علم مدیریت فازی

مجموعه‌های فازی

Fuzzy Management Science
Fuzzy Sets

جلسه دوم: مجموعه‌های فازی

عناوین جلسه دوم:

- مجموعه‌های کلاسیک
  - معرفی، عملگرها، ویژگی‌ها، تابع مشخصه و روش نمایش
- مجموعه‌های فازی
  - معرفی، روش نمایش، تابع درجه عضویت، عملگرها و ویژگی‌ها

مقدمه

- مجموعه‌های کلاسیک یا ترد[1] دارای مرزهای مشخص هستند.
  مثال: مجموعه اعداد طبیعی زوج تک رقمی.

- مجموعه‌های فازی دارای مرز مبهم هستند.
  مثال: مجموعه افراد جوان قدبلند.

مثال: مجموعه‌های زیر بر روی مجموعه مرجع دمای ۳۵ تا ۴۵ درجه تعریف شده‌اند.

- مجموعه ترد: محدوده دمایی ۳۷ تا ۴۰ درجه یا به عبارت دیگر [۴۰ ۳۷]؛
- مجموعه فازی: دمای تب شدید.

1- Crisp

مجموعه‌های کلاسیک

- فرض کنید X نشان‌دهنده مجموعه مرجع[1] و x نشان‌دهنده عضوی از آن باشد. ما با مفاهیم مجموعه، زیرمجموعه و مجموعه تهی آشنایی داریم.

- تعداد اعضای مجموعه مرجع، «عدد اصلی» یا «عدد کاردینال» مجموعه نامیده می‌شود.

- «مجموعه توانی» به مجموعه‌ای شامل تمام زیرمجموعه‌های ممکن در مجموعه مرجع اطلاق شده و با P(X) نمایش داده می‌شود.

1- Universe of discourse

مجموعه‌های کلاسیک

مثال: عدد کاردینال، مجموعه توانی و عدد کاردینال مجموعه توانی را برای مجموعه مرجع X={1, 2, 3, 4} به‌دست آورید.

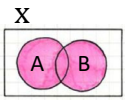
$$|X| = 4$$

$$P(X) = \{\{\ \},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\ldots$$
$$\ldots,\{3,4\},\ \{1,2,3\}\ ,\{1,2,4\}\ ,\{1,3,4\}\ ,\{2,3,4\}\ ,\{1,2,3,4\}\}$$

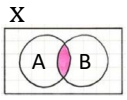
$$|P(X)| = 2^{|X|} = 2^4 = 16$$

مجموعه‌های کلاسیک: عملگرها

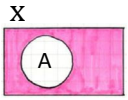
- اجتماع[1]: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$



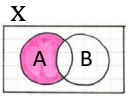
- اشتراک[2]: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$



- مکمل[3]: $\overline{A} = \{x \mid x \in X \text{ and } x \notin A\}$



- تفاضل[4]: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$



1- Union
2- Intersection
3- Complement
4- Difference

مجموعه‌های کلاسیک: ویژگی‌ها

- جابه‌جایی[1]
- شرکت‌پذیری[2]
- توزیع‌پذیری[3]
- خودتوانی[4]

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

1- Commutativity 2- Associative 3- Distributivity 4- Idempotency

مجموعه‌های کلاسیک: ویژگی‌ها

- جذب[1]
- همانی[2]
- تعدی (تراگذاری)[3]
- برگشت‌پذیری[4]

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$A \cup X = X$$

$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap X = A$$

$$A \subseteq B \text{ and } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

$$\bar{\bar{A}} = A$$

1- Absorption 2- Identity 3- Transitivity 4- Involution

مجموعه‌های کلاسیک: ویژگی‌ها

- قانون اجتماع با مکمل[۱]

$$A \cup \bar{A} = X$$

- قانون تناقض[۲]

$$A \cap \bar{A} = \varnothing$$

- قوانین دمورگان[۳]

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

1- Exclude Middle Law 2- Contradiction Law 3- DeMorgan's Law

مجموعه‌های کلاسیک: تابع مشخصه

- مجموعه کلاسیک A از مجموعه مرجع X با روش‌های زیر قابل تعریف و نمایش است:
  - روش فهرست نمودن[۱]: نمایش تمامی اعضای مجموعه A در داخل نماد $\{\ \}$.

