بسم الله الرحمن الرحیم

عنوان : بررسی خواص هندسی و توپولوژیک میدان‌های تصادفی

سید مهرداد موحد
دانشکده فیزیک - دانشگاه شهید بهشتی
پژوهشکده فیزیک - پژوهشگاه دانش‌های بنیادی IPM

جهت دوره دومین مدرسه آشنایی ویژه فیزیک
مرکز تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان
بهمن ۹۵

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

فهرست

۱- مقدمه

۲- بخش اول : میدانهای تصادفی در طبیعت

- معرفی تقسیم بندی فرآیندهای موجود در طبیعت

۳- بخش دوم : مدلسازی خواص هندسی و توپولوژیک میدانهای تصادفی

- مشاهده پذیرها
- رهیافت اختلالی تابع توزیع
- بیشینه های موضعی
- آمار برخوردها
- کاربرد برای یافتن قیمت ناهمگرد

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

References

1) J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser and A.S. Szalay, The astrophysical Journal, 304: 15-61, 1986

2) S.L. Lumsden, A.F. Heavens and J.A. Peacock, MNRAS, 238, 293-318, 1989

3) T. Matsubara, The astrophysical Journal, 584, 1-34, 2003

4) M. Ghaseminezad et. al, arXiv: 1508.01409

5) S.M.S. Movahed et. al, MNRAS, 434(4):3597-3605

6) R. J. Adler, "The Geometry of Random field", 1981

7) H. Risken, "The Fokker-Planck equation"

8) V. J. Martinez and Enn Saar, "Statistics of the Galaxy distribution,

9) R. J. Adler and J. E. Taylor, "Random fields and Geometry", Springer, 2000

10) R. J. Adler and J. E. Taylor, "Topological Complexity of Smooth Random functions", Springer, 2009

11) A. F. Heavens, Ravi K. Sheth, arXiv: astro-ph/9904307

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

مقدمه:

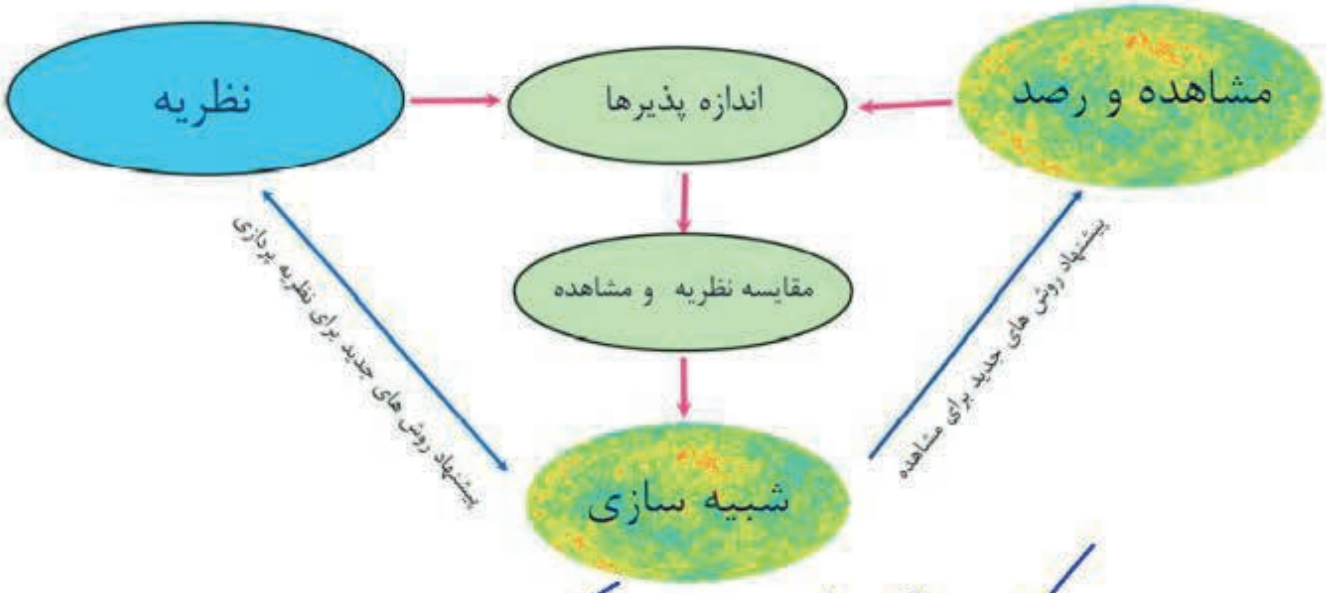
علم فیزیک به معنای شناخت و مطالعه کمّی جهان طبیعت (نه جهان خلقت) با استفاده از ابزار علم (زبان ریاضی و تجهیزات) سابقه‌ای به قدمت بشریت دارد. روش شناسی علمی در این علم به طور غالب از بخشهای زیر تشکیل می‌شود:

الف: نظریه پردازی و ارایه مدلهای نظری پدیده شناختی و بنیادی

ب: انجام آزمایشهای تجربی

ج: انجام شبیه سازی ها و محاسبات رایانه‌ای

این چارچوب در شکل زیر آمده است



شکل ۱: روش شناسی علمی در فیزیک

البته لازم به ذکر است که به منظور مقایسه نظریه ها با اندازه گیری های تجربی و مشاهدات و رصدها باید در هر بخش کمیت های مشاهده پذیر را پیدا کرد و در مقام مقایسه نرم آفزارهای کمکی نیز باید انجام شود که من آنرا مدلسازی داده ها می نامم. در چارچوب مدلسازی داده ها از روشهای مختلف برای انجام می شود که موضوع کتاب من در اینجا خواهد بود. قصد من از بیان مباحث بالا ضمن ارایه یک نگاه جامع در خصوص روش شناسی علمی در فیزیک این است که مشخص کنم کتاب

کنونی من دارای چه وجه هایی است؟ در واقع رویکردی که من آغاز خواهم کرد در ذیل بخش نظریه پردازی و محاسباتی قرار خواهد گرفت و اینکه فقط از داده های بدست آمده از انجام آزمایشگاه و شاهدات و رصدهای گوناگون استفاده خواهم کرد. ولی همانطور که در شکل ارائه داده ام قطعاً نتایج بدست آمده پایه خوردهایی برای تعیین استراتژی های آزمایشگاهی و همچنین نظریه پردازی خواهد داشت. در این خصوص در ادامه بیشتر صحبت خواهم کرد.

