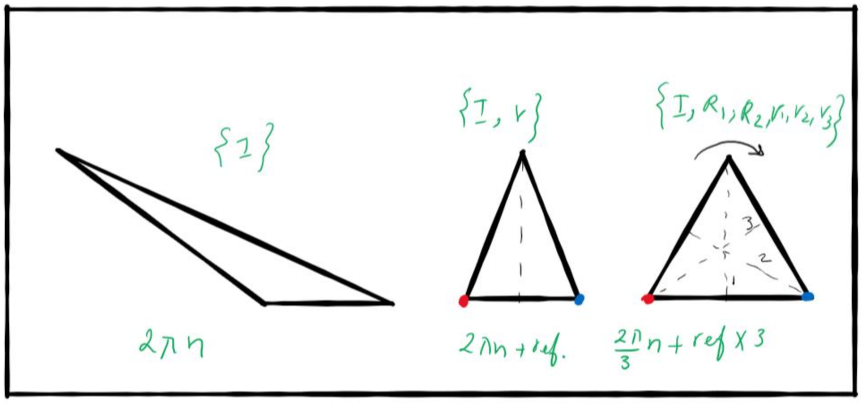
بسم الله الرحمن الرحیم

فصل اول: تقارن و گروه ها

۹۸/۱۲/۱۴

تقارن و تبدیل



$\circ$	I	r
I	I	r
r	r	I

$\{I, r\} \longrightarrow \quad I \circ r = r \quad r \circ I = r \quad r \circ r = I \quad I \circ I = I$

$\{I, R_1, R_2, r_1, r_2, r_3\}$

$\underbrace{e_1 \circ \underbrace{e_2(\triangle)}}$

$\circ$	I	R_1	R_2	r_1	r_2	r_3
I	I	R_1	R_2	r_1	r_2	r_3
R_1	R_1	R_2	I	r_3	r_1	r_2
R_2	R_2	I	R_1	r_2	r_3	r_1
r_1	r_1	r_2	r_3	I	R_1	R_2
r_2	r_2	r_3	r_1	R_2	I	R_1
r_3	r_3	r_1	r_2	R_1	R_2	I

$\circ$	I	r_1
I	I	r_1
r_1	r_1	I

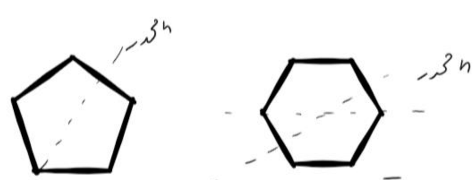
تمرین: جدول فوق را برای یک مربع بدست آورید.

نکته: این جدول صرف تبدیلاتی روی مثلث متساوی الاضلاع است که شکل و وضعیت آن را ناوردا Invariant نگاه می دارند.

جدول، نمایش مجرد یک گروه است. اما اعضای گروه می توانند به عنوان تبدیلات روی یک موجود یا فضای دیگر دیده شوند.

$\circ$	g_0	g_1	g_2	g_3
g_0	g_0	g_1	g_2	g_3
g_1	g_1	g_0	g_3	g_2
g_2	g_2	g_3	g_0	g_1
g_3	g_3	g_2	g_1	g_0

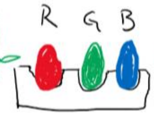
تمرین: جدول روبرو می تواند به عنوان گروه تقارنی کدام شکل دو بعدی باشد؟



$\frac{2\pi}{n}$: n تا (با احتساب I) $\frac{2\pi}{n}$: n تا (با احتساب I) $\Rightarrow$ 2n عضوی

- n - ضلعی منتظم

مثال: گروه تقارنی یک دایره چگونه است؟



تمرین: جدول گروه تقارنی تبدیلات جابجایی سه تخم مرغ را پیدا کنید. (S_3) (راهنمایی: g_1: RGB → RBG)

تقارن در فیزیک

- تبدیلاتی در فیزیک که بسیار جالب‌اند کمیت‌هایی را ناوردا نگاه می‌دارند.

به عنوان مثال اولیه، تبدیلات گالیله، قانون دوم نیوتن را ناوردا نگاه می‌دارد. تبدیلات گالیله چیزی نیست جز تبدیل دستگاه مختصات بین دو ناظر لخت. پس به یک تعبیر، تبدیلات گالیله گروه تقارنی قانون دوم نیوتن است و این به این معنی است که ناظرهای لخت، قانون دوم نیوتن و پدیده‌ها را یکسان می‌بینند.

