بسم الله الرحمن الرحیم

۹۹,۴,۲۱

فصل دهم: گروه SU(n)

- تعمیم گروه های متعامد به فضای اعداد مختلط: گروه های یکانی: $O^T O = I \Rightarrow U^\dagger U = I$

- در حالت کلی یک ماتریس n×n با درایه های مختلط $2n^2$ پارامتر (حقیقی) دارد. گروه U(n): $2n^2 - 2\binom{n}{2} - n = n^2$

$0+i0$

تمرین ۱٫۱: نشان دهید U(n) یک گروه است.

- دترمینان U(n): $1 = \det I = \det(U^\dagger U) = (\det U)^* \det U = |\det U|^2$

$\Rightarrow \det U = e^{i\alpha}$ SU(n) $\det U = 1$

تمرین ۱٫۲: نشان دهید SU(n) یک زیرگروه نرمال U(n) است و n^2-1 پارامتر مستقل دارد.

تمرین ۱٫۳: نشان دهید گروه SU(1) همان گروه بدیهی (تک عضوی) است.

تمرین ۱٫۴: نشان دهید توپولوژی گروه U(1)، S^1 است.

تمرین ۱٫۵: نشان دهید det یک همریختی است.

تمرین ۱٫۶: نشان دهید U(1) یک زیرگروه U(n) است. در چه صورت این زیرگروه نرمال است؟

مثال: SU(2):

$U \in SU(2)$ $U^\dagger = U^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{1}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a^* = d \\ b^* = -c \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ $|a|^2 + |b|^2 = 1$

$\Longrightarrow \begin{matrix} a = w + iz \\ b = x + iy \end{matrix}$ $x, y, z, w \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$

S^3 in $\mathbb{R}^4$

$w = \cos\psi$
$z = \sin\psi \cos\theta$
$x = \sin\psi \sin\theta \cos\varphi$
$y = \sin\psi \sin\theta \sin\varphi$

$0 \le \psi, \theta \le \pi$
$0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\begin{pmatrix} \cos\psi + i\sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta e^{i\varphi} \\ -\sin\psi\sin\theta e^{-i\varphi} & \cos\psi - i\sin\psi\cos\theta \end{pmatrix}$$

$U \in U(2)$ $\begin{cases} a^* e^{i\alpha} = d \\ b^* e^{i\alpha} = -c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\overbrace{a e^{-i\alpha/2}}^{u})^* = d e^{-i\alpha/2} \\ (\underbrace{b e^{-i\alpha/2}}_{v})^* = -c e^{-i\alpha/2} \end{cases}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u e^{i\alpha/2} & v e^{i\alpha/2} \\ -v^* e^{i\alpha/2} & u^* e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\quad) = (|u|^2 + |v|^2) e^{i\alpha} = e^{i\alpha} \Rightarrow |u|^2 + |v|^2 = 1$

$\begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & u \end{pmatrix} \in SU(2) \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & u \end{pmatrix}}_{\in SU(2)} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix}}_{\in U(1)}$

$U(n) = U(1) \otimes SU(2) \rightarrow U(n) = U(1) \otimes \frac{SU(2)}{Z_2}$

$0 \le \alpha/2 \le 2\pi \Rightarrow 0 \le \alpha \le 4\pi$

$S^1 \times S^3$ $S^1 \times \mathbb{R}P^3$

نکته: هر عضو گروه U(n) قابل تفکیک به یک عضو U(1) و یک عضو SU(n) است. $U(n) = \left(\frac{SU(n)}{Z_n}\right) \otimes U(1)$

تمرین ویژه: مثال بالا را به طور کامل برای $U(3)$ و $SU(3)$ انجام دهید.

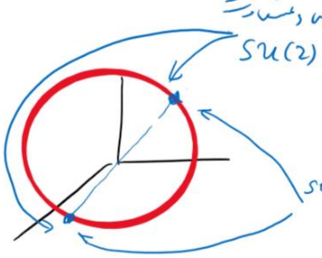
تمرین ۱۰,۷: حجم گروه $SU(2)$ را حساب کنید.