قبل از ورود به کتاب خودم لازم است نکاتی در خصوص ماهیت فعالیت های علمی در حوزه فیزیک مطرح کنم. هدفم از ارائه این بخش این است که تشخیص کنم سایبرگ. علوم فیزیک به عنوان بخشی از علوم پایه در برابر سایر علوم چگونه است و اساساً نوع فعالیت های علمی انجام شده در این حوزه دارای چه ماهیتی است؟ و چه انتظاری از نتایج فعالیت های انجام شده در این شاخه علمی داریم؟ در واقع در صورتی که به نوشتار سیستماتیک بتوان از عهده این مهم برآییم به گونه ای که خود نیز از آن خرسند باشیم می توانیم انتظار داشته باشیم که اولاً کسانی دانشجویان با یک این نکات تا حد قابل ملاحظه ای با نگاه واقع بینانه به حوزه فیزیک توجه خواهند کرد و این به حداقل کارکردی که در اینجا برای من خواهد داشت این است که محققان آینده و مدیران توسعه علمی (توسعه علمی به معنای استمداد از دانش در روش عقلانی برای حل مسایل و تولید دانش فنی و افزایش رفاه اقتصادی با عنایت به جهان بینی و اسناد بالادستی) که انگیزه های درونی ایشان و دیدگاه های علمی ایشان در دوران نوجوانی و جوانی شکل می گیرد به عنوان ظرفی با قابلیت نگاه واقع بینانه به سرانجام علم فیزیک و البته شاخه های این علم خواهند رفت. که این خود به طور مستقیم منجر به افزایش انگیزه و البته کیفیت برونداد ها (outcomes)، دستاوردها (incomes) و اثرات (impacts) خواهد شد.

برای این منظور می توان به طور خاص شاخص های زیر را برای فعالیت در شاخه علمی فیزیک در نظر گرفت.

۱. رویکرد بنیادی علم فیزیک در دو ساحت نظری و تجربی

۲. رویکرد کاربردی به عنوان دستاورد و ایجاد زیرساخت های فناوری

۳. الزامات ابزاری یعنی زبان علم (ریاضی) و تجهیزات

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

۴- توجه به ساخت کل نگر

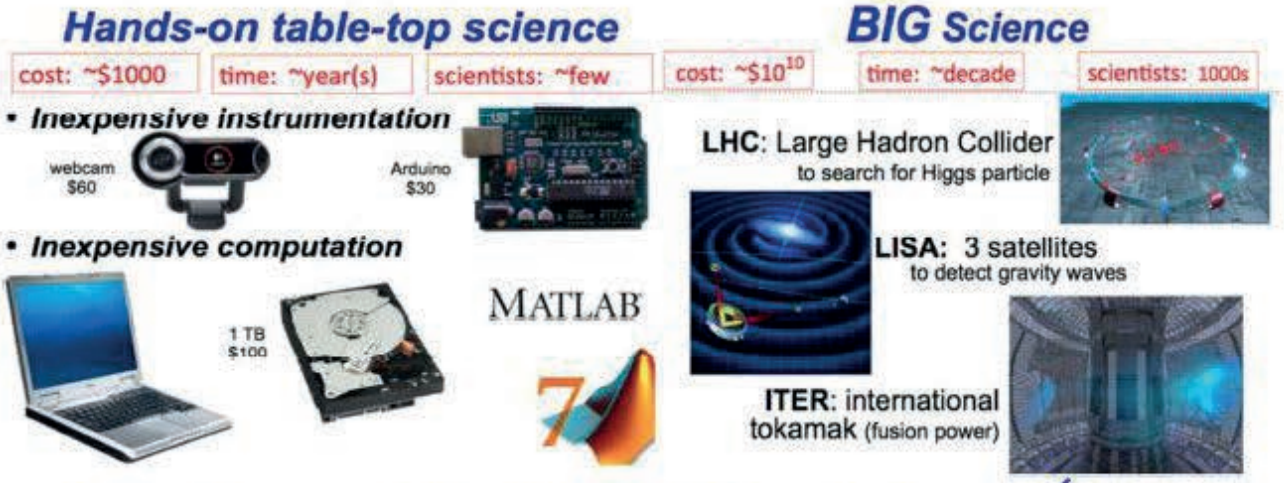
۵- توجه به روش شناسی علمی و تعمیم و تلفیق آراء با حفظ اصل آزاداندیشی

۶- توجه به دسته بندی علوم بزرگ و کوچک (شکل ۲ را ببینید)

۷- توجه به اهمیت همکاری های ملی و بین المللی

۸- توجه به نیازهای جامعه

faculties.sbu.ac.ir/~movahed



شکل ۲: دسته بندی علوم از بزرگ تا کوچک (H.L. Swinney, 2013)

همانطور که قبلاً گفتیم علم فیزیک مانند هر شاخه علمی دارای خروجی هایی است. در شکل ۳ سه دسته مهم از خروجی ها نشان داده شده است. در بخش بروندادها می توان به ارایه نظریه ها، ایده ها، مدل سازی ها و نیز انجام آزمایش های تجربی و انجام شبیه سازی اشاره کرد که این خود دارای شاخص هایی همچون ارایه مقالات، شرکت در سخنرانی ها است که هدف اصلی آن حرکت در مرزهای دانش است. در بخش دستاوردها می توان به تولید دانش فنی و متخصص اشاره کرد ولی به خاطر نشان کنم که در اینجا منظورم توسعه زیرساخت های متخصص است. در خصوص اثرات می توان گفت ارایه سازوکار عینی در دو مقوله نرم افزار و سخت افزار

شکل ۳: خروجی های علم فیزیک.

که منجر به افزایش ثروت ملی و رفاه اجتماعی خواهد شد. در پایان این بخش به دو استراتژی علمی در دوران طلایی اسلام اشاره می‌کنیم. در شکل ۴ این دو رویه نقل شده از ابوریحان بیرونی و خوارزمی نشان داده شده است. بدون هیچ گونه توضیحی فقط می‌توان اشاره کرد که برای بازسازی تمدن شکوهمند ایران باید نگرش جهادی را پیش گرفت.

شکل ۴: نمونه هایی از استراتژی علمی در دوران طلایی اسلام

با الگوهای کارکردهای فرهنگی اقتباسات برای پذیرش جایگاه علم پایه به عنوان بخشی از ارکان توسعه علمی بیش از پیش به رفاه اجتماعی نزدیک خواهیم شد.

با این پیش گفتار اکنون به این بخش می‌رسیم که چارچوب‌های این درسنامه را تعیین کنیم.

در بخش ۱ به معرفی میدان‌های تصادفی در طبیعت می‌پردازیم. ۳ نوع فرآیند اصلی در این بخش معرفی می‌شوند.

در بخش ۲ به مدل‌سازی اخراص هندسی و توپولوژیک میدان‌های تصادفی می‌پردازیم.

محاسبه مستقیم بیشینه‌های موضعی و آمار برخوردها در این بخش انجام می‌شود. برخی کاربردهای این محاسبه در انتهای بخش ۱ می‌آید.

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

بخش اول: فرآیندهای تصادفی و جایگاه آنها در طبیعت

برای اینکه بهتر بتوانم مفهوم تصادفی بودن را نشان دهم اجازه دهید با تقسیم بندی فرآیندهای موجود در طبیعت مسئله را شروع کنم:

۱- فرآیندهای تعینی Deterministic Processes

یعنی فرآیندهایی که با داشتن شرایط اولیه بدون هیچ گونه شکی می توان وضعیت آینده آنها را تعیین کرد. برای مثال حرکت یک پرتابه و نظیر آن این گروه به حساب خواهند آمد.

