فصل هفتم

تحلیل رگرسیونی چند متغیره (مرکب) :
مسأله تخمین

فهرست

چکیده:

به منظور نزدیک‌تر شدن به دنیای واقعی ، نیاز به تعمیم و گسترش مدل رگرسیون دو متغیره ساده داریم. بدین منظور در این فصل به بررسی مدل رگرسیون سه متغیره با یک متغیر وابسته و دو متغیر توضیحی می‌پردازیم.

مدل سه متغیره (نمادها و فروض)

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

β_1:عرض از مبدأ

β_2 و β_3 : ضرایب جزئی رگرسیون

فروض مدل:

1) $E(u_i | X_{2i}, X_{3i}) = 0$

2) $Cov(u_i, u_j) = 0 \qquad i \neq j$

3) $\text{var}\,(u_i) = \sigma_u{}^2$

4) $Cov(u_i, X_{2i}) = Cov(u_i, X_{3i}) = 0$

5) عدم وجود تورش تصریح

6) عدم وجود همخطی کامل بین متغیرهای X

یعنی هیچ یک از متغیرهای توضیحی را نمی‌توان به صورت ترکیبهای خطی از سایر متغیرهای توضیحی نوشت.

$$\lambda_2 X_{2i} + \lambda_3 X_{3i} = 0$$

$$\text{if} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad \Rightarrow$$

X_2 و X_3 استقلال خطی دارند.

تفسیر معادله رگرسیونی چند متغیره (مرکب)

$$E(Y_i | X_{2i}, X_{3i}) = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i}$$

مفهوم ضرایب جزئی رگرسیون :

β_2: تأثیر مستقیم یا خالص یک واحد تغییر در X_2 بر میانگین شرطی Y صرف نظر از X_3

β_3: تأثیر مستقیم یا خالص یک واحد تغییر در X_3 بر میانگین شرطی Y صرف نظر از X_2

مراحل ثابت نگهداشتن X_3

مرحله (I) $Y_i = b_1 + b_{13} X_{3i} + e_{1i} \Rightarrow e_{1i} = Y_i - b_1 - b_{13} X_{3i} = Y_i - \hat{Y}_i$

مرحله (II)

$$X_{2i} = b_2 + b_{23} X_{3i} + e_{2i} \Rightarrow e_{2i} = X_{2i} - b_2 - b_{23} X_{3i} = X_{2i} - \hat{X}_{2i}$$

مرحله (III)

$$e_{1i} = \alpha_0 + \alpha_1 e_{2i} + e_{3i}$$

α_1 تأثیر خالص یا مستقیم یک واحد تغییر در X_2 بر روی Y $\Leftarrow$ $\alpha_1 = \beta_2$

تخمین OLS و ML از ضرایب جزئی رگرسیون

تخمینهای OLS:

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + e_i \qquad (1)$$

$$Min \sum e_i^{\,2} = \sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i})^2 \qquad (2)$$

(3) معادله اول نرمال :

$$\frac{\partial \sum e_i^{\,2}}{\partial \hat{\beta}_1} = 2\sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i})(-1) = 0 \;\Rightarrow\; \sum e_i = 0$$

(4) معادله دوم نرمال :

$$\frac{\partial \sum e_i^{\,2}}{\partial \hat{\beta}_2} = 2\sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i})(-X_{2i}) = 0 \;\Rightarrow\; \sum e_i X_{2i} = 0$$

(5) معادله سوم نرمال :

$$\frac{\partial \sum e_i^{\,2}}{\partial \hat{\beta}_3} = 2\sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i})(-X_{3i}) = 0 \;\Rightarrow\; \sum e_i X_{3i} = 0$$

(6)

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\left(\sum y_i x_{2i}\right)\left(\sum x_{3i}^2\right) - \left(\sum y_i x_{3i}\right)\left(\sum x_{2i} x_{3i}\right)}{\left(\sum x_{2i}^2\right)\left(\sum x_{3i}^2\right) - \left(\sum x_{2i}\ x_{3i}\right)^2}$$