- تمرین: نظر ناظرها در مورد قانون سوم نیوتن چیست؟

تعریف مجرد گروه

Set → operation

$(G, \circ) \longrightarrow g_\alpha$ یا $g(\alpha)$ یا g

0- $\forall g_\alpha, g_\beta \in G \quad g_\alpha \circ g_\beta \in G$ closure = بسته بودن

1- $\forall g_\alpha, g_\beta, g_\gamma \in G \quad (g_\alpha \circ g_\beta) \circ g_\gamma = g_\alpha \circ (g_\beta \circ g_\gamma)$ Associativity = شرکت‌پذیری

2- $\exists \overset{(g_0)}{e} \in G, \forall g_\alpha \in G$ st. $e \circ g_\alpha = g_\alpha \Longrightarrow g_\alpha \circ e = g_\alpha$ Existance of the identity = یکه‌دار

3- $\forall g_\alpha \in G, \exists g_\beta \in G \ (g_\alpha^{-1} \equiv g_\beta)$ st. $g_\alpha^{-1} \circ g_\alpha = e \Longrightarrow g_\alpha \circ g_\alpha^{-1} = e$ Existance of the inverse = وجود عضو وارون

*4- $\forall g_\alpha, g_\beta \in G \quad g_\alpha \circ g_\beta = g_\beta \circ g_\alpha$ Commutativity = جابجایی

https://en.wikipedia.org/wiki/Group_(mathematics)

- گروه:
  - مجرد!
  - عمل گروه بر یک فضا: تبدیلات، گروه تبدیلات، ناورداها، ... (فیزیک)

- نکته: شرکت‌پذیری، وقتی عمل گروه بر یک فضا بررسی می‌شود، بدیهی به نظر می‌آید!

$g_\gamma : a \to b \qquad g_\beta : b \to c \qquad g_\alpha : c \to d$

$$\underbrace{(\underbrace{g_\alpha \circ g_\beta}_{: b \to d}) \circ g_\gamma}_{a \to d} = \underbrace{g_\alpha \circ (\underbrace{g_\beta \circ g_\gamma}_{: a \to c})}_{: a \to d}$$

مثال: ساخت گروه از روی تقارن فضا.

g_0

g_1

$g_i \circ g_j = g_{i+j}$

$(\mathbb{Z}, +)$

نکته: تعداد اعضای گروه
- متناهی — S_3
- نامتناهی ولی شمارا — $(\mathbb{Q}, +)$
- نامتناهی و ناشمارا — $(\mathbb{R}, +)$

- مثال: $(R^+,\cdot)$ ، $(R\setminus\{0\},\cdot)$

- دوران در صفحه دوبعدی

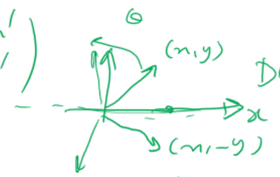
$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \longrightarrow R(\theta_1)\cdot R(\theta_2)=R(\theta_1+\theta_2)$$

$$\theta_1+\theta_2 \overset{2\pi}{\equiv} \theta_3 \qquad \theta\in[0,2\pi)$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=R(\theta)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\, x-\sin\theta\, y\\ \sin\theta\, x+\cos\theta\, y\end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \longleftarrow D(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$D(\theta)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$



- دوران در فضای سه بعدی (غیرجابجایی) ،

$$\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & -1\end{pmatrix}$$

- تبدیلات لورنتس ★ $\quad -t^2+x^2+y^2+z^2$

- $(\{-1,1\},\cdot)$

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

- $(\{0,1\},\oplus)$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\longleftarrow \mathbb{Z}_2$

- $(\mathbb{Z}_n,\oplus)$

$\oplus$	0	1	…	n-1
0	0	1	…	n-1
1	1	2	n-1	0
2	2	…		
⋮				
n-1	n-1			

- نکته: جدول ضرب (Cayley table) یک گروه را به طور منحصر به فرد تعیین می‌کند.

