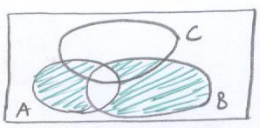
حل تمرین های هفته دوم درس نسبیت

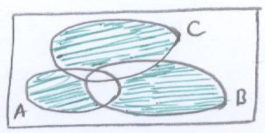
سؤال ۱:

الف) $A \Delta B \in P(X) \quad \forall A, B \in P(X)$ ، بنابراین Δ عمل دوتایی و $(P(X), \Delta)$ گروه واره است.

ب) انتظار از شما صرفاً بررسی این تساوی با استفاده از نمودار ون است:

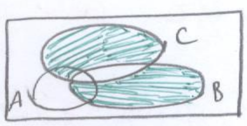


$A \Delta B$

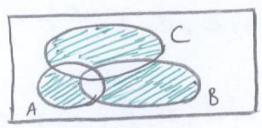


$(A \Delta B) \Delta C$

$$\Rightarrow (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$



$B \Delta C$



$A \Delta (B \Delta C)$

Δ روی $P(X)$ شرکت پذیر است و بنابراین $(P(X), \Delta)$ نیم گروه است.

پ) $E = \phi$ زیرا: $\forall A \in P(X) \; ; \; A \Delta \phi = \phi \Delta A = A$

بنابراین $(P(X), \Delta)$ تکواره است.

ت) برای هر $A \in P(X)$ ، $A^{-1} = A$ است زیرا: $A \Delta A = \phi$. بنابراین $(P(X), \Delta)$ گروه است.

ث) یک گروه آبلی است: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (B \cup A) - (B \cap A) = B \Delta A$

ج) 1) $(P(X), \cap)$ یک گروه واره است: $\forall A, B \in P(X) \; ; \; A \cap B \in P(X)$

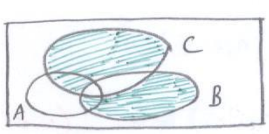
2) $(P(X), \cap)$ یک نیم گروه است: $\forall A, B, C \in P(X) \; ; \; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3) $(P(X), \cap)$ یک تکواره است با عضو همانی $E = X$: $\forall A \in P(X) \; ; \; A \cap X = X \cap A = A$

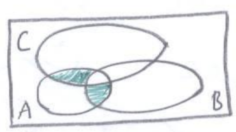
4) $(P(X), \cap)$ گروه نیست زیرا مثلاً ϕ وارون ندارد.

5) $(P(X), \cap)$ آبلی است: $A \cap B = B \cap A$ اما گروه آبلی نیست.

چ)



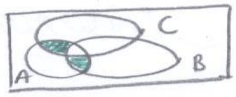
$B \Delta C$



$A \cap (B \Delta C)$

$$\Rightarrow A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

$A \cap B$, $A \cap C$



$(A \cap B) \Delta (A \cap C)$

رابطه بعدی هم به طریق مشابه بررسی میشود.

ح) $(P(X),\Delta)$ گروه آبلی و $(P(X),\cap)$ نیم گروه است بنابراین $(P(X),\Delta,\cap)$ حلقه است.

خ) این حلقه یک دار است زیرا $(P(X),\cap)$ دارای عضو همانی است.
این حلقه، حلقه تقسیم نیست چون بجز X بقیه اعضای $(P(X),\cap)$ عضو وارون ندارند.

د) برای اینکه $(P(X),\Delta,\cap)$ میدان باشد باید $(P(X),\cap)$ گروه آبلی باشد که نیست! بنابراین میدان نیست.

سؤال ۲:

الف) به سادگی بررسی میشود که اجتماع اعضای τ عضو τ هستند.

ب) $\{a,c,f\}\cap\{b,c,d,e,f\}=\{c,f\}\notin\tau$

پ) $\tau=\{\phi, X, \{a\}, \{f\}, \{a,f\}, \{a,c,f\}, \{b,c,d,e,f\}, \underline{\{c,f\}}\}$
اضافه شده

ت) $\{a\}\in\tau$ و $X-\{a\}=\{b,c,d,e,f\}\in\tau \Rightarrow \{a\}$ هم باز و هم بسته است.
$\{c,f\}\in\tau$ و $X-\{c,f\}\notin\tau \Rightarrow \{c,f\}$ باز است.
$\{a,e\}\notin\tau$, $X-\{a,e\}\notin\tau \Rightarrow \{a,e\}$ نه باز و نه بسته است.

سؤال ۳:

الف) $\mathbb{R}$ و ϕ عضو این گردایه هستند.
باید ثابت کنیم اشتراک متناهی تا از اعضای τ عضو τ است:

if $n_1\le n_2 \Rightarrow [n_1,\infty)\cap[n_2,\infty)=[n_2,\infty)\in\tau$

چون اشتراک هر دو عضو τ به فرم $[n,\infty)$ است به سادگی نتیجه می‌شود اشتراک متناهی تا از اعضای τ هم به همین فرم است.

درنهایت باید ثابت کنیم اجتماع دلخواهی از اعضای τ عضو τ است:

$A_{n_i}:=[n_i,\infty)\in\tau$ اگر $\{n_i\mid n_i\in\mathbb{Z}\}$ دارای کمینه باشد: $\bigcup A_{n_i}=[\min\{n_i\},\infty)\in\tau$

اگر $\{n_i\mid n_i\in\mathbb{Z}\}$ دارای کمینه نباشد: $\bigcup A_{n_i}=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}\in\tau$

ب) $\mathbb{R}-(-\infty,0)=[0,\infty)\in\tau$ ، از آن جا که $[0,\infty)$ باز است مکمل آن بسته است.

پ) $(-\infty,0)$ باز است زیرا حول هر نقطه آن گوی بازی مانند (a,b) وجود دارد که تماماً در $(-\infty,0)$ است.