باسمه تعالی

تمرین سری سوم مکانیک تحلیلی ۱

۰۳/۰۸/۲۷

۱- یک توپ کوچک بدون اصطکاک هاکی روی یک کره ثابت (کره حرکت نمی‌کند) به شعاع R قرار داده شده است. با یک ضربه کوچک به توپ، شروع به سر خوردن روی کره می‌کند. پس از طی چه ارتفاع عمودی‌ای، توپ از سطح کره جدا می‌شود؟

۲- یک میله یکنواخت با طول بی نهایت و جرم بر واحد طول μ، روی محور z قرار گرفته است.

الف) نیروی گرانش وارد بر جرم نقطه‌ای m در فاصله ρ از محور z را محاسبه کنید.

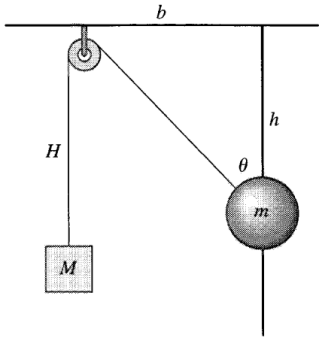
ب) نیروی بخش الف را برحسب مختصات دکارتی بازنویسی کنید و ثابت کنید که $\nabla \times F = 0$.

ج) انرژی پتانسیل متناظر با این نیرو را محاسبه کنید.

۳- طنابی بدون اصطکاک از روزنه میان یک توپ فلزی به جرم m عبور داده شده است. یک طناب بدون جرم به طول L متصل به توپ از روی یک قرقره بدون جرم عبور کرده و از انتهای دیگر به جرم M متصل است(مطابق شکل زیر). موقعیت دو جرم می‌تواند توسط زاویه θ مشخص شود.

الف) انرژی پتانسیل را برحسب θ به دست آورید.

ب) با مشتق‌گیری از انرژی پتانسیل، دریابید که آیا سیستم حالت تعادل دارد؟ به ازای چه مقادیری از m و M تعادل حاصل می‌شود؟ درباره‌ی پایداری هر یک از نقاط تعادل بحث کنید.



۴- سیستم چهار ذره‌ای بخش ۴.۱۰ کتاب مرجع را درنظر بگیرید.

الف) قضیه کار و انرژی را برای هر یک از ۴ ذره به طور جداگانه بنویسید و با جمع زدن این ۴ معادله، نشان دهید که در مدت زمان کوتاه dt تغییر در انرژی جنبشی به صورت $dT = dW_{tot}$ است. (W_{tot} کار کل انجام شده روی تمام ذرات توسط تمام نیروها است.)

ب) نشان دهید $dW_{tot} = -dU$ (dU تغییرات انرژی پتانسیل در همان زمان کوتاه dt است). استنتاج کنید که انرژی کل پایسته است.

۵- انرژی پتانسیل یک جسم یک بعدی به جرم m در فاصله r (بزرگ‌تر از صفر) از مبدا برابر است با:

$$U(r) = U_0 \left[\frac{r}{R} + \lambda^2 \frac{R}{r}\right]$$

U_0، λ و R ثوابت مثبت هستند.

الف) موقعیت تعادل را به دست آورید.(r_0)

ب) x را فاصله از نقطه تعادل درنظر بگیرید و نشان دهید که برای x های کوچک، انرژی پتانسیل به فرم $U = const + \frac{kx^2}{2}$ درمی‌آید. فرکانس زاویه‌ای نوسانات کوچک چیست؟

۶- یک نوسانگر نامیرا دوره تناوب $\tau_0 = 1$ دارد. هنگامی که میرایی ضعیف افزوده شود، دامنه نوسان به میزان ۵۰٪ در یک دوره تناوب τ_1 افت می‌کند. بزرگی β در مقایسه با ω_0 چه قدر است؟ τ_1 چه مقدار است؟

موفق باشید. دانشور

Classical Mechanics, John R.Taylor