بسم الله الرحمن الرحیم

۹۹/۲/۲۰

فصل هفتم: نمایش‌های حقیقی، شبه حقیقی و مختلط

نمایش‌های غیرمختلط

$$D: G \to GL(n,\mathbb{C}) \Rightarrow D^*(g) \leftarrow D(g) \quad \forall g \in G$$

$$D(g_i).D(g_j)=D(g_i\circ g_j) \Rightarrow D^*(g_i).D^*(g_j)=D^*(g_i\circ g_j)$$

پس اگر D یک نمایش گروه G باشد، D^* هم یک نمایش است. $D^{(r)}(g) \to D^{(r*)}(g) \equiv D^{(r)}(g)^*$

نگاه به اعداد مختلط: اگر $z=z^*$ آنگاه z حقیقی است. $s^{-1}as=a$

تعریف: در بسیاری گروه‌ها، تفاوت دو نمایش هم‌ارز، ریشه در انتخاب پایه‌های متفاوت برای فضایی که گروه روی آن عمل می‌کند دارد. برای همین برخلاف اعداد، یک نمایش غیرمختلط است اگر و فقط اگر دو نمایش D و D^* هم‌ارز باشند. به عبارت دیگر، وجود داشته باشد ماتریس معکوس‌پذیر S به طوری که به ازای $\forall g\in G$، $D^*(g)=S\,D(g)\,S^{-1}$.

نکته: در این حالت، $\chi^{(*)}(c)=tr(D^*(g))=tr(S D^*(g)S^{-1})=tr\,D(g)=\chi(c)$، $g\in C$

پس اگر همه توابع مشخصه کلاس‌های هم‌ارزی نمایش یک گروه حقیقی باشند، آن نمایش غیرمختلط نامیده می‌شود.

نکته: در بررسی نمایش‌های کاهش‌ناپذیر یک گروه، یا مزدوج مختلط نمایش‌ها با خودشان هم‌ارزند و یا یک نمایش جدید محسوب می‌شوند.

مثال: نمایش‌های Z_3 سه نمایش یک‌بعدی دارد، یکی نمایش بدیهی که مزدوج آن با خودش برابر است و دو نمایش دیگر که مزدوج مختلط هم هستند و با هم هم‌ارز نیستند؛ وجود ندارد عددی مثل S به طوری که $\omega^*=S^{-1}\omega S$. $\{1,\omega,\omega^*\}$ و $\{1,\omega^*,\omega\}$ دو نمایش مختلف (غیرهم‌ارز) هستند.

نکته: اگر نوعی از ذرات، تحت نمایش خاصی از یک گروه تقارنی تبدیل شوند، پادذرات متناظر، تحت نمایش مزدوج مختلط متناظر تبدیل خواهند شد.

سؤال: اگر نمایش گروه تقارنی نوعی از ذرات، غیرمختلط باشد، درباره آن ذرات چه می‌توان گفت؟

نمایش های شبه حقیقی و حقیقی

برای یک نمایش غیرقابل تقلیل داشتیم: $D^*(g) = S D(g) S^{-1}$ ، $\forall g \in G$ $\xrightarrow{Tr}$ $D^+(g) = (S^{-1})^T D^T(g) S^T$

اگر نمایش D را یکانی در نظر گرفته باشیم:
$$D^+(g) = D^{-1}(g) = D(g^{-1}) = (S^{-1})^T D^T(g) S^T$$

$$g^{-1} \to g \qquad D(g) = (S^{-1})^T D^T(g^{-1}) S^T = (S^{-1})^T \left[(S^{-1})^T D^T(g) S^T\right]^T S^T$$
$$= (S^{-1})^T \left[S D(g) S^{-1}\right] S^T = (S^{-1} S^T)^{-1} D(g) (S^{-1} S^T)$$

$$\Longrightarrow (S^{-1} S^T) D(g) = D(g) (S^{-1} S^T)$$

در واقع، $S^{-1}S^T$ با همه $D(g)$ ها جابجا می‌شوند پس طبق لم شور داریم: $S^{-1} S^T = \eta I \Rightarrow S^T = \eta S$

$$\Longrightarrow S = (S^T)^T = (\eta S)^T = \eta^2 S \Longrightarrow \eta = \pm 1 \Longrightarrow S^T = \pm S$$

نکته: اگر نمایش D غیرقابل تقلیل باشد، آنگاه S ای که D و D^* را به هم مرتبط می‌کند یا متقارن است یا پادمتقارن!

