بسم الله الرحمن الرحیم

## فصل دوم : گروه های متناهی

۹۸،۱۲،۲۲

$S_3$

$3!$

$g_0(RGB) = RGB$     $g_1(RGB) = RBG$

$g_2(RGB) = GRB$     $g_3(RGB) = GBR$

$g_4(RGB) = BRG$     $g_5(RGB) = BGR$

| $\circ$ | $g_0$ | $g_1$ | $g_2$ | $g_3$ | $g_4$ | $g_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g_0$ | $g_0$ | $g_1$ | $g_2$ | $g_3$ | $g_4$ | $g_5$ |
| $g_1$ | $g_1$ | $g_0$ | $g_3$ | $g_2$ | $g_5$ | $g_4$ |
| $g_2$ | $g_2$ | $g_4$ | $g_0$ | $g_5$ | $g_1$ | $g_3$ |
| $g_3$ | $g_3$ | $g_5$ | $g_1$ | $g_4$ | $g_0$ | $g_2$ |
| $g_4$ | $g_4$ | $g_2$ | $g_5$ | $g_0$ | $g_3$ | $g_1$ |
| $g_5$ | $g_5$ | $g_3$ | $g_4$ | $g_1$ | $g_2$ | $g_0$ |

$g_1 \circ g_1(RGB) = g_1(RBG) = RGB$

$g_1 \circ g_2(RGB) = g_1(GRB) = GBR$

$g_1 \circ g_3(RGB) = g_1(GBR) = GRB$

$g_1 \circ g_4(RGB) = g_1(BRG) = BGR$

$g_1 \circ g_5(RGB) = g_1(BGR) = BRG$

مثال: همه زیرگروه های $S_3$ را بدست آورید.

$\{g_0\}$, $S_3$

$\{g_0, g_1\}$, $\{g_0, g_2\}$, $\{g_0, g_5\} \rightarrow \mathbb{Z}_2$

$\{g_0, g_3, g_4\} \rightarrow \mathbb{Z}_3 \rightarrow A_3$

$g_1:$ $RGB$

$RBG \rightarrow (R)(GB)$ : $S_2 = \mathbb{Z}_2$

$g_2:$ $RGB$

$GRB \rightarrow (RG)(B)$ : $S_2 = \mathbb{Z}_2$

$g_5:$ $RGB$

$BGR \rightarrow (RB)(G)$

$S_2 = \mathbb{Z}_2$

$g_3:$ $RGB$

$$\left.\begin{array}{l} GRB \rightarrow (GR)(B) \\ GBR \rightarrow (G)(BR) \end{array}\right\} \times 2$$

$g_4:$ $RGB$

$$\left.\begin{array}{l} RBG \rightarrow (R)(GB) \\ BRG \rightarrow (RB)(G) \end{array}\right\} \times 2$$

$\underline{A_n}$ : جایگشت های زوج $S_n$. پس تعداد اعضائش $\frac{n!}{2}$ است.

تمرین: جدول ضرب گروه $S_4$ را بدست آورید. تمامی زیرگروه های آن را شناسایی کنید. نشان دهید دو گروه ۴ عضوی $\mathbb{Z}_4$ و $K_4$، زیرگروه $S_4$ هستند.

تمرین: نشان دهید هر گروه $n$ عضوی، با زیرگروهی از $S_n$ یکریخت هستند.

| | $g_0$ ... $g_n$ |
|---|---|
| 1 | |
| ⋮ | |
| $g_i$ | $\underline{g_i g_0 \cdots g_i g_n}$ |
| | $(g_0, g_1, \cdots g_n)$ |

$g_i \in S_n$

$\mathbb{Z}_2 = S_2$

$\mathbb{Z}_3 = A_3 < S_3$

$A_4 < S_4$    $\mathbb{Z}_4, V_4 < S_4$

$n!$   $S_n$

$n$   $G_n$

دو عضو گروه $S_5$ : $g_i=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&3&5\end{pmatrix}$ , $g_j=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$

$$g_i \circ g_j = \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&3&5\end{pmatrix}}_{(1)\cancel{(2)}(34)\cancel{(5)}}\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}}_{(123)(45)} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&1&5&3\end{pmatrix}$$

$$(123)(45) = \underbrace{(34)(123)}(45)$$

$(43) = (34)^{-1} = (34) \notin A_5$ $\quad (231)$ $\quad (12)(23)(45)$ $\quad \notin A_5$

