



# اصول صف و شبیه‌سازی

دکتر مصطفی زندیه

## اصول صف و شبیه‌سازی

### منابع:

- ۱- نظریه صف- دکتر محمد مدرس و دکتر ابراهیم تیموری- انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران- چاپ هشتم ۱۳۹۶.
- ۲- سیستم‌های صف: فرایند پواسان و زنجیره‌های مارکوف (جلد اول)- دکتر سیدمحمدرضا ایروانی- انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران- چاپ پنجم ۱۳۹۸.
- ۳- سیستم‌های صف: مدل‌های صف (جلد دوم)- دکتر سیدمحمدرضا ایروانی و دکتر ابراهیم تیموری- انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران- چاپ دوم ۱۳۹۷.
- ۴- سیستم‌های صف- مصطفی زندیه و فرناز ترابی- انتشارات دانشگاه شهید بهشتی- چاپ اول ۱۳۹۹.

دکتر مصطفی زندیه

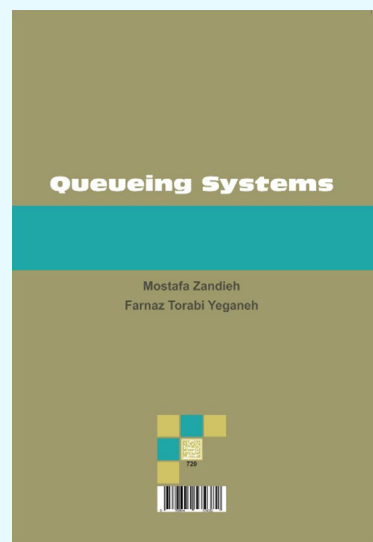
## اصول صف و شبیه‌سازی

### منابع:

- 5- [Fundamentals of queueing theory](#), Gross, D., Harris, C.M., Wiley, 2nd edition, 1998.
- 6- [Fundamentals of queueing theory](#), Shortle, J.F., Thompson, J.M., Gross, D., Harris, C.M., Wiley, 5th edition, 2017.
- 7- [Queueing systems: Problems and solutions](#), Kleinrock, L., Gail, R., Wiley, 1st edition, 1996.

دکتر مصطفی زندیه

## اصول صف و شبیه‌سازی



دکتر مصطفی زندیه

## اصول صف و شبیه‌سازی

### فهرست مطالب:

- فصل اول: معرفی سیستم‌های صف
- فصل دوم: مروری بر مباحث مهم در احتمالات  
قضیه احتمالات کل - قانون بیز - امید ریاضی شرطی - توزیع‌های مهم (نمایی، پواسن و اِرلانگ)
- فصل سوم: زنجیره‌های مارکوف
- فصل چهارم: زنجیره‌های مارکوف پیوسته
- فصل پنجم: کلیات صف
- فصل ششم: مدل‌های صف نمایی
- فصل هفتم: مدل‌های صف مارکوفی و غیرمارکوفی
- فصل هشتم: بهینه‌سازی در سیستم‌های صف

دکتر مصطفی زنده

## اصول صف و شبیه‌سازی

### ارزیابی دانشجویان:

- ۱- تمرین‌های کلاسی (۶ نمره)
- ۲- انتخاب یک مقاله معتبر انگلیسی با هماهنگی استاد و ارائه در کلاس (۴ نمره)  
(کاربردی از سیستم‌های صف در مدیریت صنعتی / مهندسی صنایع)
- ۳- امتحان پایان‌ترم (۱۰ نمره)

آدرس ایمیل: [m\\_zandieh@sbu.ac.ir](mailto:m_zandieh@sbu.ac.ir)

دکتر مصطفی زنده

## اصول صف و شبیه‌سازی

## فصل اول: معرفی سیستم‌های صف

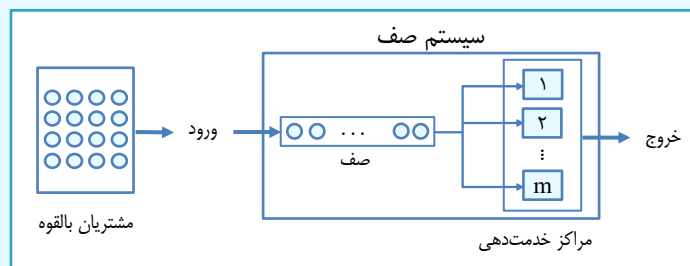


دکتر مصطفی زنده

## اجزای یک سیستم صف

■ اجزای یک سیستم صف<sup>۱</sup>:

۱- خدمت‌دهنده<sup>۲</sup>    ۲- مشتری<sup>۳</sup>    ۳- فضای انتظار<sup>۴</sup>    ۴- جمعیت مشتریان بالقوه<sup>۵</sup>



علامت صف: فزونی نرخ تقاضا نسبت به نرخ عرضه

مفهوم صف: \* الزاما به صورت صف فیزیکی نیست.

\* بلکه بیشتر به مفهوم انتظار برای دریافت خدمت است.