تعریف: در نمایش غیرقابل تقلیل D ، اگر S ای که D و D^* را با هم هم‌ارز می‌کند متقارن باشد به نمایش "حقیقی" می‌گوییم.
و اگر پادمتقارن باشد به نمایش "شبه حقیقی" (pseudoreal) می‌گوییم.

نکته: یک نمایش شبه حقیقی نمی‌تواند دارای بُعد فرد باشد. چرا؟

داشتیم:
$$S D(g) = D^*(g) S = (D^+(g))^T S = (D^{-1}(g))^T S = (D^T(g))^{-1} S$$

$$\Longrightarrow S = D^T(g) S D(g) \Longrightarrow S^+ = D^+(g) S^+ D^*(g)$$

$$\Longrightarrow S^+ S = D^+(g) S^+ D^*(g) D^T(g) S D(g) = D^+(g) S^+ \left[D(g) D^+(g)\right]^T S D(g)$$
$$= D^+(g) S^+ S D(g) \quad \forall g \in G \longrightarrow S^+ S = \alpha I$$

پس با ضرب یک عدد ثابت در S می‌توان S را یکانی کرد.

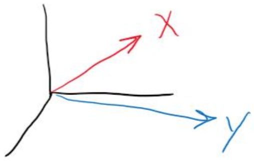
تمرین ۷،۱: مقدار این ثابت را حساب کنید.

نکته: چون مقدار این ثابت تأثیری در رابطه $D^* = S D S^{-1}$ ندارد، پس برای یک نمایش حقیقی (شبه حقیقی) ماتریس S یک ماتریس یکانی متقارن (یا پادمتقارن) خواهد بود.

قضیه: اگر یک نمایش حقیقی باشد، آنگاه پایه‌ای وجود دارد که در آن، همه درایه‌های ماتریس‌های نمایش حقیقی هستند. اثبات با خودتان!

نکته مهم: نمایش کاهش ناپذیر $D^{(2)}$ با بعد ۲ از یک گروه را در نظر بگیرید. ماتریس های این نمایش ماتریس عملگرهایی هستند که در فضای ۲ بعدی عمل می کنند:

$$D^{(2)}(g)X = Y$$



این نمایش، هیچ راستایی را ناوردا نگاه نمی دارد.

تمرین ۷٫۲: توضیح دهید که چرا این نمایش هیچ راستای ناوردایی ندارد.
آیا این جمله به این معنی است که ماتریس های این نمایش قطری شدنی نیستند؟

$S = D^T S D$
$\forall g \in G$

حال دو بردار دلخواه X و Y در این فضا را در نظر بگیرید و فرض کنید که نمایش غیرمختلط باشد. پس داریم

$$Y^T S X = Y^T D^T(g) S D(g) X = (D(g)Y)^T S (D(g)X)$$

در واقع، این رابطه می گوید که کمیت ضرب داخلی $Y^T S X$ تحت تبدیلات ماتریس های نمایش غیرمختلط، ناوردا می ماند.

روشی برای مشخص کردن مختلط، حقیقی یا شبه حقیقی بودن

X دلخواه

$$S = \sum_{g'} D^T(g') X D(g') \longrightarrow D^T(g) S D(g) = \sum_{g'} \underbrace{D^T(gg') X D(gg')}_{\text{جابجایی از g ها}} = S$$

بر طبق رابطه بالا $Y^T D^T(g) S D(g) X = Y^T S X$. ناوردا بودن این رابطه یعنی غیرمختلط بودن نمایش در حالی که ما هیچ فرضی در این رابطه نداشتیم! تنها نتیجه ای که می توان گرفت این است که، باید برای یک نمایش مختلط، برای هر X دلخواه، ماتریس صفر باشد!