$(43)(312)(45)$

$(4312)(45)$

$(3124)(45) = (31245)$

$(43)(31)(12)(45) \in A_5$

even

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 3 | 2 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 1 | 4 | 5 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |

$(312)$

**قضیه**: گروه متناهی $G$، تعداد زوج عضو را در نظر بگیرید. آنگاه، حداقل یک عضو $g_i$ $(g_i \neq g_0)$ وجود دارد به طوری که $g_i^2 = g_0$.

تمرین: نشان دهید گروه $S_n$ $(n \geq 2)$ دارای این خاصیت است. به ازای چه مقادیری از $n$، $A_n$ دارای این خاصیت است؟ برای $A_4$ یک چنین عضوی را پیدا کنید.

- گروه $G$ را در نظر بگیرید. دو عضو $g, g' \in G$ را هم ارز می‌گوییم اگر وجود داشته باشد $f \in G$ به طوری که $\underbrace{g' = f^{-1} g f}$.

Similarity trans.

تمرین: نشان دهید برای هر عضو $g \in G$ ، $g \sim g$ .

نشان دهید اگر $g \sim g'$ ، آنگاه $g' \sim g$ .

نشان دهید اگر $g \sim g'$ و $g' \sim g''$ ، آنگاه $g \sim g''$ .

تعریف رابطه هم ارزی، گروه را به کلاس‌های هم ارزی افراز می‌کند.

مثال: در کلاس $g_0$، فقط خود $g_0$ قرار دارد.

$$g' = f^{-1} g_0 f = f^{-1} f = g_0$$

مثال: اگر $G$ گروه جابجایی باشد، هر عضو یک کلاس تک عضوی تشکیل دهد. (هیچ دو عضوی هم ارز نیستند.)

$$g' = f^{-1} g f = f^{-1} f g = g_0 g = g$$


گروه $D_n$ (Dihedral G.)

گروه تقارن‌های یک $n$ ضلعی منتظم! $2n$ عضوی

$e, R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ دوران

$r_1, r_2, \dots, r_n$ انعکاس

$$R_1^n = e \qquad r_i^2 = e \Rightarrow r_i^{-1} = r_i$$

$$R_1, R_1^2, R_1^3, \dots, R_1^n = e$$

*تمرین: نشان دهید $R, R^{-1}$ هم ارز هستند.

تمرین: نشان دهید گروه $D_n$ به شکل مقابل از دوران $R = R(\frac{2\pi}{n})$ ساخته می‌شود

$$\{e, R, R^2, \dots R^{n-1}, r, Rr, R^2 r, \dots, R^{n-1} r\}$$

- $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ گروه آبلی است. ریشه‌های صحیح معادله $|a|^2=1$ : $\{1,-1\}$

$(\{1,-1\},\cdot)=\mathbb{Z}_2$

- $\mathbb{C}$ $\quad z=a+ib\equiv(a,b)$

تمرین: گروه بودن $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ را بررسی کنید. عنصر خنثی، عنصر وارون نظیر عنصر دلخواه $z$ را بدست آورید.

* همه زیرگروه‌های غیربدیهی $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ را مشخص نمایید.

- یکی از زیرگروه‌ها: $(\{1,-1,i,-i\},\cdot)$ ریشه‌های $|a+ib|^2=1$ $(a,b\in\mathbb{Z})$

تمرین: نشان دهید زیرگروه فوق، یکریخت با $(\mathbb{Z}_4,\oplus)$ است.

## کواترنیون‌ها

$q=a+ib+jc+kd \qquad i^2=j^2=k^2=ijk=-1,\quad ij=-ji=k \quad jk=-kj=i,\quad ki=-ik=j$

$\bar{q}=a-ib-jc-kd \qquad |q\bar{q}|=a^2+b^2+c^2+d^2 \qquad \mathbb{H}=\{a+ib+jc+kd \mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$

تمرین: مشخص کنید آیا $(\mathbb{H}\setminus\{0\},\cdot)$ گروه هست یا نه.

