بسم الله الرحمن الرحیم

فصل ششم: مشخصه به عنوان تابعی از کلاس

۹۹,۲,۶

- قضیه تعامد بزرگ

$$\sum_g D^{(r)\dagger}(g)^i{}_j \, D^{(s)}(g)^k{}_l = \frac{N(G)}{d_r}\delta^{rs}\delta^i{}_l\delta^k{}_j$$

نتایج: وقتی با جدول مشخصه کار کنیم (نمایش‌های کاهش‌ناپذیر)

- $N(R) = N(C)$

- $\sum_r d_r^2 = N(G)$

- $\sum_c \left(\left(\frac{n_c}{N(G)}\right)^{1/2}\chi^{(r)*}(c)\right)\left(\left(\frac{n_c}{N(G)}\right)^{1/2}\chi^{(s)}(c)\right) = \delta^{rs}$

- $\sum_r \left(\left(\frac{n_c}{N(G)}\right)^{1/2}\chi^{(r)*}(c)\right)\left(\left(\frac{n_c}{N(G)}\right)^{1/2}\chi^{(r)}(c')\right) = \delta_{cc'} \Rightarrow \sum_r \chi^{(r)*}(c)\,\chi^{(r)}(c') = \frac{N(G)}{n_c}\delta_{cc'}$

نتایج: وقتی کاهش‌ناپذیری یا کاهش‌پذیری نمایش مشخص نیست.

$$\sum_c \frac{n_c}{N(G)}\chi^*(c)\,\chi(c) = \sum_r n_r^2$$

$$\sum_c \frac{n_c}{N(G)}\chi^{(r)*}(c)\,\chi(c) = n_r$$

تمرین ۶٫۱: جدول مشخصه گروه $\mathbb{Z}_3$ را بدست آورید.

گروه های دوری

$\underset{\text{مولد گروه}}{g} \longrightarrow \{g^1, g^2, \ldots, g^{k-1}, g^k = g^0 = e\}$ عضو k مرتبه k $\quad g^i \circ g^j = g^{i+j \,(\text{mod } k)}$

تمرین ۶٫۲: نشان دهید که یک گروه دوری با مرتبه k، با $\mathbb{Z}_k$ یکریخت است.

$$\{\ldots, g^{-2}, g^{-1}, g^0, \underset{\text{مولد گروه}}{g^1}, g^2, \ldots\} = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

تمرین ۶٫۳: نشان دهید هر گروه دوری نامتناهی با $\mathbb{Z}$ یکریخت است.

$\mathbb{Z}_n$ گروه جابجایی است پس: $N(C) = N(R) = N(\mathbb{Z}_n) = n \Leftarrow$ $\quad n = \sum_r d_r^2 = \sum_{r=1}^{n} d_r^2$

$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], \ldots, [n-1]\} = \{e^{2\pi i k/n} \mid 0 \leq k \leq n-1\}$ $\quad$ نمایش یک‌بعدی $\quad \forall r \;\; d_r = 1$

$D^{(1)}(e^{2\pi i k/n}) = 1$ $\quad$ نمایش بدیهی $\quad D^{(2)}(e^{2\pi i k/n}) = e^{2\pi i k/n}$

$D^{(3)}(e^{2\pi i k/n}) = e^{2\pi i k/n \cdot 2}$ $\quad D^{(r)}(e^{2\pi i k/n}) = e^{2\pi i k(r-1)/n}$ $\;\ldots\;$ $1 \leq r \leq n$

تمرین ۶.۴ : با استفاده از تعامد جدول مشخصه، ثابت کنید $\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k/n} = 0$.

$x^n = 1$

$x = e^{2\pi i k/n}$

$0 \le k \le n-1$

نکته: مجموع ریشه‌های n ام عدد 1 ($n \ge 2$) برابر صفر است.

تمرین ۶.۵ : با استفاده از تعامد جدول مشخصه، ثابت کنید $\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i (k-k')/n} = n\delta_{kk'}$.

تمرین ۶.۶ : جدول مشخصه گروه S_3 را بدست آورید.

