

به نام خدا

تمرین‌های درس مبانی ترکیبیات

استاد درس: مریم طهماسبی

حل تمرین‌ها: کلاس حل تمرین

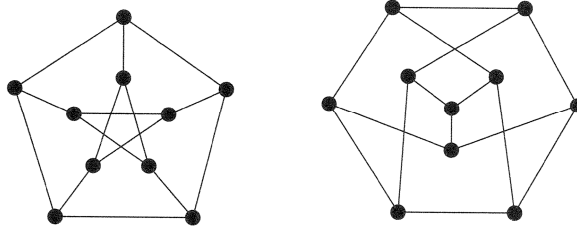
موضوع: گراف

تحویل: تمرین‌های * دار تا ۹۶/۳/۴

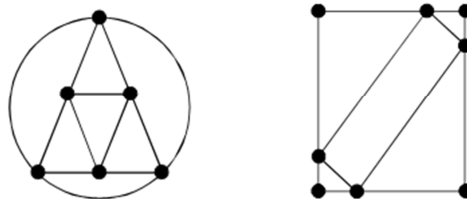
تمرین‌های ۱ تا ۱۲ از منبع زیر انتخاب شده‌اند:

Introduction to Graph Theory, 4th edition, Robin J. Wilson, Addison Wasaly Longman, 1998

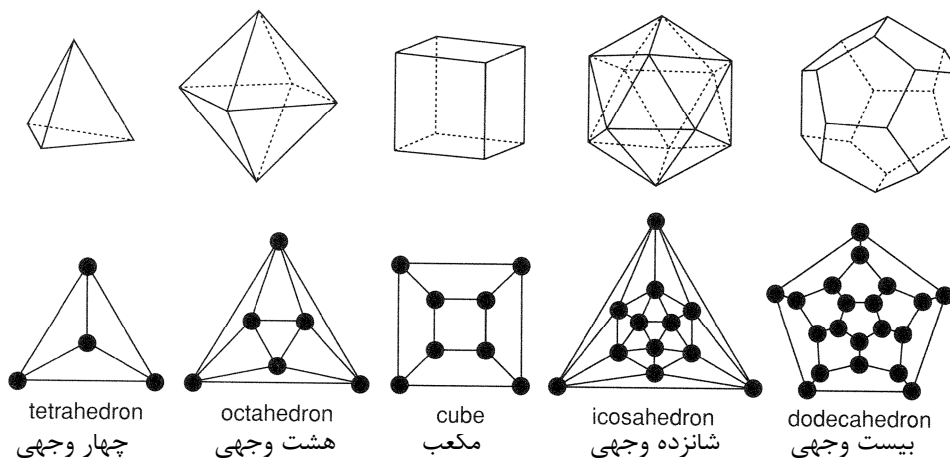
۱. * بررسی کنید دو گراف شکل زیر یکریختند.



۲. با ذکر دلیل نشان دهید گراف‌های زیر یکریخت نیستند.



۳. گراف همیلتنی گرافی است که دارای دوری باشد که از همه راس‌های گراف عبور می‌کند. گراف اویلری گرافی است که دارای گشت بسته ای باشد که از همه یال‌های گراف دقیقاً یک بار عبور می‌کند. ثابت می‌شود که یک گراف همبند اویلری است اگر و تنها اگر همه راس‌های آن درجه زوج داشته باشند.
* شکل زیر اجسام افلاطونی را نشان می‌دهد. مجموعه راس‌ها و یال‌های هر یک از این اجسام یک گراف تولید می‌کند که به گراف افلاطونی مشهور است. بررسی کنید کدام گراف‌ها همیلتونی و کدام گراف‌ها اویلری هستند.



tetrahedron
چهار وجهی

octahedron
هشت وجهی

cube
مکعب

icosahedron
شانزده وجهی

dodecahedron
بیست وجهی

۴. * در هریک از موارد زیر در صورت وجود، گرافی ارائه کنید. در صورتی که گراف وجود ندارد، دلایل خود را ذکر کنید.

الف) گراف دو بخشی افلاطونی

ب) گراف دوبخشی ۵-منظم (درجه همه راس‌های آن ۵ است)

پ) گراف کاملی که چرخ باشد.

ت) گراف ۳-منظمی که ۱۱ راس داشته باشد.

ث) گرافی به جز K_5 ، $K_{4,4}$ و Q_4 که ۴-منظم باشد.

۵. * گرافی که با متمم خود یکرخت باشد، خود متمم نام دارد.

الف) نشان دهید هر گراف خود متمم G دارای $4k$ یا $4k+1$ راس است که در آن k یک عدد صحیح نامنفی است.

ب) همه گراف‌های خود متمم با ۴ یا ۵ راس را بیابید.