- قضیه: در هر سطر و یا ستون جدول ضرب، هر عضو یک و فقط یک بار می‌آید.

$$g_i\circ g_j=g_i\circ g_k \Rightarrow g_i^{-1}\circ(g_i\circ g_j)=g_i^{-1}\circ(g_i\circ g_k)$$

$$\Rightarrow (g_i^{-1}\circ g_i)\circ g_j=(g_i^{-1}\circ g_i)\circ g_k \Longrightarrow g_j=g_k \quad \blacksquare$$

	g_j	g_k
g_i	×	×

$\circ$	e
e	e

$\circ$	e	g
e	e	g
g	g	e

$\circ$	e	g_1	g_2
e	e	g_1	g_2
g_1	g_1	g_2	e
g_2	g_2	e	g_1

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\mathbb{Z}_3$

$\circ$	e	g_1	g_2	g_3
e	e	g_1	g_2	g_3
g_1	g_1	g_2	g_3	e
g_2	g_2	g_3	e	g_1
g_3	g_3	e	g_1	g_2

$\mathbb{Z}_4$

G	e	g_1	g_2	g_3
e	e	g_1	g_2	g_3
g_1	g_1	e	g_3	g_2
g_2	g_2	g_3	e	g_1
g_3	g_3	g_2	g_1	e

$K_4 \simeq V_4$

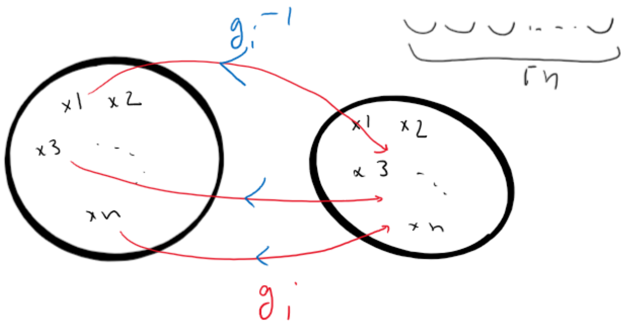
$\circ$	e	g_1	g_2	g_3
e	e	g_1	g_2	g_3
g_1	g_1	g_3	e	g_2
g_2	g_2	e	g_3	g_1
g_3	g_3	g_2	g_1	e

تمرین: نشان دهید جدول بالا راست $\mathbb{Z}_4$ است.

جایگشت S_n:

تعداد $n!$

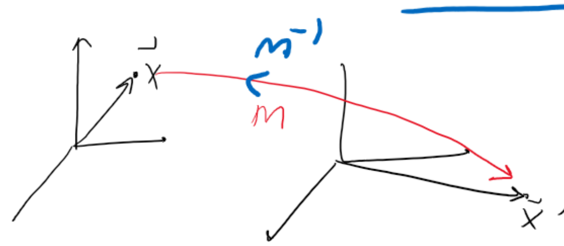
هر $g_i \in S_n$ شکل یک نگاشت



ماتریس های معکوس پذیر $n\times n$

تقسیم S_n به حالت بسته
تعداد جفت دوبی تایی

$$\begin{pmatrix} x^i \end{pmatrix}_{n\times 1} \in \mathbb{R}^n \qquad \vec{x}' = M\vec{x} \qquad \vec{x} = M^{-1}\vec{x}'$$



$GL(n,\mathbb{R})$

$M_{n\times n}$, $\det M_{n\times n} \neq 0$

$M, M' \in GL(n,\mathbb{R}) \qquad \det(MM') = \det M \det M' \neq 0$

$SL(n,\mathbb{R})$

$\det M = 1$, $M_{n\times n}$

$M, M' \in SL(n,\mathbb{R}) \qquad \det(MM') = \det M \det M' = 1$

$O(n)$

$MM^t = I_{n\times n} \Rightarrow \det(MM^{tr}) = (\det M)^2 = \det I = 1 \qquad M^{-1} = M^t$

$\Rightarrow \det M = \pm 1 \qquad (M_1M_2)^{-1} = (M_1M_2)^{tr}$

$\hookrightarrow \det M = 1$

$SO(n)$

مثال: آیا $\det = -1$ های $O(n)$ گروه هستند؟ البته نیستند

$GL(n,\mathbb{C})$ $\quad M\in GL(n,\mathbb{C})\ ,\quad m_{ij}\in\mathbb{C}$

$SL(n,\mathbb{C})$ $\quad ,\quad \det M=1$

$U(n)$ $\quad m\in U(n) \Rightarrow u^{-1}=u^{+} \Rightarrow \det(uu^{+})=1 \Rightarrow \det u \det u^{+}=1$

$\Rightarrow (\det u)(\det u)^{*}=1 \Rightarrow |\det u|^{2}=1 \Rightarrow \det u=\{1,-1,i,-i\}$

$\downarrow$

$\det=1$ **$SU(n)$**

https://en.wikipedia.org/wiki/General_linear_group

زیرگروه

$(G,\circ)\ ,\ H\subset G \qquad (H,\circ)\ ?$

تعریف دقیق : $(G,\circ)$ ، $H\subset G$.

