باسمه تعالی

تمرین‌های هفتهٔ سوم درس نسبیت

نام و نام خانوادگی:

مهلت تحویل: ۰۹/اسفند/۱۳۹۴

نمرهٔ تمرین‌ها بر اساس نوع نگاه شما به مسئله و چگونگی حل آن متغیر خواهد بود. کم‌ترین نمره به پاسخ‌های اصطلاحاً Copy-paste ای اختصاص می‌یابد!

۱- تعریف همبندی برای یک فضای توپولوژیک کاملاً طبیعی است. فضایی را «جدا شده» گوییم در صورتی که بتوان آن را به دو تکه (یعنی دو مجموعهٔ باز از هم جدا) تقسیم کرد. در غیر این صورت، آن فضا را **همبند** خوانند.

تعریف: فرض کنید X فضایی توپولوژیک باشد. **جداسازی‌ای** از X عبارت است از زوج U و V از زیرمجموعه‌های باز ناتهی به طوری که $U \cap V = \emptyset$ و $U \cup V = X$. فضای X را در صورتی **همبند** خوانند که برای آن هیچ جداسازی‌ای وجود نداشته باشد.

آشکار است که همبندی خاصیتی توپولوژیکی است، زیرا تماماً برحسب گردایهٔ مجموعه‌های باز X بیان شده است. به عبارت دیگر، اگر X همبند باشد آن‌گاه هر فضای همسان‌ریخت (homeomorphic) با آن نیز همبند است.

الف) توپولوژی‌ای را که در قسمت «پ» سوال ۲ تمرین‌های هفته دوم به دست آوردید در نظر بگیرید. با یافتن دو زیرمجموعهٔ ناتهی و باز از X مانند U و V به طوری که $U \cap V = \emptyset$ و $U \cup V = X$ ، نتیجه بگیرید که این فضای توپولوژیک ناهمبند است.

ب) نشان دهید مجموعه‌های باز U و V ای که در قسمت «الف» به دست آوردید بسته هم هستند.

پ) مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را با توپولوژی گسسته در نظر بگیرید. (توپولوژی گسسته: $\tau_{discrete} = P(\mathbb{R})$)

آیا می‌توانید دو مجموعهٔ ناتهی و باز بیابید که اشتراکشان تهی و اجتماعشان $\mathbb{R}$ باشد؟ به عبارت دیگر آیا $\mathbb{R}$ را با توپولوژی گسسته همبند است؟

ت) در فضای توپولوژیک قسمت «پ» آیا مجموعه‌ای وجود دارد که هم باز و هم بسته باشد؟

ث) مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را با توپولوژی استاندارد در نظر بگیرید. آیا می‌توانید دو مجموعهٔ ناتهی و باز بیابید که اشتراکشان تهی و اجتماعشان $\mathbb{R}$ باشد؟ به عبارت دیگر آیا $\mathbb{R}$ را با توپولوژی استاندارد همبند است؟

ج) در فضای توپولوژیک قسمت «ث» آیا مجموعه‌ای وجود دارد که هم باز و هم بسته باشد؟

چ) **قضیه:** فضای توپولوژیک X همبند است اگر و فقط اگر تنها زیرمجموعه‌های X که در X هم باز و هم بسته‌اند مجموعهٔ تهی و خودِ X باشند.

قضیه فوق را ثابت کنید.

۲- به سادگی می‌توان ثابت کرد که اگر M یک خمینهٔ هموار باشد هر زیرمجموعهٔ باز آن هم خمینه‌ای هموار است. (علاقه‌مندان می‌توانند برای مطالعهٔ اثبات به کتاب‌های هندسه منیفلد مراجعه کنند.) به عنوان مثال کره یک خمینهٔ هموار است بنابراین نیم‌کرهٔ شمالی که زیرمجموعهٔ بازی از کره است نیز خمینهٔ هموار است.

الف) مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را با توپولوژی استاندارد در نظر بگیرید. مشخص کنید در این فضای توپولوژیک مجموعهٔ تک عضوی $\{0\}$ باز، بسته، هم باز و هم بسته یا نه باز و نه بسته است؟ مجموعهٔ $\mathbb{R} - \{0\}$ چطور؟

ب) فرض کنید $GL(n,\mathbb{R})$ مجموعهٔ همه ماتریس‌های $n \times n$ وارون‌پذیر با درایه‌های حقیقی باشد که زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ تمام ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های حقیقی (یعنی $M(n \times n\,,\mathbb{R})$) است. چرا می‌توان $GL(n,\mathbb{R})$ را به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^{n^2}$ هم در نظر گرفت؟

پ) نگاشت پیوسته $f: M(n \times n\,,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $f(A) = \det A$ در نظر بگیرید. دلیل بیاورید که چرا گزارهٔ $f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}) = GL(n,\mathbb{R})$ صحیح است؟

ت) با توجه به پیوسته بودن نگاشت f استدلال کنید که چرا $GL(n,\mathbb{R})$ زیرمجموعهٔ بازی از $M(n \times n\,,\mathbb{R})$ است؟ بنابراین می‌توان $GL(n,\mathbb{R})$ را به عنوان زیرمجموعهٔ بازی از $\mathbb{R}^{n^2}$ در نظر گرفت. با توجه به توضیحات ابتدایی این سوال، آیا $GL(n,\mathbb{R})$ خمینه‌ای هموار است؟

۳- **تعریف: گروه لی**، خمینه‌ای هموار مانند G است که مجهز به ساختار گروه هم باشد، با این ویژگی که عمل گروه و وارون‌گیری از اعضای گروه نگاشت‌هایی هموار باشند.

الف) دایرهٔ واحد روی صفحهٔ اعداد مختلط را در نظر بگیرید $S^1 = \{e^{i\theta} | \theta \in [0,2\pi)\}$. نشان دهید S^1 با عمل $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$ تشکیل گروه می‌دهد.

در واقع S^1 علاوه بر اینکه گروه است یک خمینهٔ هموار ۱ بعدی است و عمل گروه و وارون‌گیری از اعضای آن نیز به وضوح هموار است و بنابراین یک گروه لی است که آن را با $U(1)$ نمایش می‌دهند. $U(1)$ نقش مهمی در مطالعهٔ فیزیک ذرات بنیادی و نظریهٔ میدان‌های کوانتومی ایفا می‌کند.

فرض کنید می‌دانیم عمل‌های ضرب ماتریسی و وارون‌گیری (در صورتی که وارون وجود داشته باشد) هموار هستند با توجه به سوال ۲ با بیان دلیلی کوتاه مشخص کنید:

ب) آیا $M(n \times n\,,\mathbb{R})$ گروه لی است؟

پ) آیا $GL(n,\mathbb{R})$ گروه لی است؟

موفق باشید. شجاعی