۲- فرآیندهای آشوبی Chaotic Processes

این فرآیندها طبق تعریف رفتارهای آشوبی از خود نشان می دهند. آشوبی به این معنا که اگر

$$x(t_0) = x_0 + \delta_0 \longrightarrow x(t_n) = x_n + \delta_n$$

که در آن حتی اگر $\delta_0 \to 0$ ولی $\delta_0 \neq 0$ ولی مقدار δ_n لزوماً کوچک نخواهد بود.

نمونه هایی از چنین فرآیندهایی عبارتند از:

(I) logestic map $\quad x_{n+1} = 4r x_n(1-x_n)$

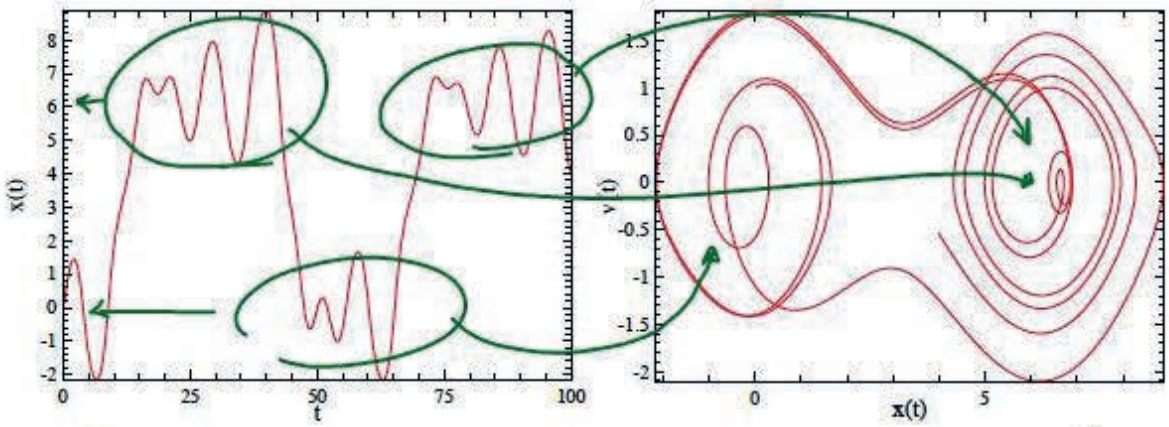
همانطور که مشخص است با داشتن شرایط اولیه یعنی x_0 می توان مقدار x_n را بدون هیچ گونه عدم تعینی یافت. بنابراین تا اینجا این پدیده ذیل فرآیندهای تعینی به حساب می آید اما نکته مهم اینجاست که اگر شرایط اولیه به دلیل کمی از مقدار مشخص شده منحرف شود لذا نمی توان انتظار داشت که جواب پس از تحول به مقدار مورد انتظار نزدیک باشد. دقیقاً به همین دلیل است که نمی توان انتظار داشت که بتوان آب و هوا را با دقت قابل قبول برای بلند مدت پیش بینی کرد.

پس اگر معادلات تحول فرآیندها دارای جملات غیرخطی باشند به همان اندازه که غیرخطی هستند به همان اندازه رفتار آشوبی از خود نشان می دهند. به عنوان مثال دم می توان نوسانگر غیرخطی دارای شرط زیر را در نظر گرفت:

$$\ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) + \omega_0^2 \sin(x(t)) = f\cos(\omega t)$$

که در آن $\alpha = 0.2 \quad \omega_0 = 1 \quad , \quad f = 0.52 \; , \; \omega = 0.666$

حل عددی این معادله دیفرانسیل منجر به نمودارهای زیر خواهد شد. می‌دانیم که نمودار فاز برای یک نوسانگر هماهنگ منجر به یک دایره خواهد شد. لذا در این مورد یک نمودار فاز پیچیده خواهیم داشت.



شکل ۵: سمت چپ نمودار x برحسب زمان و سمت راست نمودار فاز برای نوسانگر غیرخطی ذکر شده در متن

همانطور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود نوسانگر بخش لنتزیان خود را حول صفر بخش از زمان خود را حول ۲ می‌گذراند.

برای استخراج سایر ویژگی‌های فرآیندهای آشوبی نمودار دوشاخگی (Bifurcation) و نمای لیاپانوف هستند که در منابع مربوط می‌توان اطلاعات دقیق‌تری در خصوص آنها یافت.

۳- فرآیندهای تصادفی

Stochastic fields
Stochastic processes
Random fields

دسته سوم فرآیندها با نام فرآیندهای تصادفی هستند

به طور خلاصه می‌توان گفت میدان‌های تصادفی یا فرآیندهای تصادفی به فرآیندهایی اطلاق می‌شوند که در آنها شرایط اولیه یا تحول و یا هر دوی آنها از ماهیت غیرتعینی برخوردار باشند.

بنابراین رویکرد بهینه در برخورد با چنین فرآیندهایی استفاده از ابزار مناسب برای مطالعه آنها است

قبل از اینکه اقدام به این فرآیندها را نام ببرم اجازه دهید در کمیت دهم که برای مطالعه این میدان‌ها استفاده

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

می‌شود را معرفی کنم:

① Probability distribution function

تابع توزیع احتمال

این کمیت در واقع فراوانی رخدادها را نشان می‌دهد و معمولاً به صورت

$$P(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{n(x)}{N}$$

تعریف می‌شود. از روی این کمیت تابع چگالی احتمال به صورت $P(x)\,dx = P(x)$ تعریف می‌شود و بقای احتمال نشان می‌دهد که: $1 = \int p(x)\,dx$

کمیت تعریف شده می‌تواند به صورت چند نقطه‌ای نیز نوشته شود که به تابع توزیع همبسته (Joint) معروف است. احتمال شرطی نیز به صورت $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)}$ تعریف می‌شود.

نکته قابل توجه این است که همانطور که گفته شد فرآیندهای تصادفی در واقع مبتنی بر احتمالات توصیف می‌شوند لذا تابع توزیع احتمال نقش کلیدی در اینجا بازی می‌کند.

② Correlation function

تابع همبستگی

کمیت بالا به صورت $C_x(t_i, t_j) = \langle x(t_i)\, x(t_j)\rangle_{ensemble}$ تعریف می‌شود. در نظر بگیرید که یک رشته‌ای از اعداد تصادفی داریم (الزاماً تصادفی به معنای کاتوره‌ای نیست لطفاً به این موضوع دقت کنید) آن را به صورت $\{x\}: \{x(t_1), x(t_2) \ldots x(t_N)\}$ نشان می‌دهیم. اکنون می‌توان این سؤال را مطرح کرد که چه ارتباطی بین مقدار رخ داده در t_i و مقدار رخ داده در t_j وجود دارد؟ برای پاسخ به این سؤال تابع همبستگی بسیار کارگشا است. لذا آنجا که کیف من در خصوص خواص هندسی و توپولوژی میدان‌های تصادفی است در اینجا بیش از این به این توابع نمی‌پردازم و برای مطالعات تکمیلی می‌توان به مراجعی که ذکر کرده‌ام مراجعه نمود.

