

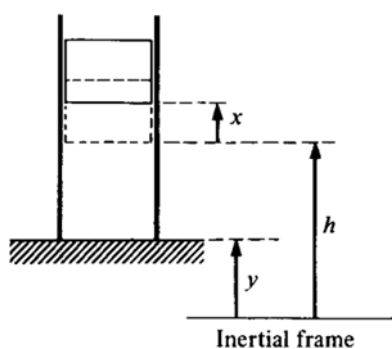
۱- میز هوا: جرم \mathcal{M} درون ستون هوا (گاز با فشار P_0) به مساحت \mathcal{A} قرار گرفته است. جرم در حالت تعادل در ارتفاع h قرار داد (شکل ۱). جا به جایی جرم \mathcal{M} از حالت تعادل با x نشان داده شده است. همچنین بر اثر ارتعاشات کف زمین، انتهای میز از حالت تعادل جابه جا خواهد شد. این جابه جایی با y نشان داده شده است (شکل ۲).

الف) قانون دوم نیوتن را برای جرم \mathcal{M} بنویسید. (از نیرویی که فشار جو به سطح بالایی جسم وارد می کند صرف نظر کنید).

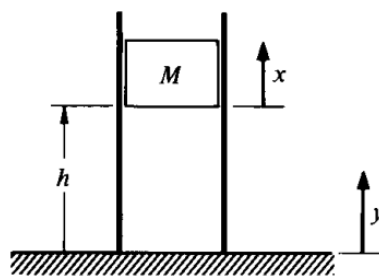
ب) با استفاده از قانون بویل (ثابت بودن حاصل ضرب فشار در حجم گاز کامل)، رابطه ای برای فشار گاز پس از جابه جایی از حالت تعادل بیابید.

ج) با در نظر گرفتن کوچک بودن جابه جایی ها (x و y) نسبت به ارتفاع حالت تعادل، رابطه به دست آمده در قسمت قبل را بسط دهید و با جایگذاری آن در معادله حرکت، معادله حرکت را بازنویسی کنید.

د) ثابت کنید اگر جابه جایی y فرم کسینوسی داشته باشد، معادله حرکت به معادله نوسانگر نامیرا تبدیل می شود.



شکل ۲



شکل ۱

۲- جرمی ۱۰ کیلوگرمی از ارتفاع ۵۰ سانتی متری روی کفه یک ترازو فنری رها می شود و روی آن قرار می گیرید. کفه ترازو در ۱۰ سانتی متر پایین تر از حالت تعادل اولیه دوباره ساکن می شود (به تعادل می رسد).

الف) اگر جرم کفه ترازو ۲ کیلوگرم باشد، ثابت فنر را بیابید.

ب) یک دستگاه میراکننده نصب می‌کنیم تا ترازو را در حداقل زمان و بدون حرکت اضافی به حالت سکون درآورد. یعنی نوسان ترازو باید به طور بحرانی میرا شود. ضریب میرایی لازم را پیدا کنید و معادله حرکت پس از برخورد جرم را بنویسید.

۳- طنابی به طول ثابت در اختیار دارید که یک انتهای آن در مبدا مختصات متصل شده است و شما قرار است انتهای دیگر طناب را به گونه ای روی محور x قرار دهید که بیشترین مساحت ممکن را در صفحه xy اشغال کند. نشان دهید که شکل حاصل یک نیم دایره است.

۴- روش وردش را برای لاگرانژی زیر به کار گیرید:

$$L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$$

الف) ثابت کنید اصل هامیلتونی در صورتی برقرار است که وردش \dot{q}_i و q_i در نقاط انتهایی صفر باشد.

ب) معادله اویلر لاگرانژ به دست آمده را روی لاگرانژی زیر اعمال کنید.

$$L = -\frac{m}{2} \ddot{q}q - \frac{k}{2} q^2$$

منبع سوالات: کتاب‌های کلپنر، گلدشتاین و تیلور

موفق باشید. دانشور