(7)

$$\hat{\beta}_3 = \frac{\left(\sum y_i x_{3i}\right)\left(\sum x_{2i}^2\right) - \left(\sum y_i x_{2i}\right)\left(\sum x_{2i} x_{3i}\right)}{\left(\sum x_{2i}^2\right)\left(\sum x_{3i}^2\right) - \left(\sum x_{2i} x_{3i}\right)^2}$$

- معادلات (6) و (7) ماهیتاً متقارن هستند.
- مخرجهای دو معادله یکسان می‌باشند.
- مدل سه متغیره تعمیم مدل دو متغیره است.

واریانس و خطاهای معیار تخمین مدلهای OLS

$$Var(\hat{\beta}_2)=\frac{\sum x_{3i}^2}{\left(\sum x_{2i}^2\right)\left(\sum x_{3i}^2\right)-\left(\sum x_{2i}x_{3i}\right)^2}\,\sigma^2=\frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2(1-r_{23}^2)}$$

$$Var\ (\hat{\beta}_3)=\frac{\sum x_{2i}^2}{\left(\sum x_{2i}^2\right)\left(\sum x_{3i}^2\right)-\left(\sum x_{2i}x_{3i}\right)^2}\,\sigma^2=\frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2(1-r_{23}^2)}$$

$$Cov(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3)=\frac{-r_{23}\sigma^2}{(1-r_{23}^2)\sqrt{\sum x_{2i}^2}\ \sqrt{\sum x_{3i}^2}}$$

- تخمین‌زن ناتور σ^2 $\quad \Leftarrow \quad \sigma^2=\frac{\sum e_i^2}{N-3}$

ویژگیهای تخمین‌زن‌های OLS

1) خط رگرسیون از میانگین‌های $\bar{Y}, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ می گذرد.

2) $\sum e_i = \bar{e} = 0$ → رابطه (3) → معادله اول نرمال

3) $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$ اثبات:

$$Y_i = \hat{Y}_i + e_i \Rightarrow \sum Y_i = \sum \hat{Y}_i + \sum e_i \Rightarrow \sum e_i = 0 \Rightarrow \bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$$

4) $\sum e_i \; X_{2i} = 0$ → معادله دوم نرمال

$\sum e_i \; X_{2i} = 0$ → معادله سوم نرمال

$$\sum e_i \; \hat{Y}_i = 0$$

$$\sum e_i \hat{y}_i = 0$$ (5

اثبات:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i} \xRightarrow{*e_i} e_i \hat{y}_i = \hat{\beta}_2 e_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 e_i x_{3i}$$

$$\Rightarrow \sum e_i \hat{y}_i = \hat{\beta}_2 \sum e_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum e_i x_{3i}$$

$$\xrightarrow{\text{مطابق ویژگی چهارم}} \hat{\beta}_2 \sum e_i x_{2i} = \hat{\beta}_3 \sum e_i x_{3i} = 0 \Rightarrow \sum e_i \hat{y}_i = 0$$

(6

$$\text{if} \quad r_{23}^2 \uparrow \quad \Rightarrow \left[Var(\hat{\beta}_2) \uparrow \ , \ Var(\hat{\beta}_3) \uparrow \right]$$

$$\text{if} \quad r_{23}^2 \to 1 \Rightarrow \left[Var(\hat{\beta}_2) \to \infty \ , \ Var(\hat{\beta}_3) \to \infty \right]$$

7)

$$\text{if}\quad \overline{\sum x_{2i}^{2}}\ ,\quad \overline{r_{23}}\ ,\quad \overline{\sum x_{3i}^{2}}\ ,\ \sigma^{2}\uparrow\ \Rightarrow \left[\mathrm{var}(\hat{\beta}_2),\mathrm{var}(\hat{\beta}_3)\uparrow\right]$$

$$\text{if}\quad \overline{\sigma^{2}}\ ,\quad \overline{r_{23}}\ ,\quad \begin{cases}\sum x_{2i}^{2}\uparrow\Rightarrow \mathrm{var}(\hat{\beta}_2)\downarrow\\ \sum x_{3i}^{2}\uparrow\Rightarrow \mathrm{var}(\hat{\beta}_3)\downarrow\end{cases}$$

8) تخمین‌زننده‌ها BLUE هستند.