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

به زبان ریاضی یک میدان تصادفی به صورت زیر تعریف می‌شود:

به معنای عضو یک خمینه بودن است ← $\{F, T\} \subset M$

$F^{(d)} : \Omega \to \mathbb{R}^T$ ← به نحوی که مقادیری را از فضای اقلیدسی اختیار کند و بر روی فضای پارامتری (T) تعریف می‌شود

$T \subset \mathbb{R}^N$ ← فضای پارامترهای مستقل N بعدی است

در این صورت F یک میدان در فضای (d+N) بعدی تعریف شده است.

لازم است در خصوص بکاربردن کلمه field و Process کمی توضیح دهم. در واقع هرگاه بخواهیم جنبه‌های هندسی و توپولوژی فضای پارامتری مورد توجه باشد در آن صورت کلمه "میدان" بکار برده می‌شود و هرگاه این جنبه‌ها مورد توجه نباشد کلمه "فرآیند" بکار برده می‌شود. همچنین کلمه Random = Stochastic هم معادل هم در نظر گرفته می‌شوند. اما من در اینجا ترجیح می‌دهم که "Stochastic" را بکار برم زیرا در ادبیات ما غالباً Random به ازای کاتوره‌ای بکار برده می‌شود که در واقع بخشی از فرآیندهای تصادفی را می‌توان فرآیندهای کاتوره‌ای نامید نه همه آنها را.

اکنون اجازه دهید اقسام فرآیندهای تصادفی را تعریف کنم.

(A) Purely Random Process

فرآیند کاملاً کاتوره‌ای

چنین فرآیندی را به صورت

$$P(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}, \dots) = P(x_n, t_n)$$

تعریف کرد یعنی اینکه اخذ مقدار x_n در لحظه t_n هیچ ارتباطی به مقادیر قبلی ندارد. برای چنین فرآیندی تابع همبستگی به صورت

$$C_x(\tau) = \langle x(t+\tau)\, x(t) \rangle = \sigma_x^2\, \delta_D(\tau)$$

تعریف می‌شود

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

(B) Dependent Process — فرآیند وابسته

این نوع فرآیند نیز به صورت

$$P(x_n, t_n, x_{n-1}, t_{n-1}, \dots) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \dots) \times$$
$$P(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2}, \dots) \times P(x_{n-2}, t_{n-2} | x_{n-3}, t_{n-3}, \dots)$$
$$\times \dots \times P(x_2, t_2 | x_1, t_1) P(x_1, t_1)$$

برای $t_1 < t_2 < t_3 \dots < t_n$

همانطور که ملاحظه می‌شود اتخاذ مقدار x_n در t_n به تمام مقادیر قبلی به صورت احتمالاتی وابسته است.

(C) Markov Process

فرآیند مارکوف دسته سوم فرآیندهای تصادفی به حساب می‌آید که به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$P(x_n, t_n, x_{n-1}, t_{n-1}, x_{n-2}, t_{n-2} \dots) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \times$$
$$P(x_{n-1}, t_{n-1}, x_{n-2}, t_{n-2}, \dots)$$

همانطور که مشاهده می‌شود احتمال رخ دادن در مرحله t_n فقط به مرحله t_{n-1} وابسته است.

به غیر از مفهوم عدم تعین در خصوص فرآیندهای تصادفی، مفهوم دیگری با عنوان وابستگی به مقیاس و مفهوم چند مقیاسی نیز باید مورد توجه قرار گیرد. ضمناً تاکید می‌کنم که کلمه مقیاس برای دو نوع فضای مربوط به تعریف میدان تصادفی بکار می‌رود. منظورم از دو نوع فضا در واقع این است که اگر در نظر بگیریم F یک میدان تصادفی است این میدان به متغیرهای مستقل وابسته است برای مثال $F(x,y)$ که در اینجا x و y دو مختصه مستقل تلقی می‌شوند پس در اینجا با یک میدان $D(2+1)$ سروکار خواهیم داشت. در عبارت مذکور عدد 1 وصف میدان تصادفی و عدد 2 وصف دو نوع پارامتر مستقل (x,y) است. پس کلمه مقیاس می‌تواند ناظر به فضای مربوط به F باشد و همچنین می‌تواند ناظر به فضای (x,y) باشد. در مورد آخر مفهوم هندسه‌های

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

برخالی (فراکتالی) مطرح می‌شود. در شکل زیر مشاهده می‌شود که در هر مقیاس (x و y) به اشکال نگاه کنیم شبیه خودش به نظر می‌رسد.

● رفتار چند مقیاسی: هندسی ——→ برخال (فراکتال)

به غیر از مفهوم مقیاس در فضای پارامترهای مستقل مفهوم مقیاس به خود پارامتر وابسته نیز باید مورد توجه قرار گیرد. مبتنی بر آن می‌توان مفاهیمی همچون پیچیدگی (Complexity) را تعریف کرد.

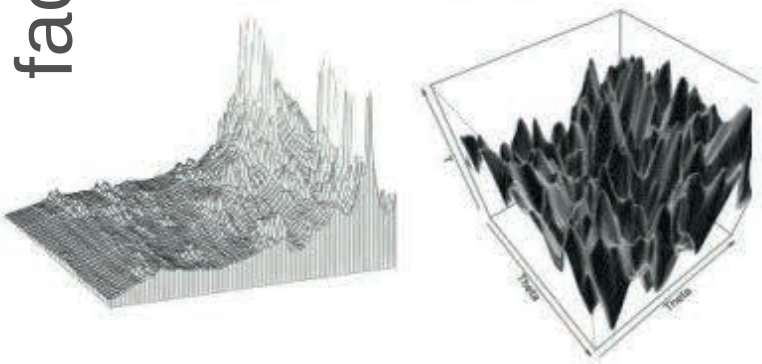
To know more see: http://facultymembers.sbu.ac.ir/movahed/index.php/talks-a-presentations

خوب تا اینجا فرض کلی از میدان‌های تصادفی داشتیم. حال می‌توان به طور مشخص در نظر گرفت که عمل‌کرد توسط چه عواملی خاصیت تصادفی بودن در فرآیندها ظهور پیدا می‌کند. همچنین در بسیاری مواقع سبب در حضور غیرتعیینی بودن نیست بلکه از این رهیافت برای کارآمدی اتخاذ خواهد شد که می‌توان فرآیندها را مدل کرد. برای مثال حرکت یک غبار در یک اتاق که توسط یک رابطه تصادفی با عنوان معادله لانژوین داده می‌شود. پس به طور خلاصه می‌توان این سئوال را مطرح کرد که

