حل تمرین های هفته سوم درس نسبیت

سؤال ۱ :

الف) $U=\{a\}$ ، $V=\{b,c,d,e,f\}$ $\Leftarrow$ $U\cap V=\phi$ و $U\cup V=X$.

ب) U و V چون خودشان عضو توپولوژی هستند بازند، از طرفی مکمل های آن ها هم عضو توپولوژی هستند پس بسته هم هستند.

پ) چون $\tau=P(\mathbb{R})$ است پس تمام زیرمجموعه های $\mathbb{R}$ با این توپولوژی باز هستند از طرفی مکمل هر زیرمجموعه ای هم در توپولوژی است. برای مثال با تعریف $U=\{1\}$ و $V:=\mathbb{R}-\{1\}$ نتیجه می گیریم $U\cap V=\phi$ و $U\cup V=\mathbb{R}$. پس $\mathbb{R}$ با توپولوژی گسسته یک فضای ناهمبند است.

ت) بله، تمام مجموعه ها در این توپولوژی هم باز هستند و هم بسته.

ث) خیر، نمی توان یافت. در واقع $\mathbb{R}$ همبند است.

ج) فقط ϕ و $\mathbb{R}$ هم باز و هم بسته هستند.

چ) طرف اول) میخواهیم ثابت کنیم اگر X همبند باشد فقط ϕ و X هم باز و هم بسته هستند.

فرض کنید بجز ϕ و X مجموعه دیگری مانند V وجود دارد که هم باز و هم بسته است. چون V بسته است پس مکمل آن باز است. تعریف می کنیم $U:=X-V$. در نتیجه برای دو مجموعه U و V داریم: $U\cap V=\phi$ و $U\cup V=X$. این یعنی دو مجموعه U و V در شرط جداسازی صدق می کنند و X همبند نیست که خلاف فرض است. در نتیجه بجز ϕ و $\mathbb{R}$ هیچ مجموعه دیگری هم باز و هم بسته نیست.

طرف دوم) میخواهیم ثابت کنیم اگر تنها زیرمجموعه های X که هم باز و هم بسته هستند ϕ و X باشند آن گاه X همبند است.

فرض کنید X ناهمبند باشد پس مجموعه های باز ناتهی U و V وجود دارند که شرط جداسازی را ارضا می کنند، یعنی $U\cap V=\phi$ و $U\cup V=X$. از این دو میتوان نتیجه گرفت که $U=X-V$.

اما از آن جا که V باز است پس مکمل آن بسته است $\Leftarrow$ U و V هم باز و هم بسته هستند که خلاف فرض است. بنابراین X باید همبند باشد.

سؤال ۲ :

الف) $\mathbb{R}-\{0\}$ باز است زیرا از اجتماع دو مجموعه باز تشکیل شده است $\mathbb{R}-\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\{0\}$ بسته است زیرا مکمل آن باز است.

ب) با متناظر کردن هر ماتریس $n\times n$ با هر سطر n^2 عضوی می‌توان فهمید که $M(n\times n,\mathbb{R})$ با $\mathbb{R}^{n^2}$ یکریخت است و چون $GL(n,\mathbb{R})$ زیرمجموعه‌ای از $M(n\times n,\mathbb{R})$ است می‌توان آن را زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^{n^2}$ هم در نظر گرفت.

پ) $GL(n,\mathbb{R})$ مجموعهٔ تمام ماتریس‌هایی است که دترمینان آن‌ها غیرصفر است بنابراین $GL(n,\mathbb{R}) = f^{-1}(\mathbb{R}-\{0\})$

ت) چون f پیوسته است پس به ازای هر U باز، $f^{-1}(U)$ هم باز است. بنابراین چون $\mathbb{R}-\{0\}$ باز است و $\det$ پیوسته است. $f^{-1}(\mathbb{R}-\{0\})$ باز است. پس با توجه به توضیحات ابتدای سؤال $GL(n,\mathbb{R})$ خمینه‌ای هموار است.

سؤال ۳ :

الف) شرکت‌پذیری: $e^{i\theta}(e^{i\phi}e^{i\psi}) = e^{i(\theta+(\phi+\psi))} = e^{i((\theta+\phi)+\psi)} = (e^{i\theta}e^{i\phi})e^{i\psi}$

عضو خنثی: $e^{0} e^{i\theta} = e^{i\theta}e^{0} = e^{i\theta}$

عضو وارون: $e^{i\theta}e^{2\pi-i\theta} = e^{2\pi-i\theta}e^{i\theta} = 1$

ب) $M(n\times n,\mathbb{R})$ گروه نیست زیرا اعضایی دارد که وارون ندارند. پس گروه لی هم نیست با عمل ضرب ماتریسی.

پ) $GL(n,\mathbb{R})$ گروه است، خمینه هموار هم هست، عمل ضرب و وارون گیری هم هموار است پس گروه لی است.