تخمین زنهای حداکثر راستنمایی
AN

تخمین‌زننده‌های حداکثر راستنمایی

$$f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N \mid \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki}, \sigma^2) \qquad \text{for} \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

$$= f(Y_1 \mid \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki}, \sigma^2)\ f(Y_2 \mid \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki}, \sigma^2) \ \ldots\ f(Y_N \mid \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki}, \sigma^2)$$

$$f(Y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki})^2}{\sigma^2} \right\}$$

$$\Rightarrow L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, \sigma^2) = f(Y_1) f(Y_2) \cdots f(Y_i) \cdots f(Y_N)$$

$$= \frac{1}{\sigma^N (\sqrt{2\pi})^N} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{(\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki})^2}{\sigma^2} \right\}$$

$$LnL = -\frac{N}{2}\ln\sigma^2 - \frac{N}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum \frac{(Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_{2i} - \ldots - \beta_k X_{ki})^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum(\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki})(-1)$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \beta_2} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum(\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki})(-X_{2i})$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \beta_k} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum(Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_{2i} - \ldots - \beta_k X_{ki})(-X_{ki})$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum(Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_{2i} - \ldots - \beta_k X_{ki})^2$$

$$\sum Y_i = N\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2\sum X_{2i} + \ldots + \sum\tilde{\beta}_k\sum X_{ki}$$

$$\sum Y_i X_{2i} = \tilde{\beta}_1\sum X_{2i} + \tilde{\beta}_2\sum X_{2i}^2 + \ldots + \tilde{\beta}_k\sum X_{3i}X_{ki}$$

$$\vdots$$

$$\sum Y_i X_{ki} = \tilde{\beta}_1\sum X_{ki} + \tilde{\beta}_2\sum X_{2i}X_{ki} + \ldots \tilde{\beta}_k\sum X_{ki}^2$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum(Y_i - \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 X_{2i} - \ldots - \tilde{\beta}_k X_{ki})^2 = \frac{1}{N}\sum e_i^2$$

تخمین‌زن σ^2 از روش ML مستقل از تعداد متغیرها و تخمین‌زنی تورش‌دار می‌باشد.

ضریب تعیین چندگانه (مرکب) R^2 و ضریب همبستگی چندگانه (مرکب) r:

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + e_i = \hat{Y}_i + e_i$$

$$y_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i} + e_i = \hat{y}_i + e_i$$

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2 + 2\overbrace{\sum \hat{y}_i e_i}^{0} \Rightarrow \sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2$$

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum y_i^2 - \hat{\beta}_2 \sum y_i\ x_{2i} - \hat{\beta}_3 \sum y_i\ x_{3i}$$

$$ESS = \sum \hat{y}_i^2 = \hat{\beta}_2 \sum y_i\ x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum y_i\ x_{3i}$$

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\hat{\beta}_2 \sum y_i\ x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum y_i\ x_{3i}}{\sum y_i^2}$$

r مدل رگرسیونی مرکب ، همبستگی بین Y و تمامی متغیرهای توضیحی را بطور مشترك نشان می‌دهد.

$$r = \pm\sqrt{R^2}$$

مثال (7-6

منحنی فیلیپس تعدیل شده بر حسب انتظارات برای ایالات متحده طی دوره 1982 - 1970

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$$

Y_t: نرخ واقعی تورم (٪) در زمان t

X_{2t}: نرخ بیکاری (٪) در زمان t

X_{3t}: نرخ تورم مورد انتظار یا پیش بینی شده (٪) در زمان t

$$\hat{Y}_t = 7.1933 - 1.3925\ X_{2t} + 1.4700\ X_{3t}$$

$$(1.5948)\quad (0.305)\qquad (0.1758)$$

$$R^2 = 0.8766$$

رگرسیون ساده در چارچوب رگرسیون چند متغیره (مرکب):