مثال: جفت ماتریس های یکانی نمایش ۲-بعدی S_3 .

n_c	
1	I
2	$(123),(132)$
3	$(12),(13),(23)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2$

$(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(13) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$(123) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^* \end{pmatrix}_{2\times 2}$ $\begin{pmatrix} \omega^* & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}_{2\times 2}$

$\omega = e^{2\pi i/3}$

$\omega + \omega^* = -1$

$(12)(123) = \underbrace{(12)(12)}(23) = (23)$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^* \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \omega\omega^* = 1$

$\sum_g D^{(r)}_{(g)\,k\ell} \propto \delta^{rs} = 0$

$\sum_g D^{(r)}(g) = 0$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ $\begin{pmatrix} 0 & \omega^* \\ \omega & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ $\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega^* & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

	n_c	1 (a)	$\bar{1}$ (b)	2 (c)	3
I	1	1	1	2	3
$(123)(132)$	2	1	1	-1	0
$(12)(23)(31)$	3	1	-1	0	1

تمام کاهش ناپذیرها

سؤال: کدام حالت را داریم؟ S_3

$a^2+b^2+c^2=6$, $a=b=1,\ c=2$

$\boxed{3 = 2 \oplus 1}$

$3 = 2 \oplus \bar{1}$

$3 = 1 \oplus 1 \oplus 1$ $\qquad 3 = 1 \oplus 1 \oplus \bar{1}$

$3 = 1 \oplus \bar{1} \oplus \bar{1}$ $\qquad 3 = \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1}$

$$\frac{1}{N(G)} \sum_c n_c \chi^{(r)*}(c)\, \chi(c) = n_r$$

مثال: نمایش سه بعدی نشانی (المسرف) S_3 را به نمایش های کاهش ناپذیر تجزیه کنید.

$\frac{1}{6}\left(1.1.3 + 2.1.0 + 3.1.(1)\right) = 1$ از نمایش یک بعدی 1 یک عدد وجود دارد.

$\frac{1}{6}\left(1.1.3 + 2.1.0 + 3.(-1).1\right) = 0$ $\bar{1}$ ✗ $\qquad \frac{1}{6}\left(1.2.3 + 2.(-1).0 + 3.0.1\right) = 1$ 2 ✓ یک عدد

نکته: تحت تبدیلات همانی، رد عوض نمی‌شود. پس وقتی یک نمایش کاهش پذیر، بلوک قطری شود، رد آن، جمع رد نمایش‌های کاهش ناپذیر تشکیل دهنده آن است.

$S^{-1}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}S = \begin{pmatrix} (\cdot) & \\ & (\cdot) \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} (1) & & \\ & (1) & \\ & & (1) \end{pmatrix}$, tr , tr

مثال: سه معادله سه مجهول

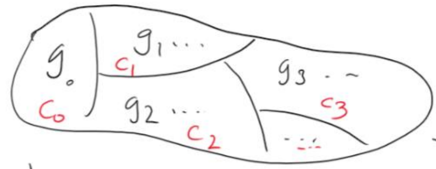
تجزیه یکتاست!

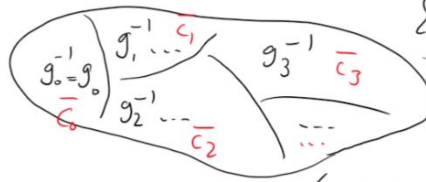
$x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x=1, y=0, z=1$

C ماتریس مشخصه

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

نکته: گروه G و افراز آن را در نظر بگیرید:





کلاس وارون $\bar{c}_i$

$D(g_i)$

$$D(g_i^{-1}) = D^{-1}(g_i) = D^{+}(g_i)$$

برای یک نمایش یکانی گروه G، رد هر کلاس را با c_i نمایش می‌دهیم.

$$\overset{D(g_i^{-1})}{\chi(\bar{c}_i)} = \operatorname{tr} D^{+}(g_i) = \operatorname{tr} D(g_i)^{*} = \chi^{*}(c_i)$$

نکته مهم: اگر یک کلاس وارون اعضاء خود را داشته باشد، آنگاه رد ماتریس نمایش هر عضو وارونش یک تابع حقیقی دارند و در نتیجه $\bar{c}_i = c_i \Leftarrow \chi(c_i) = \chi^{*}(c_i) \Leftarrow \chi(c_i) \in \mathbb{R}$.

تمرین ۶٫۷: نکته فوق را برای دو گروه A_3 و S_3 چک کنید.