چرا خاصیت تصادفی داریم؟

مبتنی بر شکل روبرو مشاهده می‌شود که شرایط اولیه و یا معادلات تحول می‌توانند ماهیت تصادفی و غیرتعیینی داشته باشند. یکی از مشهورترین معادلات غیرتعیینی به صورت زیر است:

شرایط اولیه و معادلات تحول



معادله Ornstein-Uhlenbeck

مثال: حرکت یک ذره غبار در یک اتاق

$$\dot{x}_i(t) + \sum_{j=1}^{N} \xi_{ij}\, x_j = \eta_i(t) \qquad \langle \eta_i(t)\, \eta_j(t') \rangle = \delta_{ij}\, \delta_0(t-t')$$

$$\dot{v}(t) = -\xi\, v(t) + \eta(t) \longrightarrow \text{Stationary regime} \rightarrow \text{MB Distribution}$$

$$\dot{x}(t) = \int G(t,t')\, f(t',x)\, dt' + K(x,t)\, \eta(t)$$

$$\langle \eta(t)\, \eta(t') \rangle = \delta_0(t-t')$$

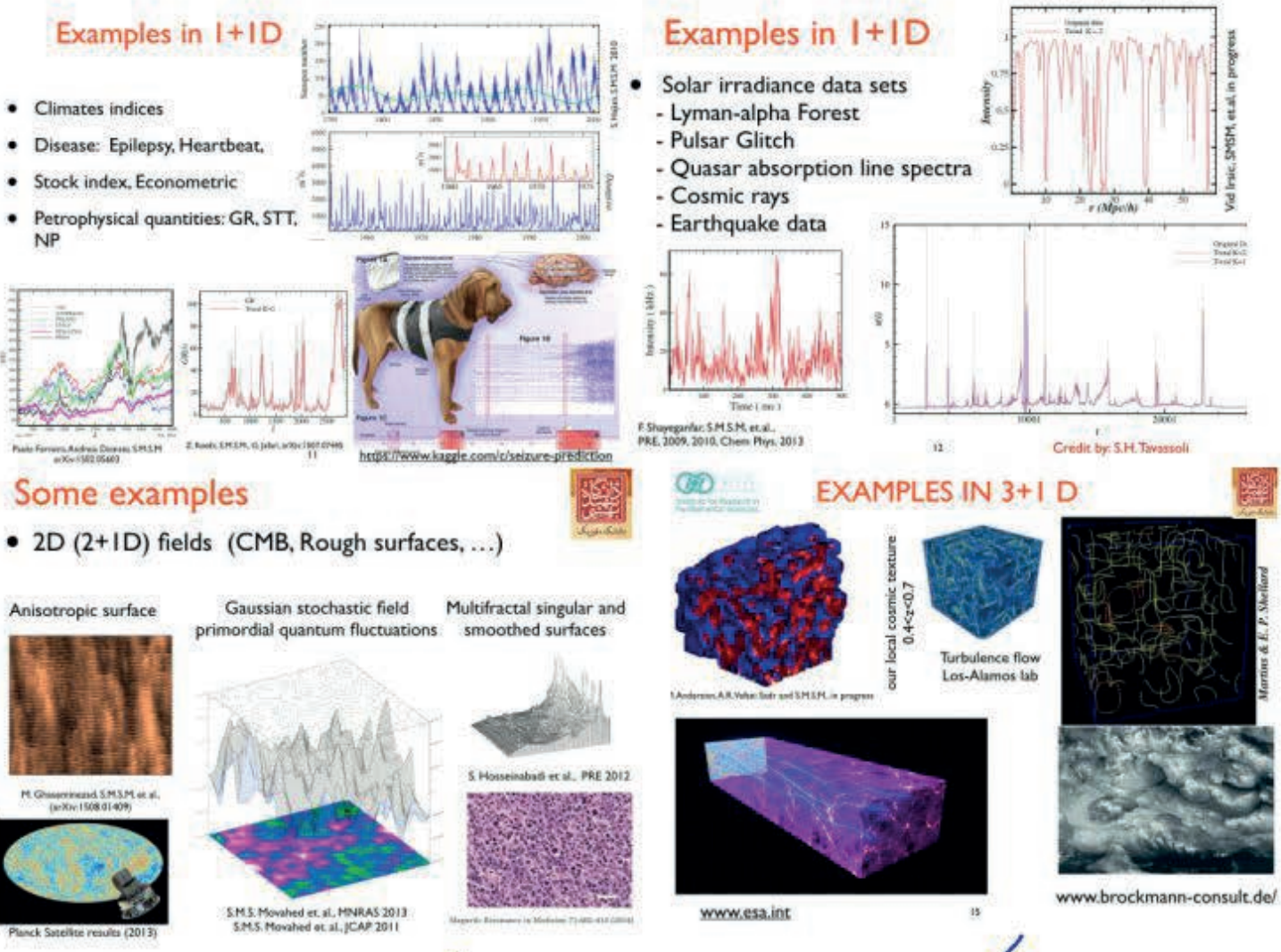
در این معادلات جمله $\eta(t)$ نقش تحول تصادفی را دارد.

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

همانطور که قبلاً گفتم در واقع شرایط اولیه نیز می‌تواند ماهیت تصادفی داشته باشد. برای مثال در کیهان‌شناسی، منشاء ساختارهای بزرگ مقیاس در چارچوب نظریه تورم و همچنین نواقص توپولوژیک که ماهیت تصادفی دارند در نظر گرفته می‌شود. یعنی حتی اگر معادلات تحول جهت غیرتصادفی نداشته باشند ولی شرایط اولیه تصادفی باعث ایجاد ماهیت تصادفی در فرآیند مورد مطالعه، می‌کنند.

برای دریافت اطلاعات بیشتری در خصوص کمی‌سازی معادلات تحول یک فرآیند تصادفی به مراجع ذکر شده در ابتدای این متن رجوع کنید.

قبل از اینکه به سراغ مطالعه خواص هندسی و توپولوژی میدان‌های تصادفی برویم چند نمونه را معرفی کنم. در شکل ۶ نمونه‌هایی در بعدهای مختلف آورده شده است.



شکل ۶: نمونه‌هایی از میدان‌های تصادفی در ابعاد مختلف

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

بخش ۲: مدل‌سازی خواص هندسی و توپولوژیک میدان‌های تصادفی

در بخش قبل بیان کردیم که به دلایل مختلفی ما با میدان‌های تصادفی مواجه می‌شویم. اکنون باید روش‌های قدرتمند برای مطالعه آنها ابداع کنیم. روش‌های متعددی وجود دارند. در اینجا من علاقه‌مندم که به فهرستی از آنها بپردازم و به عنوان مثال خواص نقاط بیشینه (maximum) و برخوردها (crossing) را مورد بررسی قرار دهم. مطالعات تکمیلی را می‌توان از مراجع مرتبط پی‌گیری کرد.