مقدمه‌ای بر تورش تصریح

مدل صحیح : $$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + U_t$$

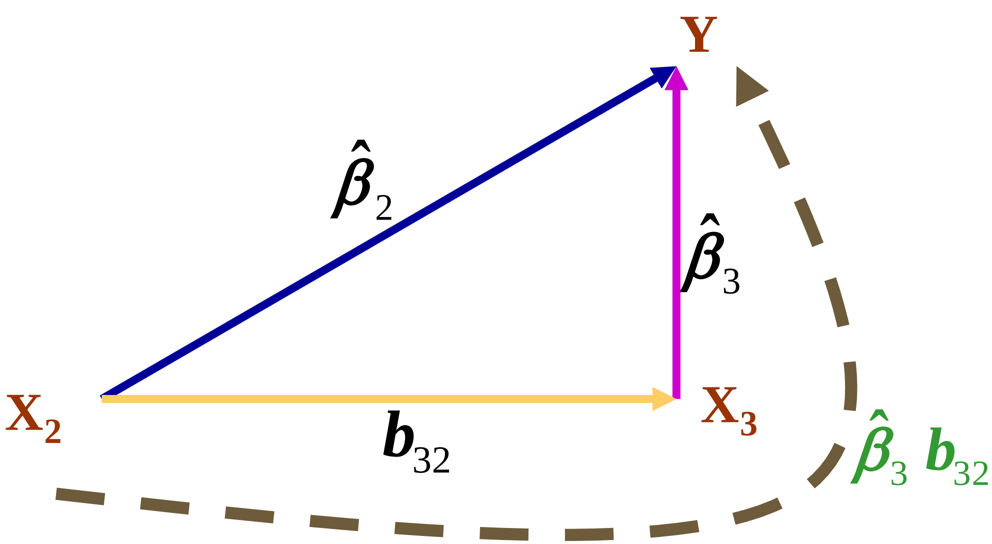
مدل تخمین‌زده شده : $$Y_t = b_1 + b_{12} X_{2t} + e_{1t}$$

$$\boldsymbol{E(b_{12}) \neq \beta_2}$$

[اثبات در ضمیمه] $$b_{12} = \beta_2 + \beta_3 b_{32} +$$ جزء خطا

$$X_{3t} = b_2 + b_{32} X_{2t} + e_{2t}$$

تأثیر غیر مستقیم +	تأثیر مستقیم	= تأثیر ناخالص
X_2 روی Y	X_2 روی Y	X_2 روی Y
$(\hat{\beta}_3\, b_{32})$	$(\hat{\beta}_2)$	(b_{12})



R^2 و R^2ی تعدیل شده:

if تعداد متغیرهای توضیحی $\uparrow$ $\Rightarrow$ $R^2 \uparrow$ و (درجه آزادی)$\downarrow$

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

برای در نظر گرفتن افزایش R^2 به همراه کاهش درجه آزادی در مقایسه دو مدل به جای R^2 از $\bar{R}^2$ استفاده می‌شود.

K: تعداد پارامترهای مدل حاوی جزء عرض از مبدأ

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2 /(N-K)}{\sum y_i^2 /(N-1)}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{S_y^2} = 1 - (1 - R^2)\frac{N-1}{N-K}$$

1) $\text{if} \quad K > 1 \Rightarrow \bar{R}^2 < R^2$

2) $\bar{R}^2$ می‌تواند منفی باشد. $\text{if} \quad \bar{R}^2 < 0 \Rightarrow R^2 = 0$

توجه: استفاده از $\bar{R}^2$ بهتر از R^2 است زیرا $\bar{R}^2$

تصویر واقع بینانه‌تری از برازش رگرسیون را نشان می‌دهد،

به ویژه هنگامی که تعداد متغیرهای توضیحی در مقایسه با

تعداد مشاهدات اندک باشد.