$S_3 \quad (123),\ (123)^{-1} = (132)$

$A_3 \quad (123) \not\sim (123)^{-1} = (132)$

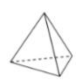
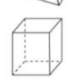
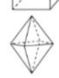
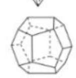
گروه تقارنی چندوجهی‌های منتظم

گروه تقارنی چندضلعی های منتظم D_n: $2n$ عضو، نمایش کاهش ناپذیر وفادار $(\ )_{2\times 2}$

$D_3 \cong S_3$ گروه تقارنی مثلث متساوی الاضلاع.

$\begin{cases} R_i \\ r_i \end{cases}$

چندوجهی‌های منتظم:

- A_4  Tetrahedron چهار وجهی منتظم
- S_4  Cube شش وجهی منتظم (مکعب)
- S_4  Octahedron هشت وجهی منتظم
- A_5  Dodecahedron دوازده وجهی منتظم
- A_5  Icosahedron بیست وجهی منتظم

* تمرین ۶٫۸: جدول مشخصه گروه S_4 را بدست آورید.

تمرین ۶٫۹: جدول مشخصه گروه D_4 را بدست آورید.

گروه A_4

- چون A_4 گروه تقارنی چهاروجهی منتظم است، پس حتماً یک نمایش کاهش ناپذیر وفادار ۳ بعدی دارد و این نمایش دوران‌های بردارها یکان معرف چهار رأس چهاروجهی بیان می‌کند.

سه عضو A_4 که هرکدام از دو دوری های مستقل از هم تشکیل شده‌اند:
$\overset{r_1}{(12)(34)},\ \overset{r_2}{(13)(24)},\ \overset{r_3}{(13)(24)}$

- مثلاً 241 412

$$r_1 r_2 = \big[(12)(34)\big]\big[(13)(24)\big] = (34)(12)(24)(31) = (34)(124)(31)$$
$$= (34)(241)(31) = (34)(24)(41)(13) = (342)(413) = (42)(23)(13)(34)$$
$$= (42)(231)(34) = (42)(312)(34) = (42)(31)(12)(34) = \big[(13)(24)\big]\big[(12)(34)\big] = r_2 r_1$$

- یعنی این سه عضو، دو به دو با هم جابه‌جا می‌شوند؛ نتیجه ماتریس‌های نمایش این سه عضو هم دو به دو با هم جابه‌جا می‌شوند.

این یعنی، ماتریس های نمایش این سه عضو، هم زمان قطری شدنی هستند.

- از طرفی هر کدام از این سه عضو به توان دو، عضو یکانی را می دهد، پس درایه های روی قطر آن ها در ماتریس باید ±1 باشند.

- از طرفی، چون هر عضو A_4، از ترکیب تعداد زوج دو-دوری ها درست شده است، پس دترمینان ماتریس های نمایشی باید 1 باشد.

$$r_1=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix},\quad r_2=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix},\quad r_3=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$$

- A_4 دو کلاس دیگر دارد، هر کدام با 4 عضو. (توجه کنید که $r_i^{-1}=r_i$)

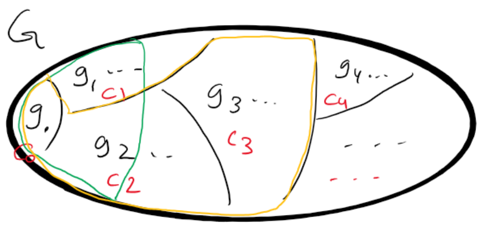
$$\begin{cases}(123),\ \underbrace{r_1}_{r_1^{-1}}(123)r_1,\ r_2(123)r_2,\ r_3(123)r_3\\ (132)=(123)^{-1},\ r_1(132)r_1,\ r_2(132)r_2,\ r_3(132)r_3\end{cases}$$

- رد نمایش 8 ماتریس اخیر هم صفر است.

$$(123)\sim\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \cdot\\ \cdot\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdot\\1\\ \cdot\end{pmatrix}$$

* تمرین در خانه: آیا نگران عدم حضور r_4 در فرایند بدست آوردن 8 ماتریس آخر نباید بود؟

کلاس های یک گروه و زیرگروه های ناوردا (نرمال)



تعریف کلاس هم ارزی گروه
$$\begin{cases}g_i\in C_i,\ \forall g_j\in G\\ g_j^{-1}g_ig_j\in C_i\end{cases}$$