$|q\bar{q}|^2=1$ با ضرایب صحیح $\Rightarrow \{1,-1,i,-i,j,-j,k,-k\}=Q$

- $Q$ و ضرب، گروه کواترنیونی می‌گویند.

تمرین: جدول ضرب $(Q,\cdot)$ را بدست آورید. آیا این گروه یکریخت با $(\mathbb{Z}_8,\oplus)$ است؟

## زیرگروه ناوردا

$(G,\cdot)$ و $H<G$ $\qquad H=\{h_1,h_2,\dots\}$

$g\in G,\ g\notin H \qquad g^{-1}Hg=\{g^{-1}h_ig \mid h_i\in H\}=\{g^{-1}h_1g,g^{-1}h_2g,\dots\}$

مثال: $g^{-1}Hg$ خودش یک زیرگروه است:

بسته بودن) $g^{-1}h_ig,\ g^{-1}h_jg$

$$g^{-1}h_i\underbrace{gg^{-1}}_{e}h_jg=g^{-1}\underbrace{h_ih_j}_{\in H}g\in g^{-1}Hg$$

عنصر خنثی) $e\in H \Rightarrow e=g^{-1}ge=\underset{\mathrm{I}}{g^{-1}eg}\in g^{-1}Hg$

عنصر وارون) $g^{-1}hg\in g^{-1}Hg \quad (g^{-1}hg)^{-1}=g^{-1}h^{-1}(g^{-1})^{-1}=g^{-1}\underbrace{h^{-1}}_{\in H}g\in g^{-1}Hg$ $\blacksquare$

نکته: لزومی ندارد که $H=g^{-1}Hg$!

تمرین: نشان دهید که اگر $G$ یک گروه آبلی (جابجایی) باشد، آنگاه به ازای $\forall g\in G$ $\ g^{-1}Hg=H$.

نکته مهم و تعریف: برعکس گزاره تمرین بالا، لزوماً درست نیست؛ یعنی اگر به ازای همه $g\in G$، $g^{-1}Hg=H$ دلیلی ندارد که گروه جابه‌جایی باشد.

حال، چنانچه زیرگروهی از $G$ این ویژگی را داشته باشد، یعنی $\forall g\in G$، $g^{-1}Hg=H$، آنگاه به آن زیرگروه نرمال می‌گویند. به بیان دیگر: $H$ زیرگروه نرمال $G$ است اگر $H<G$ و $gH=Hg$.

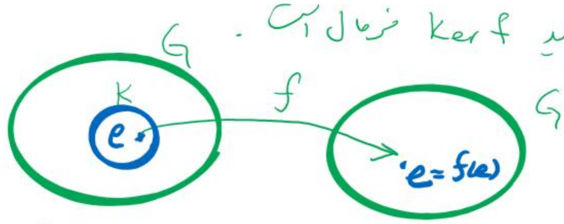
تمرین: نشان دهید $\mathbb{Z}_4$ زیرگروه نرمال $Q$ است. نشان دهید $\mathbb{Z}_2$ زیرگروه نرمال $\mathbb{Z}_4$ است.

نماد: اگر $H$ زیرگروه نرمال $G$ باشد آن را این گونه نمایش می‌دهیم $H \triangleleft G$

- گروهی که زیرگروه نرمال نداشته باشد، گروه ساده (Simple) نامیده می‌شود.

- نکته جالب: گروه [illegible]، این ویژگی را دارد که اگر غیرآبلی باشد، اما نشان می‌دهد $G$ زیرگروه نرمال دارد و ساده نیست!