تمرین ۱۰,۸: آیا گروه $SU(2)$ فشرده است؟

نمایش معرف گروه‌های $SU(n)$، دقیقاً شبیه $SO(n)$، نمایش برداری گروه است؛ یعنی گروه چگونه بر یک فضای برداری n بعدی عمل می‌کند. تنها تمایز جدی، این است که فضای برداری مورد نظر به جای $\mathbb{R}^n$، $\mathbb{C}^n$ است. یعنی بردار دارای مؤلفه‌های مختلط است و در مجموع n مؤلفه مختلط $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ (و یا در واقع $2n$ مؤلفه حقیقی) دارد.

* تمرین ۱۰,۹: نشان دهید نمایش معرف گروه $SU(2)$، شبه حقیقی است.

نکته جالب: دیدیم که $SU(2)$ را می‌توان به صورت یک سطح کروی سه بعدی در فضای $\mathbb{R}^4$ تصور کرد؛ هر نقطه این سطح هم‌ارز با یک نقطه (یا یک عضو) $SU(2)$ است. از طرف دیگر دیدیم سطح سه بعدی فوق، وقتی نقاط انتهای قطر، دو به دو با هم یکسان‌سازی شوند ($\mathbb{R}P^3$)، نمایش هندسی $SO(3)$ را می‌دهد. پس هر دو نقطه روی این سطح، هم‌ارز با یک عضو $SO(3)$ هستند. این یعنی به ازای هر عضو $SO(3)$، دو عضو $SU(2)$ وجود دارد و اصطلاحاً $SU(2)$ یک پوشش دولایه (Double Cover) بر روی $SO(3)$ دارد.



شکل با یک بعد کم‌تر

قرارداد مهم در نوتاسیون

وقتی در مورد گروه‌هایی صحبت می‌کنیم که فضای برداری معرف نمایش آن‌ها مختلط است، دیگر ترانهادن، یک عمل طبیعی برای ماتریس‌های نمایش گروه نیست. به جای آن عمل هم‌زمان «ترانهادن + مختلط‌سازی درایه‌ها» یک عمل طبیعی است.

در این حالت برای بردار $\phi^i = \begin{pmatrix}\phi^1\\ \phi^2 \\ \vdots\\ \phi^n\end{pmatrix}$ به صورت $(\phi^i)^\dagger = (\phi^T)^{*i} = (\phi^{1*}, \phi^{2*}, \ldots, \phi^{n*})$ را داریم.

قرارداد مهم جهت سادگی در روابط: $\phi_i \equiv (\phi^T)^{i*} = (\phi^\dagger)^i$ (نمایه بالا را پادوردا (Contravariant) و نمایه پایین را هم‌وردا (Covariant) هم در ادامه می‌نامیم.)

این یک قرارداد جدی است و عدم پایبندی به آن تبعات دارد؛ اندیس‌ها نقش درایه‌ها را در فضای مختلط بازی می‌کنند.

با این قرارداد، تقریباً شبیه حالت $SO(3)$، برای تنسورهای مختلف، در رتبه‌های مختلف داریم:

(تعداد نمایه‌های بالا را p و پایین را q و در مجموع رتبه تنسور را (p,q) نمایش می‌دهیم.)

$\phi' = \phi$ اسکالر (بدون نمایه) $(0,0)$

(1,0) بردار پادوردا $V'^i = U^i{}_j \underbrace{V^j}_{\text{جمع روی } j}$ $\Longrightarrow (V'^i)^\dagger = (U^i{}_j V^j)^\dagger = (UV)^{\dagger\, i} = (V^\dagger U^\dagger)^i$

$= V_j (U^\dagger)^j{}_i$

(0,1) بردار هم‌وردا $V'_i = (U^\dagger)^j{}_i V_j$

نکته: جالب است به نظر بیاید لازم نیست در بردار هم‌وردا علامت † را قرار دهیم؛ سر $U^\dagger$ خودش یک عضو گروه $SU(n)$ است.