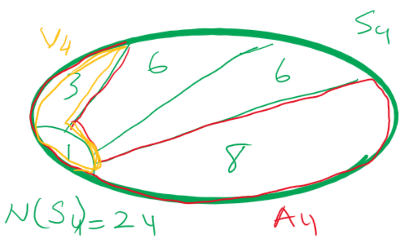
اگر H زیرگروه نرمال داشته باشیم، آنگاه
$$\begin{cases}h\in H,\ \forall g\in G\\ g^{-1}hg\in H\end{cases}$$

در واقع: فرض کنید $H\lhd G$. آنگاه هر عضو $h\in H$، طبیعتاً به یک کلاس C_i از G تعلق دارد، $h\in C_i$. اما روابط بالا می گویند هم کلاسی های h در C_i هم متعلق به H هستند. حال به ازای هر $g\in G$، از طرفی $g^{-1}hg\in H$ (چون H نرمال است) و از طرف دیگر $g^{-1}hg\in C_i$ است (چون این تعریف کلاس هم ارزی گروه است). پس $h\in C_i\Rightarrow g^{-1}hg\in H,\ \forall g\in G$.

به بیان دیگر: اعضای هم کلاس هر عضو $h\in H\lhd G$، خود متعلق به H هستند.

$V_4\lhd A_4\lhd S_4$

مثال: چگونه می توان فهمید که یک گروه، زیرگروه نرمال دارد یا این که ندارد؟



	غیرممکن
1+3 ✓	1+6+6
1+6	1+6+8
1+8	1+3+6+8
1+3+6	1+6+6+8
1+3+8 ✓	1+3+6+6

قضیه لاگرانژ: تعداد اعضای گروه متناهی مضربی از تعداد اعضای زیرگروه آن است.

$$\frac{n(G)}{n(H)}\in\mathbb{N}$$

تمرین ۶.۱: جدول مشخصه گروه A_5 را به دست آورید و مشخص کنید که آیا زیرگروه نرمال دارد یا ساده است.

مثال: ساخت جدول مشخصه گروه کواترنیونیک.

$\{1, -1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

Q	n_c		1	$1'$ (a)	$1''$ (b)	$1'''$ (c)	2 (d)
	1	1	1	1	1	1	2
$\mathbb{Z}_2$	1	-1	1	$\cancel{\pm}1$	$\cancel{\pm}1$	$\cancel{\pm}1$	$\cancel{\pm}2$
$\mathbb{Z}_4$	2	$\pm i$	1	1	-1	-1	0
$\mathbb{Z}_4$	2	$\pm j$	1	-1	1	-1	0
$\mathbb{Z}_4$	2	$\pm k$	1	-1	-1	1	0

1 | -1 | $j, -j$ | $i, -i$ | $k, -k$

$x^{-1}(-1)x = -1$

$j^{-1}(i) \cdot j$

$-j \cdot k = -i$

$1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8$

$\sum_r n_c |\chi^{(r)}(c)|^2 = N(G)$

$1 + |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = \frac{8}{2} = 4$

$4 + |z|^2 = 8$

$1 + x + y + z = 0$

مثال: ساخت جدول مشخصه گروه S_5.

1 2 3 4 5

$(1)(2)(3)(4)(5) = ()$

$(xx)(x)(x)(x) = (xx)$

S_5		n_c	1	$\bar{1}$ (a)	4 (b)	$\bar{4}$ (c)	5 (d)	$\bar{5}$ (e)	6 (f)	
	$()$	1	1	1	4	4	5	5	6	
$\mathbb{Z}_2$	(xx) فرد	$\binom{5}{2} = 10$	1	-1	2	-2	1	-1	0	→ تعامد سطرهای ۱ و ۲
$\mathbb{Z}_3$	(xxx)	$\binom{5}{3} \times 2! = 20$	1	1	1	1	-1	-1	0	→ تعامد سطرهای ۲ و ۳
$\mathbb{Z}_4$	$(xxxx)$ فرد	$\binom{5}{4} \times 3! = 30$	1	-1	0	-0	-1	1	0	→ تعامد سطرهای ۳ و ۴
$\mathbb{Z}_2$	$(xx)(xx)$	$\binom{5}{2}\binom{3}{2}/2 = 15$	1	1	0	0	1	1	-2	→ تعامد سطرهای ۱ و ۵
$\mathbb{Z}_5$	$(xxxxx)$	$4! = 24$	1	1	-1	-1	0	0	1	→ تعامد سطرهای ۵ و ۶
$\mathbb{Z}_6$	$(xx)(xxx)$ فرد	$\binom{5}{2} \times 2! = 20$	1	-1	-1	$+1$	1	-1	0	→ تعامد سطر ۶