1-Queueing system    2- Server/Facility    3- Client/Customer/Entity    4- Queue/Waiting line    5- Calling population

8

دکتر مصطفی زنده

## معیارهای ارزیابی یک سیستم صف

### ■ معیارهای ارزیابی یک سیستم صف:

- ۱- میانگین تعداد مشتریان در صف<sup>۱</sup> (میانگین طول صف)
- ۲- میانگین تعداد مشتریان در سیستم<sup>۲</sup> (میانگین طول سیستم)  
(میانگین تعداد مشتریان در صف + میانگین تعداد مشتریان در مراکز خدمت‌دهی)
- ۳- میانگین مدت‌زمان انتظار مشتری در صف<sup>۳</sup>
- ۴- میانگین مدت‌زمان انتظار مشتری در سیستم<sup>۴</sup>  
(میانگین مدت‌زمان انتظار در صف + میانگین مدت‌زمان خدمت)
- ۵- میانگین درصد زمان اشتغال سیستم<sup>۵</sup>

\* چهار معیار اول از نظر مشتری و معیار آخر از نظر صاحب سیستم مهم است.

- 1- Expected number of customers in the queue ( $L_q$ )      2- Expected number of customers in the system ( $L$ )  
 3- Expected waiting time of a customer in the queue ( $W_q$ )      4- Expected waiting time of a customer in the system ( $W$ )  
 5- System utilization ( $\rho$ )

9

دکتر مصطفی زنده

## مشخصه‌های یک سیستم صف

### ■ مشخصه‌های یک سیستم صف<sup>۱</sup>:

کلیه پارامترهای تاثیرگذار بر معیارهای ارزیابی یک سیستم صف.

الف) الگوی/فرایند ورود مشتری<sup>۲</sup>

الف-۱) توزیع احتمال زمان بین ورود مشتریان (A)



$S_j$ : زمان ورود<sup>۳</sup> مشتری زام

$T_j$ : زمان بین ورود<sup>۴</sup> مشتری زام و (j-۱)ام

$$T_j = S_j - S_{j-1}; \quad T_1, T_2, \dots, T_n \sim A^{i.i.d}$$

- 1- Characteristics of queueing system      2- Arrival pattern/process      3- Arrival time      4- Interarrival time

10

دکتر مصطفی زنده

## مشخصه‌های یک سیستم صف

الف-۲) میانگین نرخ / آهنگ ورود<sup>۱</sup> ( $\lambda$ )

$\lambda$  : میانگین تعداد مشتریانی که در واحد زمان وارد سیستم می‌شوند.

$$\lambda = \frac{1}{E(T)}$$

$E(T)$  : میانگین زمان بین ورود دو مشتری متوالی<sup>۲</sup>.

مثال:  $E(T) = \frac{1}{4}$  نفر/ساعت  $\rightarrow$  ساعت/نفر  $\lambda = 4$

تذکره:  $\lambda \uparrow \rightarrow$  طول صف  $\uparrow \rightarrow$  زمان انتظار  $\uparrow$

الف-۳) ورود انفرادی در برابر ورود گروهی.

الف-۴) آهنگ ورود همگن در برابر غیرهمگن.

الف-۵) وابستگی آهنگ ورود به مشخصات صف (مثل طول صف).

1- Expected arrival rate 2- Expected time between arrivals

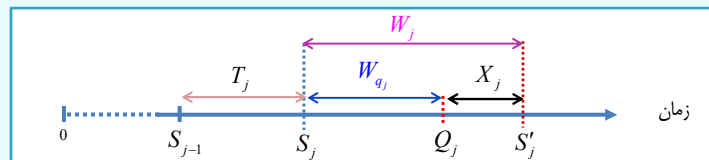
11

دکتر مصطفی زنده

## مشخصه‌های یک سیستم صف

ب) الگوی خدمت‌دهی<sup>۱</sup>

ب-۱) توزیع احتمال مدت‌زمان خدمت‌دهی (B)



$Q_j$  : زمان خروج از صف<sup>۲</sup> برای مشتری زام

$S'_j$  : زمان خروج از سیستم<sup>۳</sup> برای مشتری زام

$W_j, W_{q_j}$  : به ترتیب مدت‌زمان انتظار مشتری زام در صف و سیستم

$X_j$  : مدت‌زمان خدمت‌دهی به مشتری زام

$$X_j = S'_j - Q_j ; \quad X_1, X_2, \dots, X_n \sim B^{i.i.d}$$

1- Service pattern

12

دکتر مصطفی زنده

## مشخصه‌های یک سیستم صف

ب-۲) میانگین نرخ/آهنگ خدمت‌دهی<sup>۱</sup>

$\mu$  : میانگین تعداد مشتریانی که در واحد زمان خدمت دریافت می‌کنند.

$$\mu = \frac{1}{E(X)}$$

$E(X)$ : میانگین زمان خدمت‌دهی به هر مشتری<sup>۲</sup>.

مثال:  $E(X) = \frac{1}{2}$  نفر/ساعت  $\rightarrow$  ساعت/نفر  $\mu = 2$

تذکر:  $\downarrow$  زمان انتظار  $\rightarrow \downarrow$  طول صف  $\rightarrow \uparrow \mu$

تمرین: نشان دهید که آهنگ خدمت‌دهی با آهنگ خروج مشتری الزاماً یکی نیست. در چه شرایطی این دو یکی می‌شوند؟ (با مثال نشان دهید).

