Y=y)$$

$$=10\times0.30+20\times0.10+30\times0.40+(10+20)\times0.20$$

$$=3+2+12+6=23\qquad\Rightarrow\qquad E(X)=23$$

کاربرد امید ریاضی شرطی در محاسبه امید ریاضی

مثال۱۲: طول عمر قطعه‌ای دارای توزیع نمایی با تابع چگالی $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\ ;\ x\geq 0,\ \lambda>0$ است. این قطعه به‌یکی از این دو دلیل تعویض می‌شود: (۱) قطعه از کار بیفتد، (۲) به‌اندازه T واحد زمانی از طول عمرِ قطعه بگذرد. زمان مورد انتظار تا تعویض این قطعه چقدر است؟

حل:

X : طول عمر قطعه.

Y : مدت زمان لازم برای تعویض قطعه.

یادآوری: امید ریاضی و تابع توزیع تجمعی نمایی به شکل زیر است:

$$f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x\geq 0,\ \lambda>0\ \Rightarrow\ E(X)=\frac{1}{\lambda};\ \ F_X(a)=1-e^{-\lambda a},\ x\geq 0$$

یادآوری: فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء[1] به صورت زیر است:

$$\int u\ dv=uv-\int v\,du$$

1-Integrating by parts

کاربرد امید ریاضی شرطی در محاسبه امید ریاضی

$$\begin{aligned}
E(X)&=\int_0^{+\infty}E(X|Y=y)\,f_Y(y)\,dy=\int_0^{T}E(X|Y=y)\,f_Y(y)\,dy+\int_T^{+\infty}E(X|Y=y)\,f_Y(y)\,dy\\
&=\int_0^{T}y\,\lambda e^{-\lambda y}\,dy+\int_T^{+\infty}T\lambda e^{-\lambda y}\,dy\\
&=\left[(-y\,e^{-\lambda y}\,]_0^T-\int_0^T(-e^{-\lambda y})\,dy\right]+T\left[1-F_Y(T)\right]\\
&=\left[(-T\,e^{-\lambda T}+0)+(\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda y}\,\Big]_0^T\right]+T\left[1-\left(1-e^{-\lambda T}\right)\right]\\
&=\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda T}
\end{aligned}$$

توجه: به وضعیتِ حدی و تفسیرِ جواب بدست آمده فوق دقت کنید:

$$\lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda T}\right)=\frac{1}{\lambda}\quad\Rightarrow\ E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

مثال‌ها و تمرینات مرتبط

مثال‌ها و تمرینات مرتبط با موضوعات تدریس شده از مرجع چهارم

ردیف	موضوع	شماره مثال و شماره صفحه
۱	قضیه احتمال کل و قانون بیز	۷.۲، ۸.۲، ۹.۲، ۱۰.۲ و ۳۶.۲ – صفحات ۱۸ تا ۲۰ و ۴۱
۲	امید ریاضی با مشروط‌سازی	۱۷.۲، ۲۹.۲، ۳۷.۲، ۴۳.۲، ۴۸.۲، ۵۰.۲، ۵۳.۲، ۵۸.۲ – صفحات ۲۵، ۳۵، ۴۱، ۴۵، ۴۸، ۴۹، ۵۲ و ۵۷

ردیف	موضوع	شماره تمرینات
۱	قضیه احتمال کل و قانون بیز	۲، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۹، ۲۱ و ۲۸
۲	امید ریاضی با مشروط‌سازی	

دکتر مصطفی زندیه