

۱- همان‌طور که می‌دانید ماکسول معادلات الکترو دینامیک را به گونه‌ای بازنویسی کرد که با معادله پیوستگی سازگار باشد؛ به عبارت دیگر، معادله پیوستگی از معادلات ماکسول بدست می‌آید. الف) با در نظر گرفتن فرم نسبی معادلات ماکسول، یعنی  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$  و  $\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0$ ، معادله پیوستگی را استخراج نمایید. ب) بنظر شما چرا فقط در نوشتن معادله دوم (یعنی  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$ ) نیاز به متریک هست؟ ج) معادلات ماکسول در فضای خمیده بازنویسی نمایید؟ د) معادل معادلات فوق در نسبیت عام چگونه است؟ ه) نشان دهید در نسبیت عام هم معادله پیوستگی از معادلات قسمت د قابل استخراج است. و) فرق معادلات الکترو دینامیک و مشابه آن در نسبیت عام چیست؟

۲- فرض کنید عالم، در طول عمر خود ماده غالب (matter-dominated) و عمر کنونی آن حدود 13.75 بیلیون سال باشد. الف) مشخص کنید  $Z = 0.02, 0.2, 2$  متناظر با چه مقیاسی از عالم و چه زمانی از عمر آن هستند؟ ب) اگر اولین کهکشانها (یا کوازارها) حدوداً ۵۰۰ میلیون سال بعد از مه‌بانگ فرصت تشکیل یافته باشند، نور مشاهده شده آنها چقدر انتقال به قرمز پیدا کرده است؟ ج) ابرنواخترهایی که در فرآیند کشف انبساط شتاب دار عالم (جایزه نوبل ۲۰۱۱) مورد استفاده قرار گرفته بودند، عموماً در  $Z \approx 1$  قرار داشته‌اند. مشخص کنید انفجار آنها حدوداً چند سال پیش اتفاق افتاده است؟

۳- با فرض ماده غالب بودن عالم در طول عمر خود، الف) وقتی عالم یک پنجم ابعاد فعلی را داشت، چگالی مواد مختلف آن چند برابر مقدار فعلی بود؟ ب) وقتی عالم به پنج برابر مقدار فعلی برسد، چگالیه‌ها چه فرقی می‌کند؟

۴- با فرض ماده غالب بودن عالم در طول عمر خود، مشخص کنید افق ذره چقدر است؟ فاصله ویژه فعلی این شعاع با ما چقدر است؟

۵- افق ذره را در عالم دوسویه بدست آورید.

۶- نشان دهید که کهکشان یا کوازاری که با انتقال به سرخ  $Z$  رصد می‌شود، در هنگام ارسال نور دریافتیش، در فاصله زمانی  $t(z) = \int_z^\infty \frac{dz}{H_0(1+z)[\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + (1-\Omega_r-\Omega_m-\Omega_\Lambda)(1+z)^2]^{1/2}}$  از مه‌بانگ قرار داشته است.

۷- الف) نشان دهید در حالت کلی داریم:  $q_0 = \Omega_r + \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda$ . ب) مقدار  $q_0$  را با توجه به مقادیر مشاهده شده چگالیه‌ها تعیین نمایید.

۸- نشان دهید برای حالتی که معادله حالت،  $w$ ، متغیر باشد خواهیم داشت:  $\rho(z) = \rho_0 e^{3 \int_0^z \frac{1+w(z)}{1+z} dz}$ ،  $\rho(t) = \rho_0 e^{-3 \int_{t_0}^t dt H(t)(1+w(t))}$ .

۹- یکی از کمیت‌هایی که مستقل از نظریه‌های گرانشی و مدل‌های مختلف و صرفاً براساس اصل کیهان‌شناختیست، تغییرات زمانی انتقال به سرخ،  $\dot{z} \equiv \frac{dz}{dt_0}$ ، نام دارد.

الف) نشان دهید  $\dot{z} = H_0(1+z) - H(z)$ . ب) تغییرات انتقال به سرخ برای یک کوازار دور دست در یک دوره رصدی ۱۰ ساله حداکثر چقدر خواهد بود؟ ج) بنظر شما چرا در قسمت الف خاص، نمی‌توان  $a_0$  را ثابت فرض کرد؟ کمیت سیر انتقال به سرخ (redshift drift) به شکل  $\dot{v} \equiv \frac{dv}{dt_0} = \frac{cz}{1+z}$  تعریف می‌شود. د) نشان دهید برای عالمی که در آن ماده غالب است،  $\dot{v} < 0$ ، و برای عالمی که ثابت کیهان‌شناختی غالب است،  $\dot{v} > 0$ . ه) بنظر شما این متغیرها چه کمکی به ترسیم تاریخچه عالم می‌نمایند؟ و) با توجه به تاریخچه محتوای غالب عالم، نمودار تقریبی  $\dot{v}$  بر حسب  $Z$  را رسم نمایید.

۱۰- الف) نشان دهید:  $z(t) \approx H_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{1}{2}q_0\right) H_0^2(t_0 - t)^2 + \mathcal{O}(H_0^3(t_0 - t)^3)$ . ب) چرا مراتب بالاتر این بسط قابل صرف‌نظر کردن هستند؟ ج) نشان دهید در تقریب:  $t_0 - t \approx \frac{1}{H_0} \left[ z - \left(1 + \frac{1}{2}q_0\right) z^2 \right]$ . د) نشان دهید فاصله ویژه از رابطه  $d_p \approx \frac{c}{H_0} \left( z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 \right)$  بدست می‌آید. ه) جمله اول رابطه قسمت د، چه رابطه‌ای با قانون هابل دارد؟ و) جمله دوم نشان‌دهنده چیست؟ ز) با استفاده از قسمت د، معادله‌ای برای محاسبه فاصله همراه بر حسب انتقال به سرخ بدست آورید. (راهنمایی قسمت الف: تمرین ۶ سری اول)