مشاهده‌پذیرها

در روبرو برخی از مهم‌ترین مشاهده‌پذیرها معرفی شده است. غالباً به آنها تباین یا Contrast می‌گوییم.

$$\delta\rho(t;\bar{X}) = \frac{\rho(t;\bar{X}) - \langle\rho(t;\bar{X})\rangle}{\langle\rho(t;\bar{X})\rangle}$$

$$\delta\bar{V}(t;\bar{X}) = \frac{\bar{V}(t;\bar{X}) - \langle\bar{V}(t;\bar{X})\rangle}{\langle\bar{V}(t;\bar{X})\rangle}$$

$$\delta\Phi(t;\bar{X}) = \frac{\Phi(t;\bar{X}) - \langle\Phi(t;\bar{X})\rangle}{\langle\Phi(t;\bar{X})\rangle}$$

$$\delta T(t;\bar{X}) = \frac{T(t;\bar{X}) - \langle T(t;\bar{X})\rangle}{\langle T(t;\bar{X})\rangle}$$

الف: مشاهده پذیرهای کمّی از میدان مورد نظر
ب: مشاهده پذیرهای هندسی و توپولوژیک
ج: مشاهده پذیرها در فضای دوگان

اگر میدان مورد بررسی مستقیماً از اندازه‌گیری و مشاهده به دست آمده باشد به دلیل گسسته بودن نیاز داریم که آنها را نرم و پیوسته کنیم. این کار را توسط قضیه پیچش (Convolution) انجام می‌شود که در زیر نشان داده شده است. تابع پنجره که میدان را نرم می‌کند.

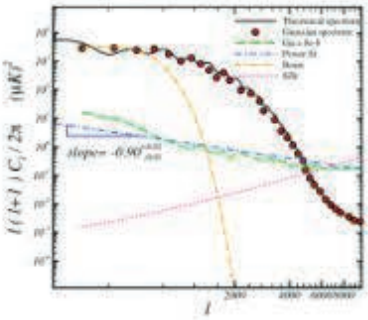
Preparing real field:
Smoothed stochastic field

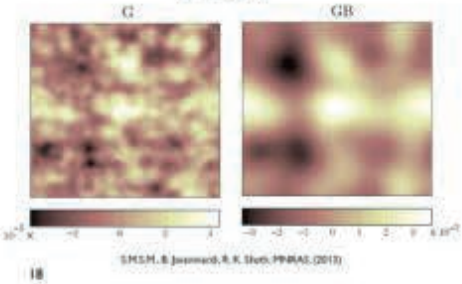
Finite beam size of instrument: Beam effect

$$f_{smoothed}(\vec{r}) = \int d^d\vec{r}'\, W_R(|\vec{r}-\vec{r}'|)\, f(\vec{r}')$$

$$W_R(r) \sim \Theta(R-r)$$

$$W_R(r) \sim \exp\left(-\frac{r^2}{2R^2}\right)$$





S.M.S.M., B. Jasmund, R.K. Sheth, MNRAS (2013)

پس در فضای فوریه می‌توان نوشت:

$$\tilde{f}_{smoothed}(K) = W_R(RK)\,\tilde{f}(K)$$

همین جا معلوم می‌شود که در فضای فوریه انجام عملیات نرم‌سازی به مراتب ساده‌تر خواهد بود.

حال تصور کنید که یک میدان تصادفی را بتوان با نکته‌های زیر در چارچوب یک ماتریس نشان داد

$$A_{\mu\nu\eta\ldots} = \big(\alpha(r_\mu), \alpha(r_\mu)_{;1}, \alpha(r_\mu)_{;2}, \alpha(r_\mu)_{;3}, \alpha(r_\mu)_{;11}, \alpha(r_\mu)_{;22}, \alpha(r_\mu)_{;33}, \alpha(r_\mu)_{;12}, \alpha(r_\mu)_{;13}, \alpha(r_\mu)_{;23},$$
$$\big(\alpha(r_\nu), \alpha(r_\nu)_{;1}, \alpha(r_\nu)_{;2}, \alpha(r_\nu)_{;3}, \alpha(r_\nu)_{;11}, \alpha(r_\nu)_{;22}, \alpha(r_\nu)_{;33}, \alpha(r_\nu)_{;12}, \alpha(r_\nu)_{;13}, \alpha(r_\nu)_{;23}, \ldots\big)$$

در عبارت فوق $\alpha(r_\mu)$ در واقع مقدار میدان در مکان r_μ است و علامت ; به معنای مشتق است. در واقع $\{A\}$ شامل تعداد زیادی عضو است که در یک مطالعه شخص تنها آنهایی را در نظر می‌گیریم که مورد توجه باشند. کمیت هایی که اصطلاحاً اندیس‌های طیفی نامیده می‌شوند نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند. در این عبارت کمیت

Spectral indexes

$$\sigma_0^2 \equiv \langle \alpha^2(r) \rangle = \frac{L^D}{(2\pi)^D} \int d^D k\, P(k)$$

$$\sigma_n^2 \equiv \left\langle \left(\frac{\partial^n \alpha}{\partial x^n}\right)^2 \right\rangle = \frac{L^D}{(2\pi)^D} \int d^D k\, k^{2n} P(k)$$

$P(k)$ در واقع تبدیل فوریه تابع همبستگی است که قبلاً آن را تعریف کردم. در ادامه نشان خواهم داد که این کمیت ها در تعریف برخی از خصوصیات هندسی و شدپرلوژی وجود دارند. عبارت D در معادلات بالا نشان دهنده بعدی است که میدان تصادفی در آن زندگی می‌کند. تا اینجا مقدمات کمی سازی میدان تصادفی مورد توجه را معرفی کردم.

تابع توزیع احتمال مبتنی بر دیافت نظریه اختلالی

دلیل اهمیت تعیین تابع توزیع احتمال در واقع در زیر آمده است:

$$\langle F \rangle_A = \int_{-\infty}^{+\infty} d^N A\, P(A) F$$

One-point statistics

$$\langle f \rangle = \langle \text{Conditions correspond to feature} \rangle$$
$$= \langle f \rangle_{\text{Gaussian}} + \text{Perturbative Parts}\big|_{\text{NG + Anisotropy}}$$

Two-point statistics

$$\langle f(r_1) g(r_2) \rangle = \int dA_1 dA_2\, P(A_1, A_2) f(r_1) g(r_2)$$

$$P(\vec{A}_1, \vec{A}_2) = \left[\frac{1}{2\pi^N \det(K)}\right]^{1/2} \exp\left(-\frac{\vec{A}_1^T \cdot K^{-1} \cdot \vec{A}_2}{2}\right)$$

T. Matsubara, APJ 2003; S. Codis et. al., 1305.7402, Christophe Gay et. al., PRD 2012

همانطور که مشخص است کمیت ها به طور متوسط تعریف می‌شوند و برای متوسط‌گیری نیاز به تابع توزیع احتمال هستیم. در حالت تابع توزیع دو نقطه‌ای می‌توان خواص آماری مبتنی بر دو نقطه را محاسبه کرد. در این قسمت دارم روشی در پیش می‌گیرم که بتوان تابع توزیع را برای میدان مورد توجه به صورت یک بسط محاسبه کرد.