مثال: فرض کنید $f:G\to G$ همریختی باشد. نشان دهید $\ker f$ نرمال است.




$$f(g_1 g_2)=f(g_1)f(g_2)$$

$$\Rightarrow f(e)=f(e)^2 \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(e)f(e)}_{e}=f^{-1}(e)f(e)^2$$

$$\Rightarrow e_G = ef(e)=f(e)$$

$$h\in K,\ f(h)=e$$

$$\forall g\in G,\ g^{-1}hg \overset{?}{\in} K \Rightarrow f(g^{-1}hg)\overset{?}{=}e$$

$$f(g^{-1}hg)=f(g^{-1}h)f(g)=f(g^{-1})\underbrace{f(h)}_{e}f(g)=f(g^{-1})f(g)=f(\underbrace{g^{-1}g}_{e})=e$$

- آیا این نکته را فهمیدید؟! زیرگروه ناوردا یا نرمال، یعنی زیرگروهی که هم‌ارز با عضوانش درخود زیرگروه باشد!

# زیرگروه نرمال، هم مجموعه ها و گروه خارج قسمت

$n\mathbb{Z}$ : مضارب $n$ : $\{\dots,-2n,-n,0,n,2n,\dots\} \in \mathbb{Z}$

$k \in \mathbb{Z} \quad (-k)+\underline{n\mathbb{Z}}+(k)=n\mathbb{Z}$

$H \triangleleft G \;,\quad g \in G \quad gH=\{g\circ h \mid h \in H\}$

$$3\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z} \;,\; \left\{\begin{array}{ll} 0\in\mathbb{Z} & 0+3\mathbb{Z}=\{\dots,-3,0,3,\dots\}=3\mathbb{Z} \\ 1\in\mathbb{Z} & 1+3\mathbb{Z}=\{\dots,-2,1,4,\dots\} \\ 2\in\mathbb{Z} & 2+3\mathbb{Z}=\{\dots,-1,2,5,\dots\} \\ 3\in\mathbb{Z} & 3+3\mathbb{Z}=\{\dots,-3,0,3,\dots\}=0+3\mathbb{Z} \\ \vdots & \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 0+3\mathbb{Z}=3\mathbb{Z} \\ 1+3\mathbb{Z} \\ 2+3\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$0+3\mathbb{Z}=3\mathbb{Z}$ ← زیرگروه نرمال

$\{1+3\mathbb{Z},\ 2+3\mathbb{Z}\}$ ← هم مجموعه های چپ

Left Cosets

$$g_1,g_2 \in G \qquad (g_1H)(g_2H) \to (g_1h_i)(g_2h_j)=g_1(g_2g_2^{-1})h_ig_2h_j=g_1g_2\underbrace{(g_2^{-1}h_ig_2)}_{\in H}h_j$$

$$g_1h_i \in g_1H \qquad g_2h_j \in g_2H$$

$$=g_1g_2\underbrace{h_0h_j}_{\in H} \in (g_1g_2)H$$

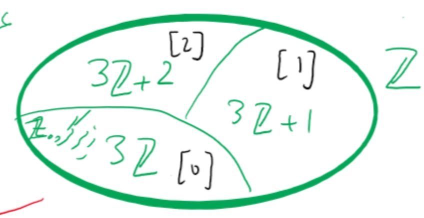
$$\Longrightarrow (g_1H)(g_2H)=(g_1g_2)H$$

$$(k_1+3\mathbb{Z})+(k_2+3\mathbb{Z})=\overbrace{(k_1+k_2)}^{\text{mod}3}+3\mathbb{Z}$$

$$\underline{3\mathbb{Z}}+(k+3\mathbb{Z})=k+3\mathbb{Z} \qquad \{3\mathbb{Z},\ 1+3\mathbb{Z},\ 2+3\mathbb{Z}\}$$

$k_1+k_2 \overset{\text{mod}3}{\equiv} 0 \qquad k_1,k_2$ عضو مادرند

$\underset{\oplus}{\mathbb{Z}_3} \leftarrow \{[0],[1],[2]\}$




$G/H=Q \qquad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_3$ → گروه خارج قسمت  Quotient group

نکته : $Q$ زیرگروه $G$ نیست. اعضای $Q$، زیرمجموعه های $G$ هستند.

نکته : چون $H$ زیرگروه نرمال است پس $gH=Hg$. درنتیجه هم مجموعه های چپ و راست هم با هم یکی هستند.