پ) یک گراف خود متمم با ۸ راس بیابید.

۶. * گراف خطی $(line\ graph)\ L(G)$ از یک گراف ساده G گرافی است که راس‌های آن مجموعه یال‌های G هستند

و دو راس در $L(G)$ با هم مجاورند اگر و تنها اگر یال‌های متناظر با آنها در G با هم مجاور باشند.

الف) نشان دهید گراف‌های $K_3, K_{1,3}$ ، گراف‌های خطی یکسانی دارند.

ب) نشان دهید گراف خطی چهاروجهی افلاطونی، هشت وجهی است.

پ) ثابت کنید اگر G ، گرافی k -منظم باشد، آنگاه $L(G)$ گرافی $(2k-2)$ -منظم است.

۷. * نشان دهید در هر گروه متشکل از ۶ نفر، یا ۳ نفر وجود دارند که دو به دو یکدیگر را می‌شناسند، یا سه نفر وجود

دارند که دو به دو یکدیگر را نمی‌شناسند. آیا این وضعیت در هر گروه ۵ نفره صادق است؟ (عدد حاصل را عدد رمزی

می‌نامیم و با نماد $R(3,3)$ نشان می‌دهیم.)

۸. کمر یک گراف، طول کوچکترین دور در آن است. کمر گراف‌های زیر را به دست آورید.

K_9 ، $K_{5,7}$ ، Q_4 ، w_8 (آسیاب بادی ۸ پره)، گراف پیترسن (گراف تمرین ۱)، بیست وجهی افلاطونی

۹. * اگر G گرافی با مجموعه راس‌های $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ باشد، ماتریس مجاورت گراف G ماتریسی $n \times n$ است که

سطر و ستون i ام آن متناظر با راس v_i است و درایه ij در آن برابر با ۱ است اگر بین راس‌های v_i و v_j در G یال

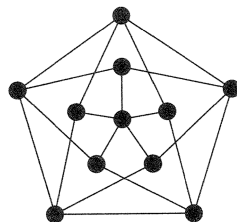
وجود داشته باشد و در غیر این صورت برابر با صفر است. معمولاً ماتریس مجاورت گراف G با A یا $A(G)$ نشان داده

می‌شود.

الف) برای هر i, j ، نشان دهید درایه ij در ماتریس A^2 برابر با تعداد مسیرهای به طول ۲ بین v_i و v_j است.

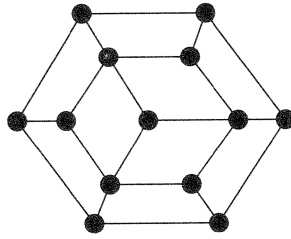
ب) نشان دهید درایه ii در ماتریس A^2 برابر با درجه راس v_i در گراف G است.

۱۰. نشان دهید گراف گراتزش ($Grötzsch$) نشان داده شده در شکل زیر همیلتنی است.



۱۱. * الف) ثابت کنید اگر G یک گراف دو بخشی با تعداد فرد راس باشد، آنگاه G همیلتنی نیست.

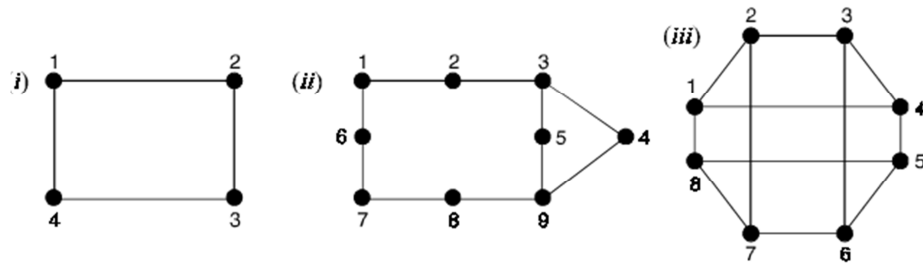
* ب) با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید گراف زیر همیلتنی نیست.



۱۲. * اثبات یا رد کنید:

- الف) اجتماع دو گشت متمایز بین u و v حتماً دارای یک دور است.
 ب) اجتماع دو مسیر متمایز بین u و v حتماً دارای یک دور است.

۱۳. * بررسی کنید آیا هر یک از گرافهای شکل زیر دوبخشی هستند. دلایل خود را ارائه کنید.



۱۴. * فرض کنید G گرافی مسطح با n راس باشد که هر وجه آن دارای k یال باشد. نشان دهید اگر e تعداد یالهای گراف باشد، آنگاه

$$e = \frac{k(n-2)}{k-2}.$$

۱۵. * فرض کنید G گرافی مسطح با دنباله درجات $2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5$ باشد. تعداد یالهای و وجههای این گراف را به دست آورید.