برای این منظور از تابع شخصه که در واقع نقش تابع پارش را بازی می‌کند استفاده می‌کنم.

در ادامه چارچوب احتمالی برای استخراج تابع توزیع همبسته را معرفی می‌کنم.

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

Characteristic function.

فرض کنید میدان تصادفی داشته باشیم که به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$A_\mu : (\alpha, \partial_1\alpha, \partial_2\alpha, \partial_3\alpha, \partial_1^2\alpha, \partial_2^2\alpha, \partial_3^2\alpha, \partial_{12}\alpha, \partial_{13}\alpha, \partial_{23}\alpha, \dots)$$

برای سادگی در نظر می‌گیریم که

$$\mu = 0, 1, 2, 3, 11, 22, 33, 12, 13, 23 \dots$$

توجه کنید که این نوع نمادگذاری برای یک مکان از زمان یا زاویه مشخص نوشته شده است ولی می‌توان برای چندین مکان هم آن را نوشت.

یعنی

$$A_{\mu\nu} : (\alpha(1), \partial_1\alpha(1) \dots \quad \alpha(2), \partial_1\alpha(2) \dots)$$

A_{00}

عبارت A_μ یک بردار N بعدی را نشان می‌دهد. و این N در حقیقت تعداد میدان‌های مورد نظر ما را نشان می‌دهد.

و خواص آماری این میدان توسط عبارت $P(A)$ داده می‌شود.

برای تعیین شکل $P(A)$ روش‌های مختلفی وجود دارد یکی از آن‌ها استفاده از تابع مشخصه است. برای این منظور در نظر بگیرید که

$$N = 1, \quad A : (x)$$

پس تعریف می‌کنیم:

$$Z_x(\lambda) = \langle e^{i\lambda x} \rangle = \int e^{i\lambda x} P(x)\, dx$$

تبدیل معکوس بالا عبارت است از

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int d\lambda\, e^{-i\lambda x} Z_x(\lambda)$$

توجه کنید که

$$M_n = \langle x^n \rangle = \left(\frac{d}{d(i\lambda)}\right)^n Z_x(\lambda) \Big|_{\lambda=0}$$

از طرفی

$$Z_x(\lambda) = \langle e^{i\lambda x} \rangle = \langle 1 + i\lambda x - \tfrac{1}{2}\lambda^2 x^2 \dots \rangle$$

$$= 1 + i\lambda \langle x \rangle - \tfrac{1}{2}\lambda^2 \langle x^2 \rangle \dots$$

$$= 1 + i\lambda M_1 - \tfrac{1}{2}\lambda^2 M_2 \dots$$

پس با داشتن ممان‌ها می‌توان Z را تشکیل داد و از آن $P(x)$ را به دست آورد.

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

پس

$$Z_x(\lambda) = 1 + \sum_{n=1} \frac{(i\lambda)^n}{n!} M_n$$

همچنین تعریف می‌کنیم

$$\ln Z_x(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} K_n$$

$$\ln\left(\langle e^{i\lambda x}\rangle\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} K_n$$

$$\langle e^{i\lambda x}\rangle = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} K_n\right]$$

یعنی

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} M_n = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} K_n\right]$$

قبل از اینکه جلو برویم می‌توان ارتباط بین M_n و K_n را به دقت ملاحظه کرد. نفسی

$$\ln\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} M_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} K_n$$

Recall That: $\ln(1+\epsilon) = \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \frac{\epsilon^n}{n!}$

دلیل ارتباط بین $1+\epsilon$ و $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} M_n$ این است که با افزایش λ به شدت تناوب $e^{i\lambda x}$ و یک دستگاه شامل نمونه P که تقریباً ثابت است از آشوب بیرون آمده و با تبادل خواهد شد. پس Z برحسب افزایش λ هم شدت نوسان می‌کند. پس

$$\ln\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} M_n\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} M_n\right)^m$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} K_n$$

با مقایسه طرف چپ و راست خواهیم داشت

$K_1 = M_1$

$K_2 = M_2 - M_1^2$

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

حال برگردیم به تابع شعبه برای یک میدان N بعدی یعنی:

$$Z_A(\vec{\lambda}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^N A\, p(\vec{A})\, e^{i\vec{\lambda}\cdot\vec{A}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d^N A\, P(\vec{A}) \left[1 + i\vec{\lambda}\cdot\vec{A} + \frac{(i\vec{\lambda}\cdot\vec{A})^2}{2} + \cdots \right]$$

$$= 1 + \langle i\vec{\lambda}\cdot\vec{A} \rangle + \cdots \qquad , \quad \vec{\lambda}\cdot\vec{A} = \lambda^\mu A_\mu$$

در این بسط Cumulant خواهیم داشت:

$$\ln(Z_A(\vec{\lambda})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left(\sum_{\mu_1=1}^{N} \cdots \sum_{\mu_n=1}^{N} K^{(n)}_{\mu_1 \cdots \mu_n} \lambda_{\mu_1} \cdots \lambda_{\mu_n} \right)$$

for $\mu = 1 \Rightarrow \ln(Z_A(\vec{\lambda})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K^{(n)} \lambda_1^{(n)}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} K_n$$

فرض کنید چنین باشد (البته همیشه نمی‌توان این کار را انجام داد).

که

$$K^{(1)}_\mu = \langle \vec{A} \rangle = 0$$

$$K^{(2)}_{\mu_1\mu_2} = \langle A_{\mu_1} A_{\mu_2} \rangle - \langle A_{\mu_1} \rangle \langle A_{\mu_2} \rangle = \langle A_{\mu_1} A_{\mu_2} \rangle$$

$$K^{(3)}_{\mu_1\mu_2\mu_3} = \langle A_{\mu_1} A_{\mu_2} A_{\mu_3} \rangle \rightarrow K^{(1)}_\mu = 0$$ فقط برای حالتی که

$$K^{4}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \langle A_{\mu_1} A_{\mu_2} A_{\mu_3} A_{\mu_4} \rangle - \langle A_{\mu_1} A_{\mu_2} \rangle \langle A_{\mu_3} A_{\mu_4} \rangle$$

$$- \langle A_{\mu_1} A_{\mu_3} \rangle \langle A_{\mu_2} A_{\mu_4} \rangle - \langle A_{\mu_1} A_{\mu_4} \rangle \langle A_{\mu_2} A_{\mu_3} \rangle$$

فقط برای حالتی که $K^{(1)}_\mu = 0$

به عنوان تعریف برای حالت کلی یعنی $K^{(1)}_\mu \neq 0$ عبارت ثابت K^5 را نوشتی کنید