$G,\{I\}$ زیرگروه بدیهی

$$\forall h_1,h_2\in H \begin{cases} h_1\circ h_2\in H \\ h_1^{-1}\in H\end{cases} \Rightarrow H<G$$

$$\forall h_1,h_2\in H,\ h_1\circ h_2^{-1}\in H$$

مثال : زیرگروه تقارنی دورانی شش‌ضلعی در دوازده‌ضلعی ،

$\mathbb{Z}_3\ ,\ \mathbb{Z}_2\times 3$

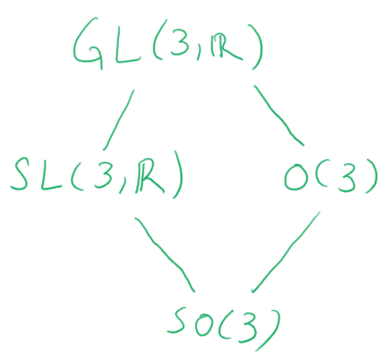
- S_2 زیرگروه S_3 است .

$RG^{B}\to RGB \qquad RGB$

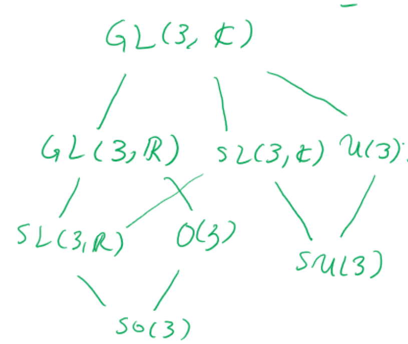
$RG^{B}\to GRB$

تمرین : S_3 چند زیرگروه دارد؟

مثال : ماتریس های 3×3 معکوس پذیر با درایه های حقیقی .



مثال : ماتریس های 3×3 معکوس پذیر :



تمرین : خطوط شکل را کامل کنید .

زیرگروه های دوری

متناهی $(G,\circ) \qquad g\in G \qquad \{g,\ g^2=g\circ g,\ g^3=g^2\circ g,\ \dots\}$

اگر $\exists k$ st. $g^k=I \qquad \{\overset{=g^k}{e},g,g^2,\dots g^{k-1}\}<G$

تمرین : نشان دهید زیرگروه دوری تشکیل شده بیان $\mathbb{Z}_k$ است .

قضیه لاگرانژ : اگر $H<G$ و G n عضو ، H m عضو داشته باشند ، آنگاه n مضربی از m است .

$\circ$	I	R_1	R_2	r_1	r_2	r_3
I	I	R_1	R_2	r_1	r_2	r_3
R_1	R_1	R_2	I	r_3	r_1	r_2
R_2	R_2	I	R_1	r_2	r_3	r_1
r_1	r_1	r_2	r_3	I	R_1	R_2
r_2	r_2	r_3	r_1	R_2	I	R_1
r_3	r_3	r_1	r_2	R_1	R_2	I

مثال: $\mathbb{Z}_4 \not< \mathbb{Z}_6$

مثال: $\{I\}$ $\quad \{R_1, \underset{R_2}{R_1^2}, \underset{I}{R_1^3}\} = \{I, R_1, R_2\}$

$\{R_2, \underset{R_1}{R_2^2}, \underset{I}{R_2^3}\}$ $\qquad \{r_i, \underset{I}{r_i^2}\}$

تمرین: زیرگروه‌های دوری $\mathbb{Z}_4$ کدام هستند؟

نکته: $\mathbb{Z}_p$ که p عدد اول است، هیچ زیرگروه غیربدیهی ندارد.

تمرین: جدول گروه تقارنی مثلث متساوی الاضلاع چه فرقی با S_3 دارد؟

ضرب مستقیم گروه‌ها

$(G, \circ), (F, *)$ $\qquad H = G \otimes F$ $\qquad h = (g, f) \in G \otimes F$ $\qquad (H, \cdot)$

$$\left.\begin{array}{l}(g_1, f_1) \in H \\ (g_2, f_2) \in H\end{array}\right\} \quad (g_1, f_1) \cdot (g_2, f_2) = (g_1 \circ g_2, f_1 * f_2)$$

$$e_H = (e_G, e_F) \qquad h^{-1} = (g^{-1}, f^{-1})$$

مثال: $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$:

$$H = \{\underbrace{(1, 1)}_{A}, \underbrace{(1, -1)}_{B}, \underbrace{(-1, 1)}_{C}, \underbrace{(-1, -1)}_{D}\}$$

