بسم الله الرحمن الرحیم

فصل هشتم: کاربرد در فیزیک

۹۹,۲,۲۸

تفاوت معادله شرودینگر و قانون دوم نیوتن

$$H\psi(\vec{x},t) = i\hbar\,\partial_t\psi(\vec{x},t)$$

خطی و همگن، پس بر هم نهی جواب ها هم خود یک جواب است

$\alpha\psi_1+\beta\psi_2$

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}V(\vec{x})$$

خطی نیست، مگر این که $\vec{\nabla}V(\vec{x}) \propto \vec{x}$

(دستگاه هایی که از قانون هوک پیروی می کنند.)

تقارن و تبهگنی در مکانیک کوانتومی

$$\psi(\vec{x},t) = \psi(\vec{x})\,e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

معادله ویژه مقداری: $H\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})$

تبهگنی: یک مقدار انرژی E، ویژه مقدار چند ویژه حالت باشد: $H\psi^a(\vec{x}) = E\psi^a(\vec{x}) \quad a\in I$

تبدیلات در مکانیک کوانتومی، معادل عملگرهای یکانی هستند. فرض کنید T یک عملگر یکانی باشد، که H تحت تبدیل آن ناوردا باشد، $H=T^{\dagger}HT \Rightarrow TH=HT$

تمرین ۸,۱: ثابت کنید تبدیلهایی که همیلتونی را ناوردا نگاه می دارند، تشکیل گروه می دهند.

تمرین ۸,۲: ثابت کنید اگر ψ یک ویژه تابع همیلتونی H باشد آنگاه $T\psi$ هم یک ویژه تابع H است با همان مقدار انرژی.

$$\psi'^a = T\psi^a = \sum_b \alpha^a{}_b\,\psi^b$$

$$\begin{pmatrix}\psi'^1\\ \psi'^2\\ \vdots\\ \psi'^n\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha^1{}_1 & \alpha^1{}_2 & \cdots & \alpha^1{}_n\\ \alpha^2{}_1 & & \cdots & \vdots\\ \vdots & & & \\ \alpha^n{}_1 & & \cdots & \alpha^n{}_n\end{pmatrix}}_{D(T)}\begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\\ \vdots\\ \psi^n\end{pmatrix}$$

نکته: این یعنی T عضو گروه تقارن‌های H است (یعنی گروهی که H را ناوردا نگاه می‌دارند) و عملاً $D(T)$ می‌شود ماتریس معادل عمل T.

- اگر T_1 و T_2 دو عضو گروه تقارن‌های H باشند، آنگاه: $D(T_1T_2)=D(T_1)D(T_2)$

این یعنی D یک نمایش گروه تقارن‌های H است (چون همریختی هم هست!)

نکته مهم: پس اگر توابع تبهگن با انرژی ψ^a، d-لایه (d-fold) باشند، آنگاه نمایش گروه تقارن H که آن را ناوردا نگاه می‌دارند، d_r بعدی خواهد بود.

تمرین ۸.۳: نشان دهید که زیرفضای d_r-بعدی تبهگنی H، به صورتی که توسط H ناوردا نگاه داشته می‌شوند.

تمرین ۸.۴: نشان دهید که H ضریبی از I_{d_r} (یکانی) است.

تمرین ۸.۵: نشان دهید گروه تقارن‌های H، گروه $SO(d_r)$ است.

تمرین ۸.۶: نشان دهید گروه تقارن‌های H، کاهش‌ناپذیر است.

تمرین ۸.۷: با کمک لم شور، نشان دهید H ضریبی از یکانی است.

پاریتی

همیلتونی $H=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$ را در نظر بگیرید که در آن $V(x)=V(-x)$. در این صورت، گروه تقارن‌های H (یعنی گروهی که تحت تبدیلات آن H ناوردا می‌ماند) $\mathbb{Z}_2$ است.

$$\begin{cases} e: x\longrightarrow x \\ r: x\longrightarrow -x \end{cases}$$

$\mathbb{Z}_2$	1	$\bar{1}$
e	1	1
r	$\boxed{1}$	$\boxed{-1}$

فرض کنید $\psi(x)$ یک ویژه‌تابع H باشد. می‌دانیم $\overset{T_e}{e}\psi(x)=\psi(x)$ و $\overset{T_r}{r}\psi(x)=\psi(-x)$

نکته: $\mathbb{Z}_2$ دو نمایش دارد که در یکی $r=1$ و در دیگری $r=-1$. در اولی $\psi(x)=\psi(-x)$ و در دومی $\psi(x)=-\psi(-x)$.
این یعنی هر ویژه‌تابع H ای که تنها یک تقارن داشته باشد یا زوج است یا فرد.

