

۱- الف) آیا توابعی که در نقاط پایانی $x = 0$ و $x = L$ صفر می‌شوند فضای برداری تشکیل می‌دهند؟

ب) توابعی تناوبی که در آنها $f(0) = f(L)$ است چگونه؟

ج) توابعی که از $f(0) = 4$ پیروی می‌کنند چگونه؟ دلایل خود را بنویسید.

۲- الف) با توجه به بسط $e^{\alpha \hat{A}}$ ثابت کنید:

$$e^{-i\hat{A}} B e^{i\hat{A}} = \hat{B} - i[\hat{A}, \hat{B}] - \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!} [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots$$

ب) رابطه‌ی بالا را در حالتی که $[\hat{A}, \hat{B}] = \text{const.}$ باشد بدست آورید.

ج) با در نظر گرفتن $\hat{A} = \hat{P}$ و $\hat{B} = \hat{x}$ ، که در آن P عملگر اندازه حرکت و x عملگر مکان می‌باشد، رابطه را بازسازی کنید.

$$(e^{\alpha \hat{A}} = I + \alpha \hat{A} + \frac{\alpha^2}{2!} \hat{A}^2 + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} \hat{A}^n + \dots)$$

۳- الف) برای سه ماتریس زیر یک ویژه پایه‌ی یکامتعامد (orthonormal) پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ب) برای چه مقادیری از α ماتریسهای زیر وارون پذیر هستند؟ وارونه‌ی آنها را بدست بیاورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

۴- ذراتی دو حالته (برای مثال دارای حالت پایه و برانگیخته) را در نظر بگیرید که هر یک از حالت‌های پایه و برانگیخته را با دو زیرحالت متعامد $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ نمایش می‌دهیم. سیستمی در حالت‌های $|\psi_0\rangle$ و $|\psi_1\rangle$ با استفاده از این دو زیرحالت بصورت زیر آماده میشود:

$$|\psi_1\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle$$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

الف) احتمال اینکه سیستم در حالت $|\psi_1\rangle$ آماده شده باشد و ذره در حالت پایه باشد چقدر است؟

دستگاهی داریم که می‌تواند هر یک از دو حالت $|\psi_0\rangle$ و $|\psi_1\rangle$ را برای ما آماده کند. فرض کنید از هر ۱۰۰ حالتی که دستگاه بدست می‌دهد ۹۵ حالت $|\psi_1\rangle$ و تنها ۵ حالت $|\psi_0\rangle$ باشند. ماتریس چگالی احتمال را با استفاده از رابطه‌ی

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

میتوان نوشت، که P_i ها احتمال مربوط به هر $|\psi_i\rangle$ است.

ب) ماتریس چگالی احتمال را برای سیستم بالا بدست بیاورید

ج) عناصر قطری ماتریس چگالی نماینده‌ی چه چیزی هستند؟

د) مقدار $\text{tr } \hat{\rho}$ چند است؟ با توجه به اینکه تریس نسبت به تبدیلات یکانی ناورداست، دلیل پیدایش این عدد را توضیح دهید.

۵- عملگر تصویر روی خط $y = x$ را در صفحه‌ی xy بدست آورید.