$$B \cdot C = (1, -1) \cdot (-1, 1) = (-1, -1) = D$$

$$A \cdot B = (1, 1) \cdot (1, -1) = (1, -1) = B$$

$\cdot$	A	B	C	D
A	A	B	C	D
B	B	A	D	C
C	C	D	A	B
D	D	C	B	A

$$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 = K_4$$

همریختی و یکریختی

$(G, \circ), (F, *)$ $\qquad f: G \to F$ $\quad$ S.t. $\quad \underset{\in F}{f(g_1)} * \underset{\in F}{f(g_2)} = f(g_1 \circ g_2)$

همریختی یا Homomorphism: حافظ عمل

مثال: - $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_2, \cdot)$

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_2 \qquad f(x) = \operatorname{Sgn}(x)$

- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}^+, \cdot)$

$g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \qquad g(k) = e^k$

$$g(k_1 + k_2) = e^{k_1 + k_2} = e^{k_1} \cdot e^{k_2} = g(k_1) \cdot g(k_2)$$

- $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^+, \cdot)$

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \qquad h(x) = e^x$

h^{-1}

در مثال اول بالا، f یک به یک نیست ولی پوشاست، g یک به یک است ولی پوشا نیست و h یک به یک و پوشاست.
بر فقط h ایزومورفیسم دارد.
- h تناظر یک به یک بین دو گروه و در عین حال حافظ عمل است: Isomorphism یک‌ریختی.

نکته: دو گروه یک‌ریخت به صورت مجرد، از هم قابل تشخیص نیستند (به یک معنی جدول ضرب یکسانی دارند).

مثال: $(\{-1,1\}, \cdot)$ و $(\{0,1\}, \oplus)$ یک‌ریخت (Isomorphic) هستند. به هر دو $\mathbb{Z}_2$ می‌گوییم.

مثال: ماتریس‌های متعامد با دترمینان واحد: $SO(2)$
و اعداد مختلط طول واحد: $U(1)$

$f: SO(2) \to U(1)$

$$f\left(\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\right) = e^{i\varphi}$$

نکته: ساده‌ترین مثال $\mathbb{Z}_n$، باقی‌مانده تقسیم اعداد صحیح بر n است. از هر عدد به عدد بعدی بروم انتقال باقی‌مانده یک واحد افزایش می‌یابد.

مثال: $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ از چهار عضو، فقط دوتا!

$$(0,0) \xrightarrow{\mathbb{1}=(1,1)} (1,1) \xrightarrow{\mathbb{1}} (2,2)=(0,0)$$

$$(0,1) \longrightarrow (1,2)=(1,0) \longrightarrow (2,1)=(0,1)$$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4=0$$

$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \leftrightarrow K_4$ یک‌ریخت

$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \leftrightarrow \mathbb{Z}_4$ یک‌ریخت نیست

مثال: $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3$

$$\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}$$

$$(0,0) \to (1,1) \to (0,2) \to (1,0) \to (0,1) \to (1,2) \to (0,0)$$

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 0$$

$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \leftrightarrow \mathbb{Z}_6$ یک‌ریخت

نکته: اگر p و q نسبت به هم اول نباشند، آنگاه $\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_q \neq \mathbb{Z}_{pq}$

گروه مادولار

$$\underset{T}{z} \to \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1, \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad M\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

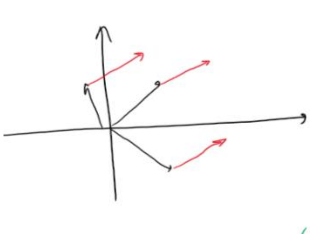
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

گروه آفاین (مستوی)

$$M = HU \longrightarrow M = SO \longrightarrow M_{n\times n}, \ \det M \neq 0$$

[illegible] ← S — O → دوران (+ انعکاس)

انتقال؟



$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} M_{n\times n} & \vec{b} \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right)}_{(n+1)\times(n+1)} \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \hdashline 1 \end{pmatrix}}_{(n+1)\times 1} = \begin{pmatrix} M\vec{x}+\vec{b} \\ \hdashline 1 \end{pmatrix}$$

در فضای $\mathbb{R}^n$

$A\vec{x} + \vec{b}$

تمرین: نشان دهید ماتریس‌های مستوی با عمل ضرب ماتریس‌ها گروه تشکیل می‌دهند.
آیا این گروه یک گروه جابه‌جایی هست یا نه؟