1- Expected service rate per server    2- Expected service time per customer

13

دکتر مصطفی زنده

## مشخصه‌های یک سیستم صف

ب-۳) وابستگی توزیع زمان خدمت‌دهی به طول صف.

اگر صف طولانی‌تر شود، آهنگ خدمت‌دهی افزایش یابد.

ب-۴) وابستگی توزیع زمان خدمت‌دهی به زمان.

معمولاً در ابتدای روز، سرعت خدمت‌دهی بیشتر است.

ب-۵) همزمانی خدمت به چند مشتری.

در برخی سیستم‌ها صبر می‌کنیم تا تعداد مشتریان به یک حدنصابی برسد و سپس خدمت‌دهی انجام می‌شود (تاکسی).

14

دکتر مصطفی زنده

## مشخصه‌های یک سیستم صف

### ج) تعداد کانال‌های خدمت‌دهی (m)

ممکن است تعداد کانال‌های خدمت بی‌نهایت باشد.

### د) ظرفیت (K)

حداکثر تعداد مشتریانی که در سیستم صف قرار می‌گیرند.

دلایل محدود بودن ظرفیت صف: \* محدود بودن منابع.

\* افزایش/حفظ کیفیت خدمت‌دهی

### هـ) جمعیت مشتریان بالقوه (C)

مثال: در سیستم نگهداری و تعمیرات (نت)، اندازه جمعیت مشتریان بالقوه کوچک است

(سرویس‌دهی به تعداد محدودی از ماشین‌ها).

مثال: در سیستم مخابراتی تهران بزرگ، اندازه جمعیت مشتریان بالقوه بزرگ است.

1- Preemption

15

دکتر مصطفی زنده

## مشخصه‌های یک سیستم صف

### و) نظم سیستم (z)

برخی از مرسومترین نظامهای خدمت‌دهی به مشتریان حاضر در صف

و-۱- خدمت‌دهی براساس (First-In-First-Out) FIFO

و-۲- خدمت‌دهی براساس (Last-In-First-Out) LIFO

و-۳- خدمت‌دهی براساس (Shortest Processing Time) SPT

و-۴- خدمت‌دهی براساس (Shortest Remaining Processing Time) SRPT

و-۵- خدمت‌دهی براساس (Weighted Shortest Processing Time) WSPT

و-۶- خدمت‌دهی براساس (Shortest Expected Processing Time) SEPT

و-۷- خدمت‌دهی براساس (Shortest Expected Remaining Processing Time) SERPT

و-۸- خدمت‌دهی براساس (Earliest Due Date) EDD

و-۹- خدمت‌دهی براساس (Biggest-In-First-Served) BIFS

و-۱۰- خدمت‌دهی براساس (Loudest-Voice-First-Served) LVFS

1- Preemption

16

دکتر مصطفی زنده



## مشخصه‌های یک سیستم صف

- و-۱۱- خدمت‌دهی براساس (Service In Random Order) SIRO
- و-۱۲- خدمت‌دهی براساس (Last Come First Served Preempt Resume) LCFS-PR
- و-۱۳- خدمت‌دهی براساس (Round Robin) RR
- و-۱۴- خدمت‌دهی براساس (Processor Sharing) PS
- و-۱۵- خدمت‌دهی براساس (Infinite Server) IS

\* در صورت در نظر گرفتن اولویت‌های ممکن به صورت حق تقاطع<sup>۱</sup> یا بدون حق تقاطع عمل شود.

1- Preemption

17

دکتر مصطفی زنده

## نمایش یک سیستم صف

### ■ نمایش یک سیستم صف<sup>۱</sup>:

نمایش سیستم صف براساس نمادهای کندال<sup>۲</sup>

A/B/m/K/C/z

به طور پیش فرض C و K:  $\infty$

به طور پیش فرض Z : FIFO

A و B : نمایی (M)، ارلنگ (Er)، قطعی (D)، عمومی (G) و ...

M/M/۱

مثال: مدل کلاسیک صف

D/M/۱/۱۰/LIFO

مثال:

ظرفیت      تعداد خدمت‌دهنده

1- Taxonomy 2- Kendall notation 3- Exponential distribution (Markovian)

18

دکتر مصطفی زنده

## زمینه‌های کاربردی صف

### ■ زمینه‌های کاربردی صف:

- ۱- شبکه حمل‌ونقل (اتوبوسرانی شهری - دریایی - هوایی)
- ۲- شبکه پستی
- ۳- شبکه بهداشت و درمان (بیمارستان - مراکز درمانی)
- ۴- سیستم نگهداری و تعمیرات
- ۵- سیستم تولید (کارخانه‌ها)
- ۶- سیستم خدماتی (پمپ بنزین - بانک - بیمه و ...)
- ۷- سیستم قابلیت اطمینان (پایایی)
- ۸- زنجیره تامین و لجستیک

\*تمرین: صفحه ۸ و ۹

تمرین‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵

تمرین ۶ (فقط یک مورد از بخش‌های الف تا د)