$$S = \sum_g D^T(g) X D(g)$$

$$S_{ij} = \sum_g D^T(g)_{ia} X_{ab} D(g)_{bj} = 0$$

حال ماتریس X را به صورت $X = \begin{array}{cc} & l \\ k & \begin{pmatrix} & \vdots \\ \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ در نظر می گیریم

$$\Rightarrow S_{ij} = \sum_g D^T(g)_{ik} D(g)_{lj}$$

$$= \sum_g D(g)_{ki} D(g)_{lj} = 0 \quad \forall i,j,k,l \xrightarrow[\text{+Sum}]{\text{حالت خاص } l=i} \sum_g D(g)_{ki} D(g)_{ij} = \sum_g D(g^2)_{kj}$$

$$\xrightarrow[\text{+Sum}]{\text{حالت خاص } k=j} \sum_g \chi(g^2) = 0 \, !$$

نکته: وقتی یک نمایش مختلط باشد، آنگاه $\sum_g \chi(g^2) = 0$

اگر نمایش مستقل نباشد: داریم $\quad S^T = \eta S$

$$S^T = \sum_g D^T(g) X^T D(g) = \eta \sum_g D^T(g) X D(g)$$

$$\sum_g D^T(g)_{ia} X^T_{ab} D(g)_{bj} = \eta \sum_g D^T(g)_{ia} X_{ab} D(g)_{bj}$$

ماتریس: $\quad X = \begin{array}{c|c} & l \\ \hline k & \begin{pmatrix} \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

$$\Rightarrow \sum_g D^T(g)_{il} D(g)_{kj} = \eta \sum_g D^T(g)_{ik} D(g)_{lj}$$

$$\Rightarrow \sum_g D(g)_{li} D(g)_{kj} = \eta \sum_g D(g)_{ki} D(g)_{lj}$$

$i=k$ + Sum

$j=l$ + Sum

$$\Rightarrow \sum_g \chi(g^2) = \eta \underbrace{\sum_g \chi(g)^2}_{\sum_c n_c |\chi(c)|^2} = \eta N(G) \Rightarrow \frac{1}{N(G)} \sum_g \chi(g^2) = \eta$$

$\chi^*(g) = \chi(g)$

$$\boxed{\frac{1}{N(G)} \sum_g \chi(g^2) = \begin{cases} 1 & \text{نمایش حقیقی} \\ 0 & \text{نمایش مختلط} \\ -1 & \text{نمایش شبه‌حقیقی} \end{cases}}$$

تمرین ۷،۱: نشان دهید اگر g_1 و g_2 متعلق به یک کلاس هم‌ارزی باشند، آنگاه g_1^2 و g_2^2 هم هم‌کلاس هستند.

مثال: بررسی نمایش‌های کاهش‌ناپذیر گروه A_3 (Z_3).

A_3

Z_3	g_0	g_1	g_2
g_0	g_0	g_1	g_2
g_1	g_1	g_2	g_0
g_2	g_2	g_0	g_1

$D^{(1)} = \{1, 1, 1\}$

$D^{(2)} = \{1, \omega, \omega^*\}$

$D^{(3)} = \{1, \omega^*, \omega\}$

حقیقی: $\frac{1}{3}\left(\chi^{(1)}(g_0^2) + \chi^{(1)}(g_1^2) + \chi^{(1)}(g_2^2)\right) = \frac{1}{3} 3 = 1$

مختلط: $\frac{1}{3}\left(\chi^{(2)}(g_0^2) + \chi^{(2)}(g_1^2) + \chi^{(2)}(g_2^2)\right) = \frac{1}{3}(1+\omega^*+\omega) = 0$

مثال: بررسی نمایش‌های کاهش‌ناپذیر گروه V_4.

V_4	g_0	g_1	g_2	g_3
g_0	g_0			
g_1		g_0		
g_2			g_0	
g_3				g_0

$\sum_r d_r^2 = N(G) = 4$

n_c	1	$1'$	$1''$	$1'''$
1	1	1	1	1
1	1	1	−1	−1
1	1	−1	1	−1
1	1	−1	−1	1

$D^{(r)}$: $\frac{1}{4}\left(\chi^{(r)}(g_0^2) + \chi^{(r)}(g_1^2) + \chi^{(r)}(g_2^2) + \chi^{(r)}(g_3^2)\right)$

$= \frac{1}{4} 4 \chi^{(r)}(g_0) = 1$ حقیقی

تمرین ۷،۴: ثابت کنید نمایش برداری گروه، حقیقی است.

