حل تمرین‌های هفتهٔ اول درس نسبیت

سؤال ۱ :

الف) فرض کنید x_1 و x_2 دو جواب معادله $a*x=b$ در G باشند. بنابراین :

$$a*x_1 = b = a*x_2$$

$$\Rightarrow \quad a^{-1}*(a*x_1) = a^{-1}*(a*x_2)$$ (هر عضو گروه عضو وارون دارد.)

$$\Rightarrow \quad (a^{-1}*a)*x_1 = (a^{-1}*a)*x_2$$ (خاصیت شرکت‌پذیری گروه)

$$\Rightarrow \quad e*x_1 = e*x_2$$ (هر گروه عضو همانی دارد)

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_1 = x_2}$$

فرض اینکه معادله $a*x=b$ دو جواب دارد به برابر بودن جوابها منجر شد. بنابراین این معادله جواب یکتا دارد.
این گزاره در مورد معادله $y*a=b$ هم به طریق مشابه اثبات می‌شود.

ب) با توجه به اینکه "هر عضو یک گروه متناهی دقیقاً یک بار در هر سطر و دقیقاً یک بار در هر ستون ظاهر می‌شود" به سادگی قابل بررسی است.

ج) برای گروه سه عضوی نگاشت $\begin{cases} e \to 0 \\ a \to 1 \\ b \to 2 \end{cases}$ یک نگاشت دوسویه است که جدول گروه سه عضوی قسمت "ب" را به جدول گروه ($\mathbb{Z}_3$ و $\oplus_3$) منطبق می‌کند. بنابراین این نگاشت یکریختی است (زیرا دوسویه است و جداول را بهم می‌نگارد. دقت کنید این جدولها نمایانگر عمل گروه‌ها هستند بنابراین حفظ شدن ساختار کلی جدول یعنی حفظ شدن عمل گروه) و این دو گروه با هم یکریخت هستند.

به طور مشابه برای گروه‌های ۱ و ۲ عضوی هم ثابت میشود.

نتیجه اینکه: در حد یکریختی فقط یک گروه ۱، ۲ و ۳ عضوی وجود دارد.

د) انتخاب‌هایی که برای جایگاه "؟" وجود دارد: c و a و b. با استدلالی مشابه قسمت "ب" جدولهای ۱، ۲ و ۳ بدست می‌آیند:

هـ) کامل شده جدولهای ۱ و ۲ :

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

(۱)

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

(۲)

جدول ۳ به دو صورت زیر کامل میشود :

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(۳)

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

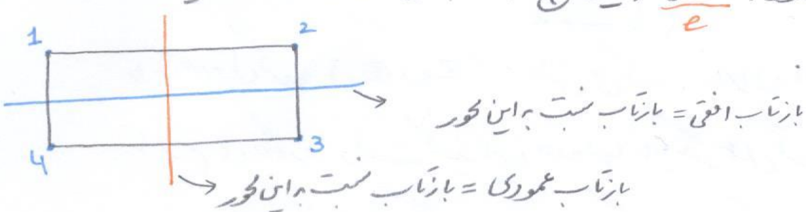
(۴)

به آسانی می توانید بررسی کنید که با تعویض نقشهای b و c در جدول (۲) جدول (۱) به دست می آید. هم چنین اگر در جدول (۴) نقش a و b را با هم عوض کنیم همان جدول (۱) به دست می آید. در نتیجه جدولهای (۱)، (۲) و (۴) اساساً یکسان هستند. بنابراین تنها دو جدول (۱) و (۳) می مانند که هیچ تعویض نام عضوهای G این دو جدول را به یکدیگر تبدیل نمی کند. نکته قابل توجه دیگر این است که با تغییر نامهای e به 0، a به 1، b به 2 و c به 3 جدول (۱) با جدول گروه ($\mathbb{Z}_4$ و $\oplus_4$) که در زیر داده شده است یکسان می شود :

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

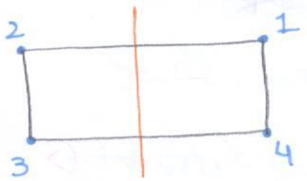
به عبارت دیگر تنها دو نوع گروه چهار عضوی داریم : یکی گروه متناظر با جدول کیلی (۱) که همان گروه ($\mathbb{Z}_4$ و $\oplus_4$) است و دیگری گروه نظیر جدول کیلی (۳) که همان گروه چهارتایی کلاین (K_4) است.

۶) گروه تقارنهای مستطیلی که مربع نیست چهار عضو دارد : $\underbrace{\text{همانی}}_{e}$ (یعنی هیچ بازتاب یا دورانی صورت نگیرد)، $\underbrace{\text{بازتاب عمودی}}_{a}$، $\underbrace{\text{بازتاب افقی}}_{b}$، $\underbrace{\text{دوران ۱۸۰ درجه}}_{c}$.

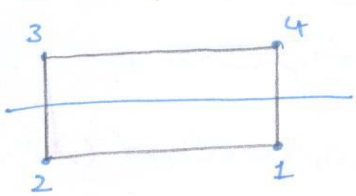


اگر اعضای این گروه چهار عضوی را به ترتیب با e، a، b و c نمایش دهیم، به عنوان مثال از ترکیب a و b، عضو c حاصل می شود، به این صورت که :

۱- بازتاب عمودی را اعمال می کنیم، تحت این کار مستطیل فوق به شکل روبرو در می آید. (a)



۲- سپس روی مستطیل به دست آمده در قسمت ۱ بازتاب افقی را اعمال می کنیم :



۳- مشاهده میکنید که مستطیل به دست آمده با اعمال دوران ۱۸۰ درجه روی مستطیل ابتدایی یکسان است بنابراین : $a*b=c$.

