بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمات لازم برای نظریه گروه ها

۹۸/۱۲/۱۱

توابع ضرب شده از ماتریس ها

$$f(M) = \sum a_k M^k$$

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k \qquad \cancel{\Delta}: \ e^{M_1} e^{M_2} \neq e^{M_1 + M_2}$$

M: قطری‌شدنی $\Rightarrow \exists S \quad M' = S^{-1} M S = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (قطری)

$$\Rightarrow M^k = (S M' S^{-1})^k = S M' \underbrace{S^{-1} S}_{1} M' S^{-1} \cdots S M' S^{-1} = S M'^k S^{-1}$$

$$\Rightarrow f(M) = \sum a_k M^k = \sum a_k S M'^k S^{-1} = S f(M') S^{-1}$$

$$M'^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots \lambda_n^k) \Longrightarrow f(M') = \sum a_k M'^k = \sum a_k \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots \lambda_n^k)$$

$$= \mathrm{diag}\left(\sum a_k \lambda_1^k, \dots, \sum a_k \lambda_n^k\right) = \mathrm{diag}\left(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)\right)$$

$$\mathrm{tr}\, f(M') = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)$$

رابطه ای مفید

- $\det M = \det (S M' S^{-1}) = \det M' = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$
- $\log \det M = \log\left(\prod_{k=1}^{n} \lambda_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \log \lambda_k$
- $\log M = S \log M' S^{-1}$
- $\mathrm{tr} \log M = \mathrm{tr}(S \log M' S^{-1}) = \mathrm{tr} \log M' = \sum_{k=1}^{n} \log \lambda_k$

$$e^{\cdots} = e^{\cdots} \Longrightarrow \det M = \exp(\mathrm{tr} \log M)$$

وردش گیری از رابطه فوق:

$$\delta \det M = \delta \exp(\mathrm{tr} \log M) = \exp(\mathrm{tr} \log M)\, \delta\, \mathrm{tr} \log M$$

$$= \det M \ \mathrm{tr}\, \delta \log M = \det M \ \mathrm{tr}(M^{-1} \delta M) = \det M\, (M^{-1})_{ij} (\delta M)_{ji}$$

ضرب مستقیم ماتریس ها

$A_{mn}\,,\,B_{pq} \qquad (A\otimes B)_{mp,nq} \longrightarrow A\otimes B \equiv \left(a_{ij}B\right)$

$! :\ A\otimes B \neq B\otimes A$

مثال : $\sigma_2\otimes\sigma_1\ ,\ \sigma_1\otimes\sigma_2$

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}_{2\times2}\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}_{2\times2}\quad \sigma_1\otimes\sigma_2=\begin{pmatrix}0\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\\ 1\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}_{4\times4}=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2\otimes\sigma_1=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A_{n\times n},B_{n\times n},C_{m\times m},D_{m\times m}\longrightarrow \underbrace{(A\otimes C)}_{nm\times nm}\underbrace{(B\otimes D)}_{nm\times nm}=\underbrace{(AB)}_{n\times n}\otimes\underbrace{(CD)}_{m\times m}$$

*تمرین : رابطه فوق را بدست آورید.

https://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker_product

نوتاسیون دیراک

$|v\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix}v^i\\ \\ \end{pmatrix} \qquad \langle v| \longleftrightarrow \left(\ v_i\ \right) \qquad \langle v|u\rangle = v_i u^i$

$A^i{}_j = (a_{ij})$

مثال : $A^i{}_j u_i v^j$: $\left(\ u_i\ \right)\left(A^i{}_j\right)\begin{pmatrix}v^j\end{pmatrix}=\left(\ \right)_{1\times1}$

نکته : در فضای اعداد حقیقی $v_i=v^i$ ولی در اعداد مختلط $v_i=v^{i*}$ ، برای مثبت تعریف شدن ضرب داخلی.

$$\langle v|v\rangle = v_i v^i = \sum_i v^{i*}v^i = \sum_i |v^i|^2 \qquad \begin{pmatrix}1\\ \vdots\end{pmatrix}\longrightarrow(1,0,0,\dots)$$

$$\vec{V}=v^i\hat{e}_i \longrightarrow |\vec{V}\rangle = v^i|e_i\rangle \longrightarrow \left(e_1\ e_2\ \cdots\ e_n\right)\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\ \vdots\\ v^n\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \langle\vec{V}| = v_j\langle e^j| \longrightarrow \left(v_1\ v_2\ \dots\ v_n\right)\begin{pmatrix}e^1\\e^2\\ \vdots\\ e^n\end{pmatrix}$$

