حل تمرین یک هفته پنجم درس نسبیت

الف) اگر معادلات خطی نباشند فرض همگنی نقض میشود. مثلاً فرض کنید که x' به مربع x بستگی داشته باشد، یعنی به صورت $x' = a_{11}x^2$ باشد. در این صورت فاصله بین دو نقطه در چارچوب پرایم دار به وسیله رابطهٔ

$$x'_2 - x'_1 = a_{11}(x_2^2 - x_1^2)$$

به مکان‌های این دو نقطه در چارچوب بدون پرایم مربوط خواهد شد. حال میله‌ای به طول واحد در x' را در نظر بگیرید. که نقاط انتهایی آن در $x_2 = 2$ و $x_1 = 1$ باشند، بنابراین $x'_2 - x'_1 = 3a_{11}$. ولی اگر نقاط انتهایی همین میله در $x_2 = 5$ و $x_1 = 4$ باشند خواهیم داشت $x'_2 - x'_1 = 9a_{11}$. یعنی اندازهٔ طول میله بستگی به مکان آن در فضا خواهد داشت. به همین طریق میتوان هر نوع بستگی غیرخطی به t را رد کرد زیرا بازهٔ زمانی دو رویداد نباید بستگی به اعدادی داشته باشد که عقربه‌های ساعت ناظر روی آنها میزان شده‌اند. بنابراین برای اینکه مبدأ مختصات فضا-زمانی (یا هر نقطه دیگر) نسبت به تمام نقاط دیگر رجحان نداشته باشد باید این روابط خطی باشند.

ب) زیرا در $t' = t = 0$، مبدأهای O و O' باید بر هم منطبق باشند یعنی در این زمان از $x = y = z = 0$ باید نتیجه شود $x' = y' = z' = 0$.

پ) از آن جا که برای $y = 0$ و $z = 0$ همیشه باید داشته باشیم $y' = 0$ و $z' = 0$، پس معادلات تبدیل برای y و z باید به شکل $y' = a_{22}y + a_{23}z$ و $z' = a_{32}y + a_{33}z$ باشند. (اگر y' یا z' به x یا t وابسته باشند به وضوح شرط فوق ارضا نمیشود.) در نتیجه ضرایب a_{21}، a_{24}، a_{31} و a_{34} باید همگی صفر باشند.

از آن جا که برای $z = 0$ همیشه باید داشته باشیم $z' = 0$ و هم چنین برای $y = 0$ باید به دست آید $y' = 0$، پس a_{23} و a_{32} صفرند و خواهیم داشت $z' = a_{33}z$ و $y' = a_{22}y$.

ت) از نظر ناظر S' طول میله برابر است با a_{22}، زیرا $y' = a_{22} \times 1 = a_{22}$.

وقتی میله در چارچوب ناظر پرایم دار ساکن است این ناظر باید همان طولی (طول واحد) را برای این میله اندازه بگیرد که ناظر بدون پرایم وقتی که میله نسبت به او ساکن است اندازه میگیرد. در غیر این صورت عدم تقارنی بین چارچوب‌ها وجود خواهد داشت که با اصل اول نسبیت در تضاد است. با وجود این، در این حالت، ناظر S طول میله را برابر با $\frac{1}{a_{22}}$ اندازه خواهد گرفت (زیرا در اینجا داریم: $y = (1/a_{22})y' = (1/a_{22}) \times 1$). اکنون به علت دو جانبه بودن این اندازه گیری‌ها طول، اولین اصل موضوع نسبیت ایجاب می‌کند که این اندازه گیری‌ها یکسان باشند، چون در غیر این صورت چارچوب‌ها از نظر فیزیک هم ارز نخواهند بود. در نتیجه باید داشته باشیم

$$a_{22} = \frac{1}{a_{22}} \Rightarrow a_{22} = 1$$

ش) t' به y و z بستگی ندارد زیرا در غیر این صورت ساعتهایی که در صفحهٔ yz نسبت به محور x به طور متقارن قرار گرفته‌اند (مثلاً در $y+$ و $y-$ یا در $z+$ و $z-$) از نظر ناظر S' با هم توافق نخواهند داشت و این مطلب با همسانگردی فضا متناقض است، در نتیجه $a_{42}=a_{43}=0$.

ج) انتظار داریم که $x'=a_{11}(x-vt)$ معادله تبدیل درستی باشد زیرا در این معادله از $x=vt$ همیشه نتیجه می‌شود $x'=0$. بنابراین خواهیم داشت:

$$x' = a_{11}x - a_{11}vt = a_{11}x + a_{14}t$$

از این رابطه نتیجه می‌شود: $a_{14}=-va_{11}$.