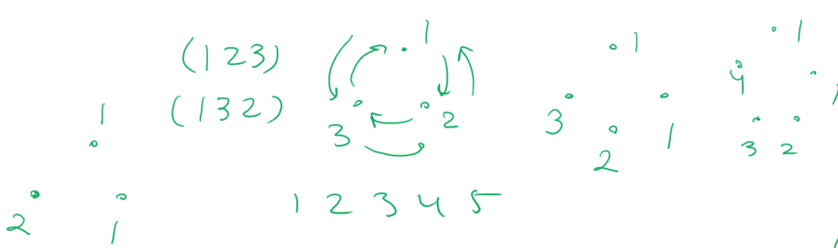
$1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = 120$

ناتریوف

$\bar{4} = 4 \otimes \bar{1}$

(123)

(132)



1 2 3 4 5

(1234)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{5\times 5} \rightarrow \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}_{4\times 4} (1)$$

	1 2 3 4 5		
$(12)(345)$	2 1 4 5 3	$1 \cdot 5^2$	5
( )	1 2 5 3 4	$10 \cdot 3^2$	3
( )	2 1 3 4 5	$20 \cdot 2^2$	2
( )	1 2 4 5 3	$30 \cdot 1^2$	1
( )	2 1 5 4 3	$15 \cdot 1^2$	1
( )	1 2 3 4 5	0	0
		0	0

240

$2(120)$

$\sum h_r^2 = 2$

$h_r = 1$

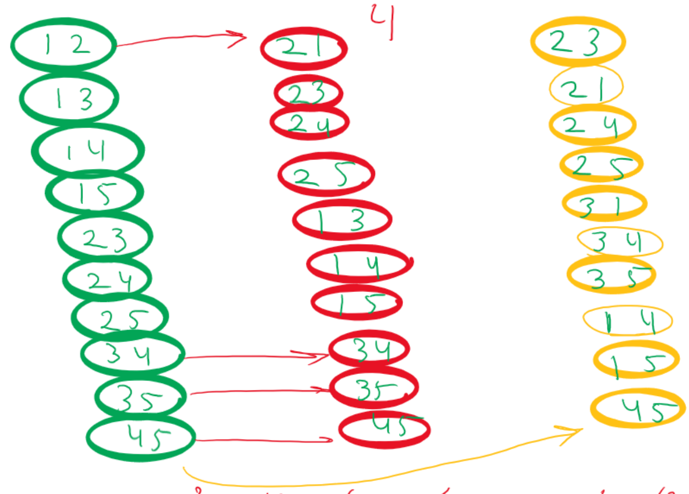
$\frac{1}{120}(1 \cdot 1 \cdot 5 + 10 \cdot 1 \cdot 3 + 20 \cdot 1 \cdot 2 + 30 \cdot 1 \cdot 1 + 15 \cdot 1 \cdot 1 + 0 + 0) = 1$

$$\underbrace{d^2+e^2+f^2}=120-1-1-16-16=86$$

$(12) \rightarrow$

10×10

(123)



$1\cdot(10)^2$

$10\cdot(4)^2$

$20\cdot(1)^2$

$30\cdot(0)^2$

$15\cdot(2)^2$

$24\cdot(0)^2$

$20\cdot(1)^2$

$360=120\times 3$

$\sum n_r^2=3$

پس سه تا تاثیر کاهش ناپذیر، هر کدام یک بار ظاهر شده است.

چک کنید که 1 یک بار، $\bar{1}$ هیچ بار در 4 یک بار آمده‌اند پس تاثیر 5 داریم! در 5 می‌شود در 10 بعدی

$$\begin{pmatrix}10\\4\\1\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\\1\\0\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\-1\\-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

منهای رد 1 و 4

به روش قبلی، $\bar{5}=5\otimes\bar{1}$

هم یک تاثیر است

برای f

$$1^2+1^2+4^2+4^2+5^2+5^2+f^2=120$$

$\underline{f=6}$ و ابعادش را از تعامد سطرها ستون‌ها به راحتی بدست می‌آید