مقایسه دو مقدار R^2:

در مقایسه دو مدل بر اساس ضریب تعیین، خواه تعدیل شده یا تعدیل نشده باشد، متغیر وابسته باید یکسان باشد اما متغیرهای توضیحی می‌توانند متفاوت باشند.

مثال : R^2 دو مدل مقابل را نمی‌توان مقایسه کرد:

$$Ln\, Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + U_i$$

$$Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2i} + \alpha_3 X_{3i} + U_i$$

چگونه می‌توان R^2 های مدلهای فوق را بایکدیگر مقایسه کرد؟

1) باید آنتی لگاریتم، $\widehat{\ln Y_i}$ مدل اول را به دست آورده، سپس R^2 بین آنتی لگاریتم $\widehat{\ln Y_i}$ و Y_i رابه دست آورده و با R^2 مدل دوم مقایسه کرد.

2) متقابلاً $\hat{Y}_i$ را از مدل دوم به دست آورده ، آن را به $\widehat{\ln Y_i}$ تبدیل کرده و سپس R^2 بین $\widehat{\ln Y_i}$ و $\ln Y_i$ را با R^2 مدل اول مقایسه می‌کنیم.

ضرایب همبستگی جزئی:

ضریب همبستگی جزئی نشانگر درجه «حقیقی» همبستگی بین متغیر توضیحی و یک متغیر دیگر است که از تأثیر سایر متغیرهای توضیحی خنثی شده است.

مطابق آنچه قبلاً اشاره شد:

$$r_{e_1 e_2} = r_{12\ ,3}$$

$$= \frac{\sum (e_{1i} - \bar{e}_1)(e_{2i} - \bar{e}_2)}{\sqrt{\sum (e_{1i} - \bar{e}_1)^2 \sum (e_{2i} - \bar{e}_2)}} \quad \underline{\underline{\bar{e}_1 = \bar{e}_2 = 0}} \quad \frac{\sum e_{1i} e_{2i}}{\sqrt{\sum e_{1i}^2 \sum e_{2i}^2}}$$

$$r_{12\ ,3} = \frac{r_{12} - r_{13} r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}}$$

= ضریب جزئی همبستگی بین Y و X_2 با ثابت نگهداشتن X_3

$$r_{13\ ,2} = \frac{r_{13} - r_{12} r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}}$$

= ضریب جزئی همبستگی بین Y و X_3 با ثابت نگهداشتن X_2

$$r_{23\ ,1} = \frac{r_{23} - r_{12} r_{13}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2)}}$$

= ضریب جزئی همبستگی بین X_2 و X_3 با ثابت نگهداشتن Y

تفسیر ضرایب ساده و جزئی همبستگی

1) حتی اگر $r_{12} = 0$ باشد، مادامیکه $r_{23} \neq 0$ و $r_{13} \neq 0$ ویا هر دو صفر نباشند، $r_{12,3}$ صفر نخواهد بود.

2) اگر $r_{12} = 0$ ویا $r_{13} \neq 0$ و $r_{23} \neq 0$ و r_{23} و r_{13} هم علامت باشند،آنگاه $r_{12,3} < 0$

3) اگر $r_{12} = 0$ ویا $r_{13} \neq 0$ و $r_{23} \neq 0$ و r_{23} و r_{13} مختلف العلامه باشند، آنگاه : $r_{12,3} > 0$

4) $$0 \leq r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23} \leq 1$$

5) اگر $r_{13} = r_{23} = 0$ این بدین معناست که Y با X_3 و X_2 با X_3 همبستگی ندارند ، نه اینکه Y و X_2 همبستگی ندارند.