$$A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

  - روش مبتنی بر قاعده[۲]: بیان مجموعه A براساس خاصیتی که اعضای آن دارند:

$$A = \{x \in X | x \text{ meets some conditions}\}$$

  - روش تابع عضویت[۳]: بیان مجموعه A به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب با «تابع مشخصه[۴]» $\mu_A(x)$ به شکل زیر:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\};\ \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

1- List method 2- Rule method 3- Membership method 4- Characteristic Function

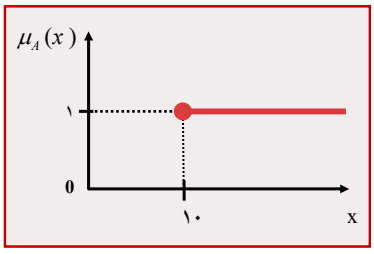
مجموعه‌های کلاسیک: تابع مشخصه

- «تابع مشخصه»ی عملگرها:
  - اجتماع: $\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$
  - اشتراک: $\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$
  - مکمل: $\mu_{\bar{A}}(x) = (1-\mu_A(x))$
  - زیرمجموعه: $A \subseteq B \rightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x)$

مجموعه‌های کلاسیک

مثال: مجموعه اعداد بزرگتر یا مساوی ۱۰ به‌صورت زیر قابل تعریف است:

$$A = \{x \mid x \ge 10\}$$



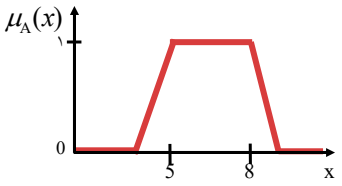
مجموعه‌های فازی: معرفی

- مجموعه فازی A نگاشتی از مجموعه عناصر مرجع X به بازه [0,1] است که به صورت A: X → [0,1] تعریف می‌شود.
- «تابع مشخصه»ی متناظر با مجموعه A: $0 \le \mu_A(x) \le 1$

- مقدار 1 نشان‌دهنده عضویت کامل،
- مقدار 0 نشان‌دهنده عدم عضویت
- و هر مقداری میان این دو آستانه نشان‌دهنده درجه‌ای از عضویت می‌باشد.

مجموعه‌های فازی: روش نمایش

- مجموعه فازی A از مجموعه مرجع X، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به‌صورت $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$ با تابع درجه عضویت[1] $0 \le \mu_A(x) \le 1$ است.

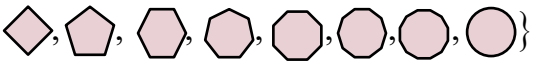


1- Membership Function

مجموعه‌های فازی

مثال: تعریف دایره با استفاده از مجموعه‌های ترد و فازی به‌صورت زیر:

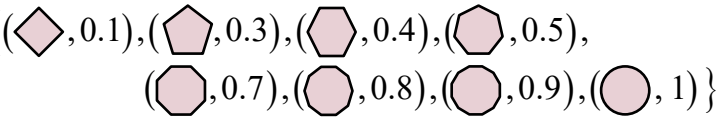
مجموعه مرجع:

$X = \{$  $\}$

تعریف ترد[1] دایره

$C = \{$ $\}$

تعریف فازی[2] دایره

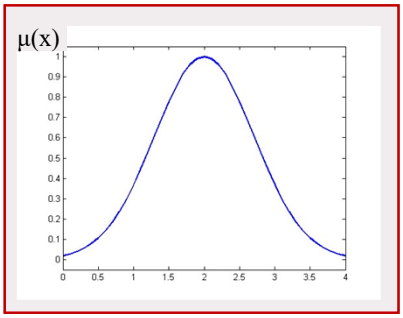
$F = \{$  $\}$

1- Crisp Definition 2- Fuzzy Definition

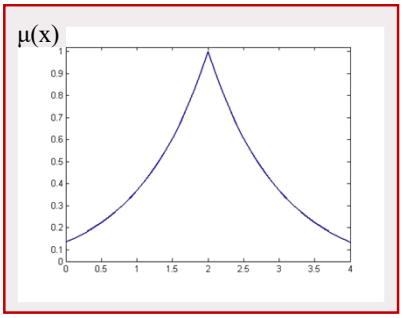
مجموعه‌های فازی

مثال: مجموعه فازی B شامل اعداد نزدیک ۲ به‌صورت زیر قابل تعریف است:

$\mu_B(x) = e^{-(x-2)^2}$



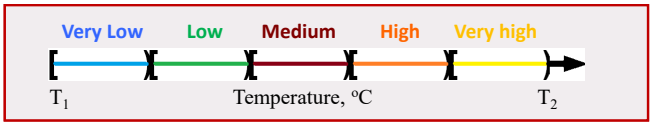
$\mu_B(x) = e^{-|x-2|}$



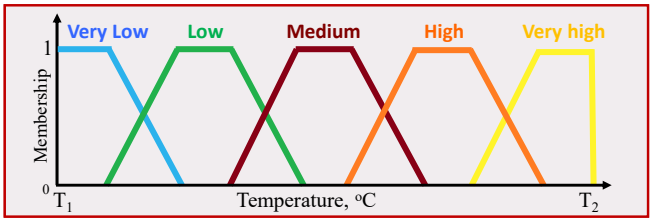
مجموعه‌های فازی

مثال: بخش‌بندی فازی[1] دما با استفاده از متغیرهای زبانی بجای بخش‌بندی ترد:

مجموعه ترد



مجموعه فازی

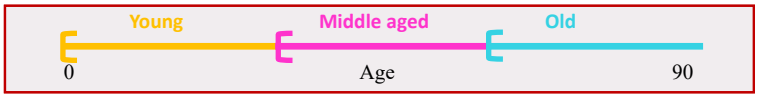


1- Fuzzy Partition

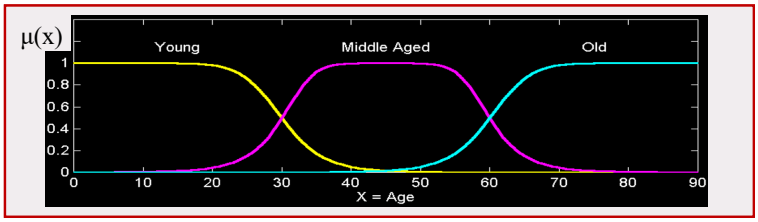
مجموعه‌های فازی

مثال: بخش‌بندی فازی[1] سن با استفاده از متغیرهای زبانی بجای بخش‌بندی ترد:

مجموعه ترد



مجموعه فازی



1- Fuzzy Partition

مجموعه‌های فازی

مثال‌هایی از اندازه‌گیری‌های فازی (قیود زبانی) عبارتند از:

Heavy, light, big, small, smart, fast, slow, hot, cold, tall, short

مثال: نمونه‌هایی از چنین مفاهیم و مجموعه‌های فازی که در زبان محاوره استفاده می‌شود:

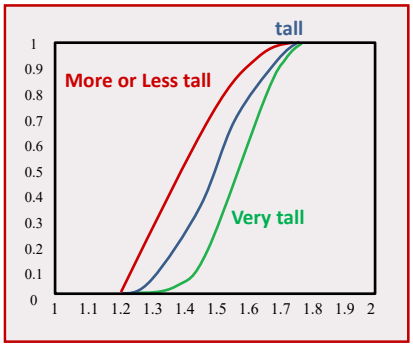
- John is short
- Dan is smart
- Alex is happy
- The class is cold

مجموعه‌های فازی

- می‌توان مفهوم مجموعه‌های فازی را با استفاده از قیودی همچون More or less, Slightly, Very و از این دست بهبود بخشید.

Very F = F^2

More or less F = $F^{½}$



مجموعه‌های فازی: نمایش

- برای نمایش مجموعه فازی A از نمادهای زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

X is Discrete $$A = \sum_{x_i \in X} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

X is Continuous $$A = \int_{\forall x \in X} \frac{\mu_A(x)}{x}$$

- علامت‌های «سیگما» و «انتگرال» نشان‌دهنده اجتماع می‌باشند.
- علامت «/» به عنوان جداکننده استفاده شده است و مفهوم تقسیم ندارد.

