

۱- در عالمی بسته (هندسه کروی $k = +1$ ، الف) نشان دهید کل عمر عالم از مه‌بانگ تا فروپاشی بزرگ (big crunch) از رابطه $T = \frac{2}{c} \int_0^{a_{max}} \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2} \rho a^2 - 1}}$ بدست می‌آید. ب) مقدار ماکزیمم ضریب مقیاس، a_{max} ، را بر حسب چگالی ماده بدست آورید. ب) اگر کل جرم عالم M و نوع آن غیرنسبیتی باشد، مقدار قسمت ب و الف را بر حسب M حساب نمایید. (نکته: تمرین ۸ سری دوم تمرینها فراموش نشود!)

۲- تابعیت چگالی ماده غالب در عالم با زمان کیهانی را برای عالمی با هندسه فضایی تخت بدست آورید. چگالی ماده را به شکل $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ فرض کنید.

۳- متریک رابرتسون-واکر را برای عالمی با هندسه فضایی تخت در نظر بگیرید. با تعریف زمان $t_c \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$ و جایگذاری در متریک ذکر شده، نشان دهید که این متریک با $k = 0$ ، بطور همدیس تخت است (conformally flat). t_c ، زمان همدیس (conformal time) نامیده می‌شود. بنظر شما بازه‌های این زمان معرف چیست؟

۴- به یاد دارید که با در نظر گرفتن متریک رابرتسون-واکر به شکل $ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right)$ از $d_p(t, r) = a(t) \int_0^r \frac{dr'}{(1-kr'^2)^{1/2}} = a(t)f(r)$ (الف) تابع $f(r)$ را بر حسب انحناى فضا بدست آورید. (هم برای حالتی که $k = 0, \pm 1$ و هم حالتی که $a_0 = 1$) ب) با مشتق‌گیری نسبت به زمان، قانون کلی هابل را بدست آورید. ج) رابطه قسمت ب برای زمان t_0 چه مفهومی دارد؟ د) با توجه به قسمت ج، بگویید اعتبار قانون اصلی ادوین هابل در چه محدوده‌ای است و خطای آن به چه دلیل و از چه مرتبه‌ای است. (این تمرین، در ادامه تمرین ۲ سری اول است. همچنین به تمرین ۱۰ سری سوم مراجعه نمایید.)

۵- فاصله ویژه، فاصله اندازه‌گیری شده در ابرسطحی با زمان ویژه ثابت است و بدلیل سرعت محدود نور، هیچ راه مستقیمی برای اندازه‌گیری آن وجود ندارد. البته، تعاریف دیگری از فاصله وجود دارد که قابل اندازه‌گیری مستقیم هستند. یکی از آنها فاصله درخندگی، یعنی $d_L = (L/4\pi l)^{1/2}$ ، است که در آن L و l برتیب توان ارسالی و توان دریافتی بر واحد سطح منبع (یا شار دریافتی) هستند. با در نظر گرفتن متریک رابرتسون-واکر به شکل مسئله قبل، الف) نشان دهید که با در نظر گرفتن افزایش طول موج و اتساع زمانی ناشی از انبساط عالم، داریم: $d_L = \frac{a_0^2}{a} r$ ب) رابطه‌ای بین فاصله ویژه و فاصله درخندگی را بدست آورید. ج) بروشی مشابه تمرین ۱۰ سری سوم نشان دهید: $d_L = \frac{c}{H_0} \left(z + \frac{1}{2}(1-q_0)z^2 + \dots \right)$ د) با همان ملاحظاتی که در قسمت ب تمرین ذکر شده داشتید، بگویید در چه شرایطی دو جمله اول این رابطه برای تقریب کفایت می‌کند؟

۶- فاصله دیگری که مستقیماً قابل اندازه‌گیریست، فاصله (قطر) زاویه‌ای (angular diameter distance) است. برای اندازه‌گیری قطر ظاهری (عمود بر خط دید) یک منبع، بروشی مشابه هندسه فضایی تخت داریم: $D = d_A \theta$ ، که در آن d_A و θ برتیب فاصله قطر زاویه‌ای و زاویه‌ای که منبع با آن دیده می‌شود هستند. با در نظر گرفتن متریک رابرتسون-واکر به شکل تمرین ۴، الف) نشان دهید که $d_A = ar$ ب) چرا در محاسبه کمیت فوق، بدون در نظر گرفتن انحناى فضا از r (جای $f(r)$ استفاده کردیم؟) ج) رابطه فاصله قطر زاویه‌ای با فاصله ویژه و فاصله درخندگی را بدست آورید.

۷- سعی کنید رابطه $d_L = 10^{1+(m-M)/5}$ pc را بدست آورید و در مورد سابقه تاریخی (خصوصاً تعیین m و M در) این رابطه تحقیق نمایید.

۸- با جمع‌بندی سؤالات (خصوصاً تمرین ۹ و ۱۰ سری سوم و تمرینهای ۴ تا ۷ این سری)، و با توجه به اینکه آنچه توسط ما در زمینه کیهان‌شناسی اندازه‌گیری می‌شود تنها و تنها طول موجهای دریافتی نورهای مختلف است، سلسله مراتبی مشخص کنید که در آن صرفاً با اتکا به اصل کیهان‌شناختی (متریک رابرتسون-واکر) و بدون در نظر گرفتن هیچ‌گونه مدل خاصی، بتوان تمامی کمیت‌های مورد نظر (مثلاً ثابت هابل، H_0 ، پارامتر شتاب کاهنده، $q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}}{H_0^2 a}$ ، تکان (jerk)، $j_0 \equiv \frac{\ddot{\ddot{a}}}{H_0^3 a}$ و شتابزدگی (snap)، $s_0 \equiv \frac{d^4 a / dt^4}{H_0^4 a}$) را بدست آورد و به کمک آن تاریخچه عالم را رصد کرد و سپس مدل‌های مختلف را در تطبیق یا عدم تطبیق با مشاهدات آزمود. سعی کنید تمرین ۶ سری اول را تا مراتب بیشتر و بر حسب کمیت‌های جدید معرفی شده در بالا حساب نمایید. موفق باشید. شجاعی