$r^2_{12,3}$ ضریب جزئی تعیین نامیده می شود و به عنوان نسبتی از تغییر در Y، که توسط X_3 توضیح داده نشده و با وارد کردن X_2 در مدل توضیح داده شده است ، تفسیر می‌شود.

روابط بین R^2 وضرایب ساده وجزئی همبستگی

$$R^2 = \frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2\, r_{12}\, r_{13} r_{23}}{1 - r_{23}^2}$$

$$= r_{12}^2 + (1 - r_{12}^2)\, r_{13,2}^2$$

$$= r_{13}^2 + (1 - r_{13}^2)\, r_{12,3}^2$$

از رابطه بالا مشخص می‌شود که هرگاه متغیر توضیحی به مدل اضافه شود R^2 کاهش نخواهد یافت.

مدلهای رگرسیونی چند جمله‌ای

رگرسیون چندجمله‌ای درجه 2 از لحاظ متغیر X

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + u_i$$

رگرسیون چندجمله‌ای درجه kام

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \cdots + \beta_k X_i^k U_i$$

نکته: $X_i^2 , X_i^3 , \ldots , X_i^k$ همگی توابعی غیرخطی از X_i بوده و بنابراین فرض عدم وجود همخطی را نقض نمی‌کنند.

مثال 7-4 : تخمین تابع هزینه کل

Y: هزینه کل

X: محصول

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^{\ 2} + \beta_3 X_i^{\ 3} + u_i$$

برای داشتن منحنی های U شکلی از هزینه نهایی و متوسط کوتاه مدت ، باید محدودیتهای زیر برای پارامترها صادق باشند:

1) $\beta_0 \ , \beta_1 \ , \beta_3 > 0$

2) $\beta_2 < 0$

3) $\beta_2^{\ 2} < 3 \beta_1 \beta_3$

نتایج تجربی

$$\hat{Y}_i = 141.7667 + 63.4776\ X_i - 12.9615\ X_i^2 + .9396\ X_i^3$$
$$(6.3753)\quad(4.7786)\qquad(.9857)\qquad(.0591)$$

$$R^2 = .9983$$

خلاصه

در این فصل به بیان رگرسیون سه متغیره (مرکب) پرداختیم.

مفاهیم ذکر شده:

- ضرائب جزئی رگرسیونی
- ضرائب جزئی همبستگی و ضرایب مرکب همبستگی
- R^2 تعدیل نشده و R^2 تعدیل شده
- همخطی و تورش
- اگرچه R^2 معیار خلاصه و مفیدی است اما نباید بیش ازحد بر اهمیت آن تأکید کرد.

ضمیمه [اثبات: $E(b_{12})=\beta_2+\beta_3 b_3$]

$$y_i=\beta_2 X_{2i}+\beta_3 x_{3i}+(u_i-\bar{u})$$

$$\sum y_i x_{2i}=\beta_1\sum x_{2i}^2+\beta_3\sum x_{2i}x_{3i}+\sum x_{2i}(u_i-\bar{u})$$

$$\sum y_i x_{3i}=\beta_2\sum x_{3i}x_{2i}+\beta_3\sum x_{3i}^2+\sum x_{3i}(u_i-\bar{u})$$

$$\frac{\sum y_i x_{2i}}{\sum x_{2i}^2}=\beta_2+\beta_3\frac{\sum x_{2i}x_{3i}}{\sum x_{2i}^2}+\frac{\sum x_{2i}(u_i-\bar{u}_i)}{\sum x_{2i}^2}$$

$$b_{12}=\frac{\sum y_i\ x_{2i}}{\sum x_{2i}^2}$$

$$b_{32}=\frac{\sum x_{2i}x_{3i}}{\sum x_{3i}^2}\quad\rightarrow\quad b_{12}=\beta_2+\beta_3 b_{3\,2}+\frac{\sum x_{2i}(u_i-\bar{u})}{\sum x_{2i}^2}$$

$$E(b_{12})=\beta_2+\beta_3\,b_{3\,2}$$

پایان