مجموعه‌های فازی با مقادیر گسسته

مثال: مجموعه فازی A به‌صورت «شهرهای مطلوب برای زندگی»

X={SF, Boston, LA} مقادیر گسسته و نامرتب

A={(SF, 0.6), (Boston, 0.9), (LA, 0.8)}

مثال: مجموعه فازی B به‌صورت «تعداد معقول فرزندان»

X={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} مقادیر گسسته

B={(0, 0.1),(1, 0.3),(2, 0.7) ,(3, 1) ,(4, 0.6) ,(5, 0.2) ,(6, 0.1)}

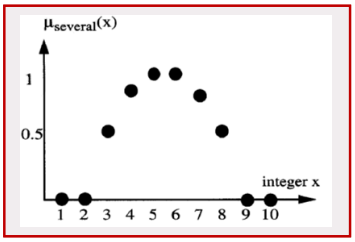
1- San Francisco (SF) 2- Los Angeles (LA)

مجموعه‌های فازی با مقادیر گسسته

مثال: مجموعه فازی چندین[1] (با مقادیر گسسته) به‌صورت زیر قابل تعریف است:

$$X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$$

$$\text{Several} = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0.8}{7} + \frac{0.5}{8} + \frac{0}{9} + \frac{0}{10}$$



1- Several

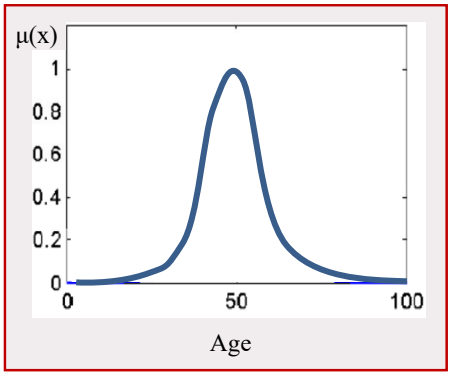
مجموعه‌های فازی با مقادیر پیوسته

مثال: مجموعه فازی «حدود ۵۰ سال سن» به‌صورت زیر قابل تعریف است:

مجموعه‌ای از اعداد حقیقی و مثبت =X

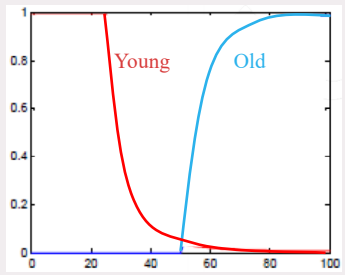
$$B = \{(x,\ \mu_B(x)) \mid x \in X\}$$

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-50}{10}\right)^2}$$



مجموعه‌های فازی با مقادیر پیوسته

مثال: مجموعه مرجع X در محدوده [۰ ۱۰۰] که نشانگر سن افراد عادی است را در نظر بگیرید. مجموعه‌های فازی **جوان** و **پیر** در آن به‌صورت زیر تعریف شده است:



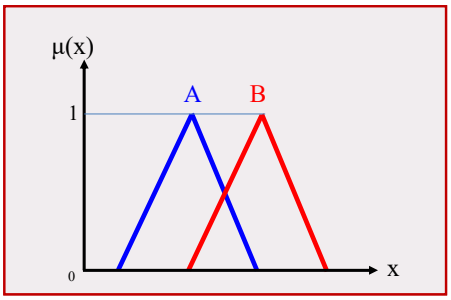
$$\text{Young} = \int_0^{25} \frac{1}{x} + \int_{25}^{100} \frac{\left(1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1}}{x}$$

$$\text{Old} = \int_{50}^{100} \frac{\left(1+\left(\frac{5}{x-50}\right)^2\right)^{-1}}{x}$$

مجموعه‌های فازی: عملگرها

اعمال مختلفی بر روی مجموعه‌های فازی قابل تعریف هستند، از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد که اولین بار توسط زاده[1] معرفی شدند:

- اجتماع[2]
- اشتراک[3]
- مکمل[4]