تمرین ۷،۵: نمایش‌های کاهش‌ناپذیر گروه S_3 را دسته‌بندی کنید.

تمرین ۷،۶: بر اساس رابطه فوق، نمایش‌های A_4 را دسته‌بندی کنید.

تعداد ریشه‌های اعضای گروه

تعریف: به ازای هر $f \in G$، تعداد جواب های معادله $g^2 = f$ ($g \in G$) را σ_f می نامیم. (تعداد ریشه‌های f = σ_f)

مثال: σ_f ها را برای گروه V_4 و $\mathbb{Z}_4$ مشخص کنید.

	g_0	g_1	g_2	g_3
g_0	g_0			
g_1		g_0		
g_2			g_0	
g_3				g_0

$\sigma_{g_0} = 4$

$\sigma_{g_1} = \sigma_{g_2} = \sigma_{g_3} = 0$

	g_0	g_1	g_2	g_3
g_0	g_0			
g_1		g_2		
g_2			g_0	
g_3				g_2

$\sigma_{g_0} = 2$

$\sigma_{g_1} = 0$

$\sigma_{g_2} = 2$

$\sigma_{g_3} = 0$

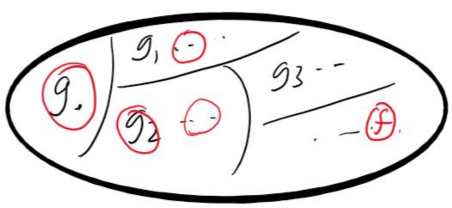
تمرین ۷٫۷: ثابت کنید: $\sum_f \sigma_f = N(G)$.

$$\eta^{(\nu)} = \frac{1}{N(G)} \sum_g \chi^{(\nu)}(g^2) = \frac{1}{N(G)} \sum_f \sigma_f \chi^{(\nu)}(f)$$

$g^2 = f$

$f \in G$

	g_0	g_1	$\cdots$
g_0	×		
g_1		×	
$\vdots$			×



یک f' دلخواه انتخاب می کنیم

مزدوج مختلط تابع مشخصه f' در هر نمایش کاهش ناپذیر را در همان نمایش ضرب می کنیم و همه را با هم جمع می نماییم.

$$\sum_\nu \eta^{(\nu)} \chi^{(\nu)*}(f')$$

$$= \frac{1}{N(G)} \sum_\nu \sum_f \sigma_f \chi^{(\nu)}(f) \chi^{(\nu)*}(f') = \frac{1}{N(G)} \sum_f \sigma_f \sum_\nu \chi^{(\nu)}(f) \chi^{(\nu)*}(f') = \sigma_{f'}$$

هنگام جمع زدن روی f، اگر f' و f متعلق به یک کلاس هم ارزی گروه باشند یک مقدار $\sum_\nu \cdots$ می شود $\frac{N(G)}{n_c}$ و اگر متعلق به کلاس های مختلف باشند، $\sum_\nu \cdots = 0$. پس $\sum_\nu \cdots$ به تعداد اعضای کلاس f' تکرار می شود.

$$\Rightarrow \sigma_f = \sum_\nu \eta^{(\nu)} \chi^{(\nu)*}(f) = \sum_\nu \eta^{(\nu)} \chi^{(\nu)}(f)$$

چون $\eta^{(\nu)}$ در شرایط مختلط صفر است

تمرین ۷٫۸: اثبات فوق را دقیق انجام دهید.

تمرین ۷٫۹: نشان دهید برای هر نمایش کاهش ناپذیر از گروه G، $\sum_g D^{(\nu)}(g^2) = N(G) \frac{\eta^{(\nu)}}{d_\nu} I$

(راهنمایی: ابتدا نشان دهید $\sum_g D^{(\nu)}(g^2)$ مضربی از همانی است. سپس سعی کنید با گرفتن رد آن، ضریب ثابت را بدست آورید.)