علت نوشتن این گونه، برای یادآوری حفظ طول بردار توسط تبدیلات یکانی است:

$$\langle V'|V'\rangle = \langle V|U^\dagger U|V\rangle = \langle V|\underbrace{(U^\dagger U)}_{I}|V\rangle = \langle V|V\rangle$$

$$V'_i V'^i = V_j (U^\dagger)^j{}_i U^i{}_k V^k = V_j (U^\dagger U)^j{}_k V^k = V_j \delta^j{}_k V^k = V_j V^j$$

(2,0) تانسور مرتبه ۲ پادوردا $T'^{ij} = U^i{}_k U^j{}_l T^{kl}$

(0,2) تانسور مرتبه ۲ هم‌وردا $T'_{ij} = (U^\dagger)^k{}_i (U^\dagger)^l{}_j T_{kl}$

(1,1) تانسور مرتبه $T'^i{}_j = U^i{}_k (U^\dagger)^l{}_j T^k{}_l$

(p,q) تانسور مرتبه $T'^{i_1\dots i_p}{}_{j_1\dots j_q} = U^{i_1}{}_{k_1}\cdots U^{i_p}{}_{k_p} (U^\dagger)^{l_1}{}_{j_1}\cdots (U^\dagger)^{l_q}{}_{j_q} T^{k_1\dots k_p}{}_{l_1\dots l_q}$

نکته: از این جا به بعد تانسورهای داخل فضای مختلط را با $\varphi^{i_1\dots i_p}{}_{j_1\dots j_q}$ نمایش می‌دهیم.

مفهوم رد

برای مثال $\varphi^{ij}{}_k$ را در نظر بگیرید. $\delta^{ij}\varphi^{ij}{}_k$ و $\delta^k{}_i\varphi^{ij}{}_k$ را جداگانه حساب می‌کنیم.

مثال:

$\delta^{ij}\varphi^{ij}{}_k = \underline{\varphi^{ii}{}_k}$?

$$\varphi'^{ii}{}_k = U^i{}_j \underbrace{U^i{}_l}_{(U^T)_l{}^i} (U^\dagger)^m{}_k \varphi^{jl}{}_m = \underbrace{(U^T)_l{}^i U^i{}_j}_{(U^TU)_{lj}} (U^\dagger)^m{}_k \varphi^{jl}{}_m$$

(0,1) صورت یک بردار هم‌وردا تبدیل نمی‌شود!

$\underline{\delta^j{}_i\varphi^{ik}{}_j} = \varphi^{ik}{}_i$? $\varphi'^{ik}{}_i = U^i{}_j U^k{}_l \underline{(U^\dagger)^m{}_i} \varphi^{jl}{}_m$

$$= (U^\dagger)^m{}_i U^i{}_j U^k{}_l \varphi^{jl}{}_m = \underbrace{(U^\dagger U)^m{}_j}_{\delta^m_j} U^k{}_l \varphi^{jl}{}_m = U^k{}_l \varphi^{jl}{}_j$$

به صورت یک بردار پادوردا تبدیل می‌شود ✓

نکته: رد، در فضای مختلط، صرفاً با جمع روی دو نمایه یکی هم‌وردا و دیگری پادوردا معنی دارد. $(p,q)\to(p-1,q-1)$

تمرین ۱.۱۰: نشان دهید تقارن روی نمایه‌های پادوردا، تقارن روی نمایه‌های هموردا، پادتقارن روی نمایه‌های پادوردا و پادتقارن روی نمایه‌های هموردای یک تنسور رتبه (p,q) تحت تبدیل $SU(n)$ حفظ می‌شود.

تمرین ۱.۱۱: نشان دهید تحت تبدیلات $SU(n)$، روابط زیر برقرار است:

$$\epsilon_{i_1\cdots i_n} u^{i_1}{}_1 u^{i_2}{}_2 \cdots u^{i_n}{}_n = 1$$

$$\epsilon^{i_1\cdots i_n} u^1{}_{i_1} u^2{}_{i_2} \cdots u^n{}_{i_n} = 1$$

تمرین ۱.۱۲: نشان دهید تحت تبدیلات $SU(n)$، $\epsilon_{i_1\cdots i_n}$ ناوردا است.

نکته مهم: ϵ برای بالا و پایین بردن نمایه‌ها کاربرد دارد ولی این را با شکلی عجیب (برای ما) انجام می‌دهد.