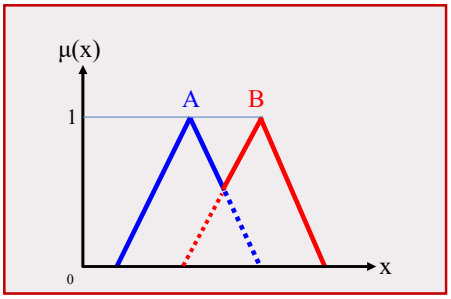


1- Zadeh
2- Union
3- Intersection
4- Complement

مجموعه‌های فازی: عملگرها

- اجتماع[1]

$$(A \cup B): \quad \mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

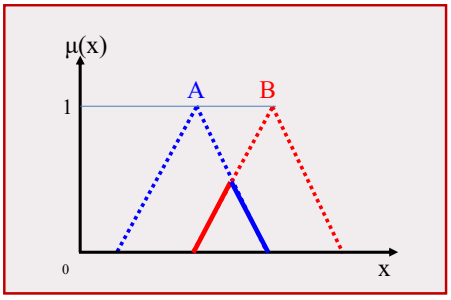


1- Union

مجموعه‌های فازی: عملگرها

- اشتراک[1]

$$(A \cap B): \quad \mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

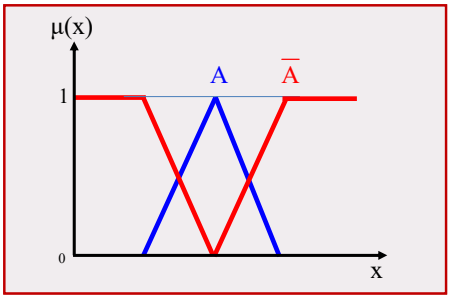


1- Intersection

مجموعه‌های فازی: عملگرها

- مکمل[1]

$$\bar{A}: \quad \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



1- Complement

مجموعه‌های فازی: ویژگی‌ها

- در مجموعه‌های فازی ویژگی‌های جابه‌جایی، شرکت‌پذیری، توزیع‌پذیری، خودتوانی، جذب، همانی، تعدی (تراگذاری)، برگشت‌پذیری و قوانین دمورگان برقرار است.

- نقض قانون اجتماع با مکمل

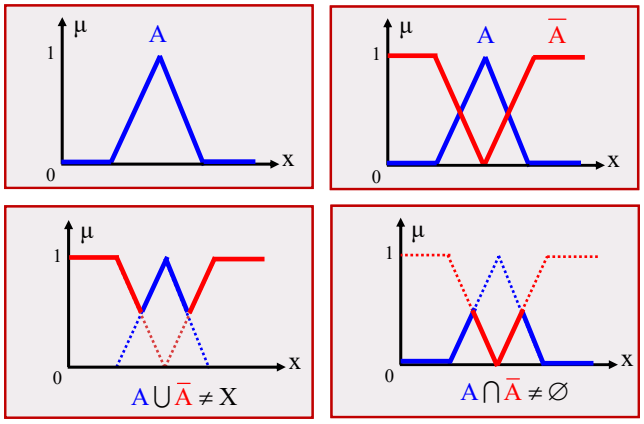
$$A \cup \bar{A} \neq X$$

- نقض قانون تناقض

$$A \cap \bar{A} \neq \varnothing$$

مجموعه‌های فازی: عملگرها

مثال: مجموعه فازی A با تابع عضویت زیر را در نظر گرفته نشان دهید ویژگی‌های «قانون اجتماع با مکمل» و «قانون تناقض» برقرار نیستند.



مجموعه‌های فازی: عملگرها

مثال: فرض کنید X مجموعه مرجع هواپیماهای تجاری باشد. اگر A مجموعه فازی هواپیماهای مسافری و B مجموعه فازی هواپیماهای باری باشد؛ اشتراک، اجتماع و مکمل آنها را به‌دست آورید.

$$X = \{A10, B52, B117, C5, C130, F4, F14, F15, F16, F111, KC130\}$$

$$A = \frac{0.4}{A10} + \frac{1}{B52} + \frac{1}{B117} + \frac{1}{F4} + \frac{0.6}{F14} + \frac{0.8}{F16} + \frac{0.7}{F111}$$

$$B = \frac{0.4}{B117} + \frac{0.6}{F4} + \frac{0.9}{F14} + \frac{1}{F15} + \frac{1}{F16} + \frac{0.4}{F111}$$

مجموعه‌های فازی: عملگرها

$$(A \cap B) = \frac{0.4}{B117} + \frac{0.6}{F4} + \frac{0.6}{F14} + \frac{0.8}{F16} + \frac{0.4}{F111}$$

$$(A \cup B) = \frac{0.4}{A10} + \frac{1}{B52} + \frac{1}{B117} + \frac{1}{F4} + \frac{0.9}{F14} + \frac{1}{F15} + \frac{1}{F16} + \frac{0.7}{F111}$$