$\langle e^i|e_j\rangle = \delta^i{}_j$ پایه های متعامد

$$\Rightarrow \langle e^j|v\rangle = v^i\langle e^j|e_i\rangle = v^i\delta^j{}_i = v^j$$

$$\Rightarrow |v\rangle = v^i|e_i\rangle = \langle e^i|v\rangle|e_i\rangle = \underbrace{|e_i\rangle\langle e^i|}_{1}v\rangle$$

$$\langle e^i|A|e_j\rangle = A^i{}_j \qquad 1=|e_i\rangle\langle e^i| \qquad (0\cdots1\cdots0)\left(\ i\text{th}\ \right)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\end{pmatrix}\to A^i{}_j$$

تمرین : AB

$$(AB)^i{}_j = \langle e^i|A\underbrace{B}_{1}|e_j\rangle = \langle e^i|A|e_k\rangle\langle e^k|B|e_j\rangle = A^i{}_k B^k{}_j$$

نکته : در نوتاسیون دیراک، ماتریس ها به طور کلی نمایش داده می شوند و در پایه خاص نوشته نشده اند.

تجزیه قطبی

$z=re^{i\theta}$ شبیه $M = HU$

هرمیتی ← H ، U → یکانی

تمرین. $MM^\dagger$ هرمیتی است و ویژه مقادیر آن نامنفی هستند.

$$D^2 = V^\dagger (MM^\dagger) V \Rightarrow MM^\dagger = V D^2 V^\dagger = \underbrace{(VDV^\dagger)}_{H=H^\dagger}(VDV^\dagger) = H^2$$

D ← قطری حقیقی

$$U \equiv H^{-1}M \longrightarrow UU^\dagger = (H^{-1}M)(H^{-1}M)^\dagger = H^{-1}MM^\dagger H^{-1}$$

$$= H^{-1}H^2H^{-1} = 1$$ پس U یکانی است

$$\Rightarrow M = HU$$

* تمرین: در حالتی که یکی از ویژه مقادیر H صفر باشد چه می توان گفت؟

سری تیلور

https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series

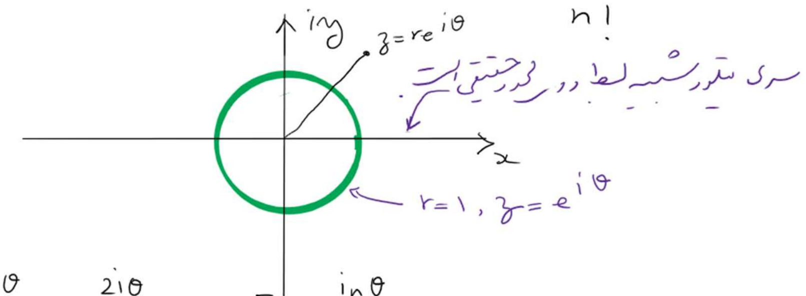
$$f(x) = \sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$$f(x)\big|_{x=0} = a_0 \,,\quad f'(x)\big|_{x=0} = a_1 \qquad f''(x)\big|_{x=0} = 2a_2 \,, \cdots$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$\longrightarrow \begin{cases} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \\ z = x+iy = re^{i\theta} \end{cases}$$



$$f(e^{i\theta}) = a_0 + a_1 e^{i\theta} + a_2 e^{2i\theta} + \cdots = \sum a_n e^{in\theta} \equiv g(\theta) \qquad g(\theta+2\pi k) = g(\theta)$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$* \quad \int_0^{2\pi} dx\, e^{inx} e^{imx} = \frac{e^{i(n+m)x}}{i(n+m)}\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$ یا $n=-m \Rightarrow \int = 2\pi$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{imx} = \delta_{n,-m}$$

$$\rightarrow \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-im\theta} g(\theta) = \int_0^{2\pi} a_0 e^{-im\theta} d\theta + \int_0^{2\pi} a_1 e^{i(-m+1)\theta} d\theta + \cdots + \int_0^{2\pi} a_n e^{i(-m+n)\theta} d\theta + \cdots$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-im\theta} g(\theta) = 2\pi a_m \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-in\theta} g(\theta)}$$

☆ $$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-in\theta} f(e^{i\theta})$$

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta \Rightarrow f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi}\oint \frac{dz}{iz}(e^{i\theta})^{-n} f(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz}$$

Cauchy Integral Formula

- $e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$