نکته: برای بهتر کردن تانسورهای کاهش‌ناپذیر $SU(n)$، از زبان شده $SO(n)$ استفاده می‌کنیم. مثلاً برای تانسور برداری φ^i، تانسور کاهش‌ناپذیر n بعدی داریم. برای φ^{ij}، دو تانسور یکی برای قسمت متقارن که $\frac{n(n+1)}{2}$ است و دیگری پادتقارن که $\frac{n(n-1)}{2}$ بعدی است نیاز داریم: $\frac{n(n+1)}{2} \oplus \frac{n(n-1)}{2}$.

$$\varphi^{ij} = \varphi^{(ij)} + \varphi^{[ij]}$$

مثال: تانسور کاهش‌ناپذیر $SU(n)$ برای تنسورهای مرتبه $(2,1)$ را بدست آورید.

$$\varphi^{ij}{}_k = \underbrace{\varphi^{(ij)}{}_k}_{\frac{n(n+1)}{2}n} + \underbrace{\varphi^{[ij]}{}_k}_{\frac{n(n-1)}{2}n}$$

$$\varphi^{(ij)}{}_k \longrightarrow \varphi^{(ij)}{}_i \longrightarrow \text{Vector}$$

$$\varphi^{[ij]}{}_k \longrightarrow \varphi^{[ij]}{}_i \longrightarrow \text{Vector}$$

$$\left(\frac{n^2(n+1)}{2} - n\right) \oplus n \oplus \left(\frac{n^2(n-1)}{2} - n\right) \oplus n = \frac{n(n-1)(n+2)}{2} \oplus n \oplus \frac{n(n+1)(n-2)}{2} \oplus n$$

مثال: تانسور کاهش‌ناپذیر $SU(n)$ برای تنسور مرتبه $(1,1)$ را بدست آورید.

$$\varphi^i{}_j \qquad n^2$$

$$(n^2-1) \oplus 1$$

$$\varphi'^i{}_i = u^i{}_k (u^\dagger)^j{}_i \varphi^k{}_j = \underbrace{(u^\dagger u)^j{}_k}_{\delta^j{}_k} \varphi^k{}_j = \varphi^j{}_j$$

جبر لی

برای U ها با پارامتر کوچک داریم $\quad U = I + iH \quad$ (H کوچک) $\quad U \in SU(n)$

$$I = U^{+}U = (I - iH^{+})(I + iH) \simeq I + i(H - H^{+}) \Rightarrow H = H^{+}$$

یعنی H هرمیتی است.

$$U = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \left(1 + i\frac{H}{N}\right)^{N} = e^{iH}$$

از طرف دیگر:

$$1 = \det U = \det e^{iH} = e^{tr(iH)} \Rightarrow tr H = 0$$

یعنی مولدهای عناصر $SU(n)$، ماتریس های هرمیتی بدون رد هستند.

مثال: کلی‌ترین حالت یک ماتریس هرمیتی بدون رد دو بعدی

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{*} & c^{*} \\ b^{*} & d^{*} \end{pmatrix} \qquad d \to -a, \quad d^{*} \to -a^{*}$$

$a = a^{*} = z$

$b = c^{*} = x - iy$

$x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}$$

$$H = x\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma^1} + y\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma^2} + z\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\sigma^3} \qquad \det H = -(x^2 + y^2 + z^2)$$

ماتریس های هرمیتی بدون رد Pauli's Matrix

$$\frac{\theta_1}{2} = x \qquad \frac{\theta_2}{2} = y \qquad \frac{\theta_3}{2} = z$$

$$U = e^{i\frac{\theta_a \sigma^a}{2}} \qquad \sigma_a \sigma_b = 2\delta_{ab}$$

$SU(3) \quad 3^2 - 1 = 8 \quad \lambda_a$

تمرین ۱.۱۳: کلی‌ترین حالت برای یک ماتریس هرمیتی بدون رد سه بعدی را بدست آورید.

تمرین ۱.۱۴: نشان دهید ماتریس های پاولی و گلمان، از روابط $\sigma_a \sigma_b = 2\delta_{ab}$ و $\lambda_a \lambda_b = 2\delta_{ab}$ پیروی می کنند.

تمرین ۱.۱۵: با فرض $\theta_1 = \theta_2 = 0$ و $\theta_3 = \theta$، در ماتریس معرف گروه $U(2)$ که شکل کلی ماتریس U با این قید را بدست آورید.

تمرین ۱.۱۶: با محاسبه ثابت های ساختار جبری $SU(2)$، نشان دهید این ثابت ها دقیقاً ثابت های ساختار جبری $SO(3)$ هستند.

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$$

$U(1) \qquad SU(2) \qquad SU(3)$