به صورت مشابه با ترکیب اعضای دیگر گروه تقارنهای مستطیل مشاهده میکنید که این گروه همان K_4 است.

حاصل کلام : در حد یکریختی تنها ۱ گروه ۱، ۲ و ۳ عضوی وجود دارد، اما دو گروه غیر یکریخت ۴ عضوی.

سؤال ۲:

هدف اصلی این سؤال بررسی این موضوع بود که آیا شما تفاوت هم‌ریختی و یکریختی را به درستی متوجه شده‌اید یا خیر. دقت کنید همانطور که در کلاس هم توضیح داده شد عبارت "دو گروه هم‌ریخت هستند" اساساً بی‌معنی است. ما فقط می‌توانیم بگوییم که آیا یک نگاشت خاص هم‌ریختی است یا خیر. اما در مورد یکریختی داستان فرق می‌کند، اگر بتوانیم نگاشتی بیابیم که یکریختی باشد (دقت کنید ممکن است نگاشتی که یکریختی را تضمین می‌کند آن نگاشتی نباشد که در صورت سؤال از ما خواسته شده هم‌ریختی بودن آن را بررسی کنیم) آن‌گاه می‌توانیم بگوییم دو گروه یکریخت هستند. در این سؤال انتظار ما از شما این بود که اولاً بتوانید به سادگی هم‌ریختی بودن نگاشت‌های داده شده را بررسی کنید و ثانیاً به این نکته اشاره کنید که صرف اینکه نگاشت خاص داده شده در صورت سؤال شرایط یکریختی را ارضا نمی‌کند نمی‌توان در مورد یکریخت بودن یا نبودن دو گروه نظر داد. همین!

الف) نگاشت ϕ هم‌ریختی است زیرا: $\phi(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = \phi(A)\phi(B)$

این نگاشت یک به یک نیست، بنابراین خود این نگاشت نمی‌تواند در اینجا نقش یکریختی را بازی کند. یک به یک نبودن این نگاشت دلیلی بر این موضوع نیست که این دو گروه غیر یکریخت هستند.

(صرفاً برای علاقه‌مندان و کنجکاوان: این دو گروه یکریخت نیستند، برای اطلاعات بیشتر می‌توانید قضایای یکریختی گروه‌ها را مطالعه کنید که تضمین می‌کند: $GL(n,\mathbb{R}) \simeq SL(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$)

ب) خیر هم‌ریختی نیست زیرا: $\phi(AB) = \det(AB) \neq \det(A) + \det(B) = \phi(A) + \phi(B)$

(صرفاً برای علاقه‌مندان و کنجکاوان: این دو گروه یکریخت نیستند، باز هم به دلیل قسمت الف)

ج) بله هم‌ریختی است زیرا:

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g$$

(صرفاً برای علاقه‌مندان و کنجکاوان: این دو گروه یکریخت نیستند، زیرا عدد اصلی (Cardinal) مجموعهٔ $F(\mathbb{R})$، $2^{2^{\aleph_0}}$ است در حالیکه عدد اصلی $diff(\mathbb{R})$، $2^{\aleph_0}$ است (که در آن $\aleph_0$ نماد عدد اصلی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ است) و چون عدد اصلی این دو مجموعه یکی نیست پس هیچ نگاشت دوسویه‌ای نمی‌توان بین آن‌ها پیدا کرد.)

سؤال ۳ :

باید هر ۴ ویژگی گروه را بررسی کنیم :

$g_u , g_{u'} \in G$

۱) بسته بودن :

$$(g_u \circ g_{u'})\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = g_u \begin{pmatrix} x - u't \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-u't)-ut \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-(u+u')t \\ t \end{pmatrix} = g_{u+u'}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \boxed{g_u \circ g_{u'} = g_{u+u'}} \in G \quad \checkmark$$

۲) شرکت پذیری :

$$g_u \circ (g_{u'} \circ g_{u''}) \overset{\text{با استفاده از } (*)}{=} g_u \circ g_{(u'+u'')} \overset{(*)}{=} g_{u+(u'+u'')} \overset{\text{شرکت پذیری } \mathbb{R}}{=} g_{(u+u')+u''} \overset{(*)}{=} g_{(u+u')} \circ g_{u''}$$

$$\overset{(*)}{=} (g_u \circ g_{u'}) \circ g_{u''}$$

۳) عضو همانی : ادعا می کنیم g_0 عضو همانی است :

$$g_0 \circ g_u \overset{*}{=} g_{0+u} = g_u \quad , \quad g_u \circ g_0 \overset{(*)}{=} g_{u+0} = g_u$$

۴) عضو وارون : ادعا می کنیم برای هر g_u ، $(g_u)^{-1} = g_{-u}$ زیرا :

$$g_u \circ g_{-u} \overset{*}{=} g_{u+(-u)} = g_0 \quad , \quad g_{-u} \circ g_u \underset{*}{=} g_{(-u)+u} = g_0$$

موفق باشید