تقارن در معادلات فیزیک

تعریف: یک معادله حرکت در فیزیک را در نظر بگیرید. چنانچه دو طرف معادله تحت یک دسته از تبدیلات یکسان تبدیل شوند در نتیجه قیافه معادله بر اثر تبدیلات تغییر نکند، می گویند آن معادله هم وردا (Covariant) است.

$\vec F' = R\vec F$

$\vec a' = R\vec a$

مثال: قانون دوم نیوتن $\vec F = m\vec a$، تحت تبدیلات دوران‌ها، مختصات هم وردا است. $\vec F = m\vec a \Rightarrow R^{-1}\vec F' = mR^{-1}\vec a' \Rightarrow \vec F' = m\vec a'$

اگر کمیتی فیزیکی، تحت یک دسته از تبدیلات تغییر نکند می گویند آن کمیت ناوردا (invariant) است.

نکته: لاگرانژی تعریف شده که قانون دوم نیوتن $m\frac{d^2\vec r}{dt^2} = -\vec\nabla V(\vec r)$، از اصل کنش و لاگرانژی $L=\frac{1}{2}m(\dot{\vec r})^2 - V(\vec r)$ بدست می آید.

نکته: همیلتون ادعا کرد که معادلات حرکت همه سیستم های دینامیکی در فیزیک، با نوشتن لاگرانژی به فرم بالا، از معادله اویلر-لاگرانژ متناظر بدست می آید.

نکته: اصل کنش مبتنی بر این است که کنش تحت تغییرات جزئی حول مسیر کلاسیک، تا مرتبه اول ناوردا می ماند.

$$S=\int dt\, L(\dot q, q) \longrightarrow 0=\delta S = \int dt\,\delta L(\dot q,q) = \int dt\,\Big(L(\underset{\frac{d}{dt}\delta q}{\dot q+\delta\dot q}, q+\delta q) - L(\dot q,q)\Big)$$

$$= \int dt \Big(L(\dot q,q) + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta\dot q + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q - L(\dot q,q)\Big)$$

$$= \int dt\Big(\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot q}\delta q\Big) - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\Big)\delta q + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q\Big) = \frac{\partial L}{\partial\dot q}\delta q\Big|_i^f + \int dt\Big(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q}\Big)\delta q$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}}$$

نکته مهم: فرق معادله نیوتن با اصل کنش، در این است که معادله نیوتن در نقطه نوشته شده است (موضعی است) ولی اصل کنش مسئله را جهانی (global) حل می کند.

نکته مهم: نوشتن کنش (که یک اسکالر است) سرراست تر و راحت تر از نوشتن مستقیم معادله حرکت است. به علاوه، کار کردن با یک کمیت ناوردا راحت تر از کار کردن با یک معادله هم وردا است. خصوصاً اگر تقارن‌های پیچیده باشند که شکل لاگرانژی را ساده تر کند.

مثال: پتانسیلی که نسبت به دوران $(SO(3))$ ناوردا باشد: $V(\vec r) \longrightarrow \vec r\cdot\vec r = |\vec r|^2 \longrightarrow V(|\vec r|) = V(r)$

در یک رهیافت دیگر، می‌توان با تعریف $p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot q}$ ، $H(p,q) = p\dot q - L(\dot q, q)$

$m\ddot q = -\frac{dV}{dq}$ $\qquad L = \frac{1}{2} m \dot q^2 - V(q)$

تابع همیلتونی را تعریف کرد که با قرار دادن $\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}$ ، $\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}$ و ترکیب آن‌ها با هم قانون دوم نیوتن را بدست آورد.

نکته: مزیت همیلتونی به لاگرانژی در این است که معادلات دیفرانسیل مرتبه یک هستند ولی در لاگرانژی مرتبه ۲ بدست می‌آید.
مزیت لاگرانژی به همیلتونی در این است که لاگرانژی یک اسکالر است (نسبت به دوران در چارچوب دستگاه مختصات ناوردا است)
ولی همیلتونی این گونه نیست!

نکته کلیدی: امی نوتر نشان داد که هر قانون بقا در فیزیک، متناظر با یک تقارن پیوسته در لاگرانژی است.

مثال: $L = \frac{1}{2} m(\dot x^2 + \dot z^2) - mgz$

$x \to x + a \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) - \cancel{\frac{\partial L}{\partial x}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot x) = 0 \Rightarrow P_x = m\dot x = \text{Const}$$

نکته کلیدی: هر کمیت بقا دار در فیزیک، متناظر با یک مولد در جبر لی گروه تقارنی مسئله است!