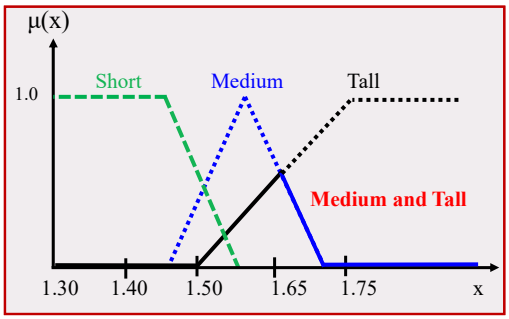
$$\bar{A} = \frac{0.6}{A10} + \frac{1}{C5} + \frac{1}{C130} + \frac{0.4}{F14} + \frac{1}{F15} + \frac{0.2}{F16} + \frac{0.3}{F111} + \frac{1}{KC130}$$

$$\bar{B} = \frac{1}{A10} + \frac{1}{B52} + \frac{0.6}{B117} + \frac{1}{C5} + \frac{1}{C130} + \frac{0.4}{F4} + \frac{0.1}{F14} + \frac{0.6}{F111} + \frac{1}{KC130}$$

مجموعه‌های فازی: عملگرها

مثال: فرض کنید که سه مجموعه فازی Short, Medium, Tall به‌صورت زیر تعریف شده‌اند، مجموعه فازی (Medium and Tall) به‌صورت زیر قابل تعریف است:

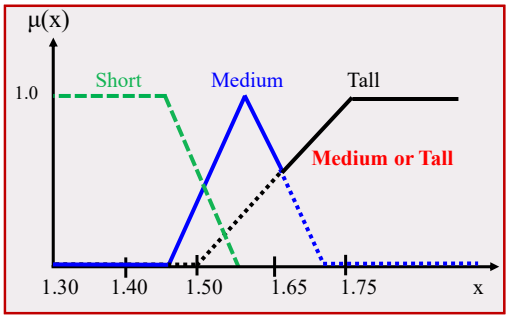
$$\mu_{\text{Medium} \cap \text{Tall}}(x) = \min\left\{\mu_{\text{Medium}}(x),\ \mu_{\text{Tall}}(x)\right\}$$



مجموعه‌های فازی: عملگرها

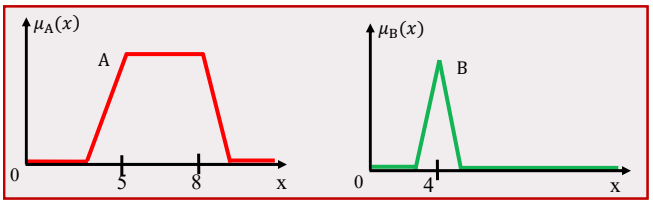
مثال: فرض کنید که سه مجموعه فازی Short, Medium, Tall به‌صورت زیر تعریف شده‌اند، مجموعه فازی (Medium or Tall) به‌صورت زیر قابل تعریف است:

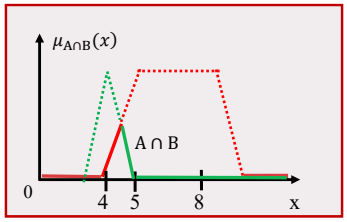
$$\mu_{\text{Medium}\cup\text{Tall}}(x) = \max\left\{\mu_{\text{Medium}}(x),\ \mu_{\text{Tall}}(x)\right\}$$



مجموعه‌های فازی: عملگرها

مثال: دو مجموعه فازی A و B به صورت زیر تعریف شده‌اند، مجموعه فازی $A\cap B$ را به‌دست آورید.

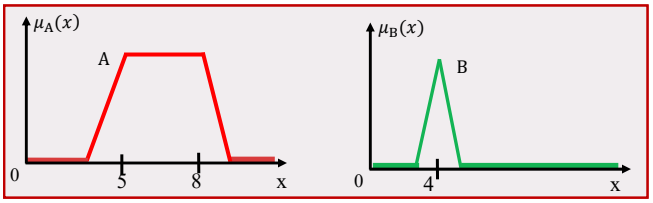


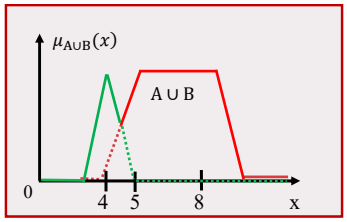


$$(A\cap B):\quad \mu_{A\cap B}(x) = \min\left\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\right\}$$

مجموعه‌های فازی: عملگرها

مثال: دو مجموعه فازی A و B به صورت زیر تعریف شده‌اند، مجموعه فازی $A \cup B$ را به‌دست آورید.