ج) اگر معادلات تبدیل (*) را در معادله (***) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$a_{11}^2(x-vt)^2+y^2+z^2=c^2(a_{41}x+a_{44}t)^2$$

که پس از مرتب کردن جمله‌ها خواهد شد

$$(a_{11}^2-c^2a_{41}^2)x^2+y^2+z^2-2(va_{11}^2+c^2a_{41}a_{44})xt=(c^2a_{44}^2-v^2a_{11}^2)t^2$$

برای اینکه این معادله با (**)، که هر دو یک چیز را بیان می‌کنند، مطابقت داشته باشد باید داشته باشیم:

$$\underline{1}\quad c^2a_{44}^2-v^2a_{11}^2=c^2$$

$$\underline{2}\quad a_{11}^2-c^2a_{41}^2=1$$

$$\underline{3}\quad va_{11}^2+c^2a_{41}a_{44}=0$$

ج)

$$a_{11}^2-c^2a_{41}^2=1 \xrightarrow{\times v} \left.\begin{array}{l} va_{11}^2-c^2va_{41}^2=v \\ va_{11}^2+c^2a_{41}a_{44}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2a_{41}(a_{44}+va_{41})=-v \quad (*)$$

$$a_{11}^2-c^2a_{41}^2=1 \xrightarrow{\times v^2} \left.\begin{array}{l} v^2a_{11}^2-c^2v^2a_{41}^2=v^2 \\ va_{11}^2+c^2a_{41}a_{44}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{44}+va_{41}=\frac{1}{a_{44}} \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} c^2a_{41}\left(\frac{1}{a_{44}}\right)=-v \Rightarrow \boxed{a_{41}=\frac{-v}{c}a_{44}} \quad (I)$$

$$a_{11}-c^2a_{41}^2=1 \xrightarrow{\times v^2} \left.\begin{array}{l} v^2a_{11}^2-c^2v^2a_{41}^2=v^2 \\ c^2a_{44}^2-v^2a_{11}^2=c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2a_{44}^2-c^2v^2a_{41}^2=v^2+c^2$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{44}^2-v^2a_{41}^2=1+\frac{v^2}{c^2}} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I,\,II)} a_{41} = -v/c^2\left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2} \quad , \quad a_{44} = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

$$\xrightarrow{(3)} a_{11} = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

ج) a_{11} باید مثبت باشد چون طبق فرض مسئله در $t=0$، اگر از دید S مختصه x رویداری مثبت باشد از دید S' هم مثبت است.
a_{44} باید مثبت باشد زیرا زمان رو به افزایش است و مثلاً در $x=0$، مثبت بودن t باید مثبت بودن t' نتیجه شود.

د) از نظر S چارچوب S' به سمت چپ حرکت می‌کند، درصورتی که از نظر S' چارچوب S به سمت راست حرکت میکند. اگر از معادلات لورنتس بدست آمده در قسمتهای قبل x، y، z و t را برحسب مختصات پرایم دار پیدا کنیم خواهیم داشت:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = z' \quad , \quad t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

که از نظر شکل با معادلات قبلی یکی شد با این تفاوت که، همان طور که انتظار می‌رفت، v به $-v$ تبدیل شده است.

ه)
$$v \ll c \Rightarrow v/c \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \simeq x - vt \\ t' = \dfrac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \simeq t \end{cases}$$

و)
$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) \qquad \Delta t' = \gamma(\Delta t - \beta/c\, \Delta x)$$

$$\Delta s'^2 = -c^2\Delta t'^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$

$$= -c^2\gamma^2(\Delta t - \beta/c\,\Delta x)^2 + \gamma^2(\Delta x - \beta c\Delta t)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

$$= -c^2\gamma^2\Delta t^2 - \beta c\gamma^2\Delta x^2 + 2\beta c\gamma^2\Delta x\Delta t + \gamma^2\Delta x^2 + \gamma^2\beta^2c^2\Delta t^2 - 2\gamma^2\beta c\Delta t\Delta x$$

$$+ \Delta y^2 + \Delta z^2 = -c^2\underbrace{(\gamma^2 - \gamma^2\beta^2)}_{1}\Delta t^2 + \underbrace{(\gamma^2 - \gamma^2\beta^2)}_{1}\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

$$= -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta s^2 \quad \checkmark$$

سؤال دوم:

این سؤال تلفیقی از مسئله‌ی (2.3) و (2.4) کتاب زیر است که حل آن در انتهای کتاب آمده است.
دانشجویانی که کتاب را ندارند می‌توانند به دفتر بنده مراجعه کرده و فایل آن را تحویل بگیرند:

Relativity, Gravitation and Cosmology , Ta-Pei Cheng

موفق باشید