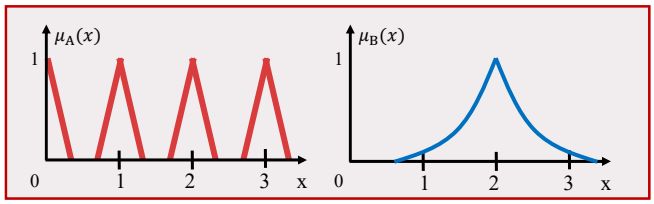


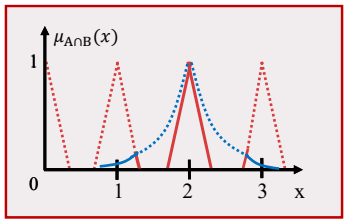


$$(A \cup B): \quad \mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$$

مجموعه‌های فازی: عملگرها

مثال: دو مجموعه فازی A و B به صورت زیر تعریف شده‌اند، مجموعه فازی $A \cap B$ را به‌دست آورید.

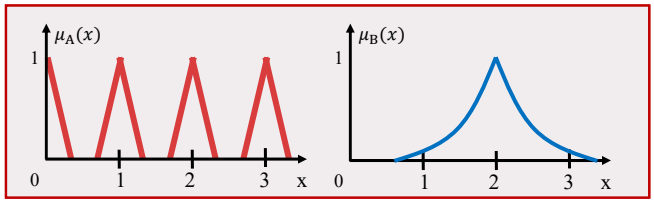


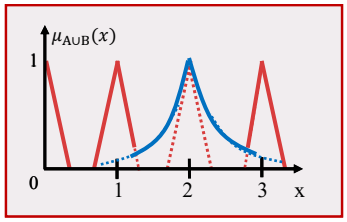


$$(A \cap B): \quad \mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$$

مجموعه‌های فازی: عملگرها

مثال: دو مجموعه فازی A و B به صورت زیر تعریف شده‌اند، مجموعه فازی $A \cup B$ را به‌دست آورید.





$$(A \cup B): \quad \mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

مجموعه‌های فازی: عملگرها

مثال: مجموعه فازی A از مجموعه مرجع X به‌صورت زیر تعریف شده است، مجموعه‌های فازی $\bar{A}$، $A \cap \bar{A}$ و $A \cup \bar{A}$ را به‌دست آورید

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \qquad A = \frac{1}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.7}{x_3}$$

$$\bar{A} = \frac{0}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.3}{x_3} + \frac{1}{x_4}$$

$$A \cap \bar{A} = \frac{0}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.3}{x_3} + \frac{0}{x_4} \neq \varnothing$$

$$A \cup \bar{A} = \frac{1}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.7}{x_3} + \frac{1}{x_4} \neq X$$

ویژگی‌های مجموعه‌های فازی: اثبات قانون دمورگان

مثال: برای دو مجموعه فازی A و B از مجموعه مرجع X نشان دهید: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$$\forall x \in X,\ \mu_{\overline{A \cup B}}(x) = \mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}(x)$$

$$\mu_{\overline{A \cup B}}(x) = 1 - \mu_{A \cup B}(x) = 1 - \max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\} \qquad (L)$$

$$\mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}(x) = \min\{\mu_{\bar{A}}(x),\ \mu_{\bar{B}}(x)\} = \min\{(1-\mu_A(x)),\ (1-\mu_B(x))\} \qquad (R)$$

Condition	Left Side	Right Side
$\mu_A(x) > \mu_B(x)$	$(1-\mu_A(x))$	$(1-\mu_A(x))$
$\mu_A(x) < \mu_B(x)$	$(1-\mu_B(x))$	$(1-\mu_B(x))$

ویژگی‌های مجموعه‌های فازی: اثبات قانون دمورگان

تمرین: برای دو مجموعه فازی A و B از مجموعه مرجع X نشان دهید: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$