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

$\ln Z_A(\vec{\lambda})$: عبارت به رابطه

و $\langle A_\mu \rangle = 0$ خواهیم داشت:

$$Z_A(\vec{\lambda}) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left\{ \sum_{\mu_1} \cdots \sum_{\mu_n} K^{(n)}_{\mu_1 \cdots \mu_n} \lambda_{\mu_1} \cdots \lambda_{\mu_n} \right\}\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{n=2} \frac{i^n}{n!} \left\{ \sum_{\mu_1=1}^{N} \cdots \sum_{\mu_n=1}^{N} K^{(n)}_{\mu_1 \cdots \mu_n} \lambda_{\mu_1} \cdots \lambda_{\mu_n} \right\}\right)$$

$$= \exp\left(-\tfrac{1}{2} \lambda^T \cdot \bar{K} \cdot \lambda\right) \exp\left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{\mu_1 \cdots \mu_n} K^{(n)}_{\mu_1 \cdots \mu_n} \lambda_{\mu_1} \cdots \lambda_{\mu_n}\right)$$

در عبارت فوق توجه کنید که

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_N \end{pmatrix}, \quad \lambda^T = (\lambda_1 \cdots \lambda_N)$$

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} K_1^2 & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{N1} & & & K_N^2 \end{bmatrix}$$ فقط شامل مرتبه 2 Cumulant است

یعنی $\bar{K}$ فقط شامل Cumulant مرتبه دوم است که همان واریانس است. بقیه عبارت هم وجود مراتب بالاتر است.

اینجا حساب خواهیم داشت:

$$P(\vec{A}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{+\infty} d^N\lambda \, Z_A(\bar{\lambda}) \, e^{-i\bar{\lambda}\cdot A}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{+\infty} d^N\lambda \, e^{-\frac{1}{2}\lambda^T \cdot \bar{K} \cdot \lambda - i\bar{\lambda}\cdot A} \, e^{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{\mu_1 \cdots \mu_n} K^{(n)}_{\mu_1 \cdots \mu_n} \lambda_{\mu_1} \cdots \lambda_{\mu_n}}$$

شکل آشنا دارد

$$e^{-\frac{\partial}{\partial x}} \int e^{-i\lambda x} = \int e^{-i\lambda} e^{-i\lambda x} d\lambda$$

توجه: عبارت $\lambda_\mu \to \frac{i\partial}{\partial A_\mu}$ پس

$$P(\vec{A}) = \exp\left[\sum_{n=3}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{\mu_1 \cdots \mu_n} K^{(n)}_{\mu_1 \cdots \mu_n} \frac{\partial^n}{\partial A_{\mu_1} \cdots \partial A_{\mu_n}}\right] \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{+\infty} d^N\lambda \, e^{-\frac{1}{2}\lambda^T \cdot \bar{K} \cdot \lambda - i\bar{\lambda}\cdot A}$$

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

$$P(\bar{A}) = \exp\left[\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} K^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{\partial^n}{\partial A_{\mu_1} \dots \partial A_{\mu_n}}\right] P_G(\bar{A})$$

$$P_G(A) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int d^N\lambda \, e^{-i\bar{\lambda}\cdot\bar{A} - \frac{1}{2}\lambda^T \cdot \bar{K} \cdot \lambda}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}\,\bar{K}}} e^{-\frac{1}{2} A^T \cdot \bar{K}^{-1} \cdot A}$$

اکنون تابعی شکل عمومی هر تابع توزیعی را بدست آوردیم. اکنون می‌توان نوشت،

$$\langle F \rangle = \int d^N A \, p(A) \, F(A)$$ By Part Integr

$$\langle F \rangle = \left\langle \exp\left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(+1)^n}{n!} \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} K^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{\partial^n}{\partial A_{\mu_1} \dots \partial A_{\mu_n}}\right) F(A)\right\rangle_G$$

که

$$\langle F \rangle_G \equiv \int d^N A \, P_G(A) \, F(A)$$

به طور کلی عبارت $\langle F \rangle$ غالب است برای حالتی که انحراف از حالت گوسی خیلی کوچک باشد بنابراین به کمک حد مرکزی حد احتمال سیستم را می‌توان پیدا کرد. در بسیاری از میدان‌های تصادفی می‌توان نشان داد که

$$K^{(n)} \sim \mathcal{O}(\sigma_0^{n-2}) \qquad \langle A_i^2 \rangle = \sigma_0^2$$

اکنون تعریف می‌کنیم

$$\hat{K}^{(n)} \equiv \frac{K_n}{\sigma_0^{n-2}}$$

پس

$$\langle F \rangle = \left\langle \left\{ 1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(+1)^n}{n!} \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} K^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{\partial^n}{\partial A_{\mu_1} \dots \partial A_{\mu_n}} + \left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(+1)^n}{n!} \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} K^{n}_{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{\partial^n}{\partial} \right)^2 \right\} F \right\rangle_G$$

$$= \langle F \rangle_G + \frac{1}{3!} \sum \hat{K}^{(3)}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \langle F_{,\mu_1 \mu_2 \mu_3} \rangle_G^{\sigma_0} + \left[\frac{1}{4!} \sum \hat{K}^{4}_{\mu_1 \dots \mu_4} \langle F_{,\mu_1 \dots \mu_4} \rangle_G \right.$$

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$+\frac{1}{2(3!)^2}\sum \hat{K}^{(3)}_{\mu_1\mu_2\mu_3}\,\hat{K}^{(3)}_{\nu_1\nu_2\nu_3}\,\langle F_{,\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}\rangle_G\Big]\sigma_0^2$$

$$+O(\sigma_0^3)$$

عبارت بالا را نشان دهید؟

با این نشان دادیم که متوسط کمیت را می‌توان به صورت بسط اختلالی در نظر بگیریم در نتیجه بعدی برخی از کاربردهای کمیت بالا را شرح می‌دهیم.

اختلال به انتگرال مربوط به بسط انجام شده است

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

Compact form of PDF

در بخش قبل دیدیم که

$$\langle F\rangle = \langle F\rangle_G + \frac{1}{3!}\sum_{\mu_1\mu_2\mu_3} K^{(3)}_{\mu_1\mu_2\mu_3}\langle F;\mu_1\mu_2\mu_3\rangle_G\,\sigma_0$$

$$+\sigma_0^2\left[\frac{1}{4!}\sum K^{(4)}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\langle F;\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\rangle_G + \frac{1}{2(3!)^2}\sum K^{(3)}_{\mu_1\mu_2\mu_3}K^{(3)}_{\nu_1\nu_2\nu_3}\langle F;\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3\rangle_G\right]$$

$$+O(\sigma_0^3)+\cdots$$

اکنون می‌خواهم از شکل فوق استفاده کنم.

$$P(x)=?$$

یعنی مثلاً $N=1$ و α میدان تصادفی یکواحدی. فرض می‌کنیم که

$$K_1(x)=M_1(x)=0 \qquad \langle x\rangle=0$$

و

$$\nu\equiv x/\sigma_0 \longleftrightarrow \alpha$$

بنا به تعریف

$$P(x)=\langle\delta(x-x')\rangle_{x'}$$

یعنی در عبارت بالای صفحه

$$F\equiv\frac{1}{\sigma_0}\delta(\alpha-x/\sigma_0)$$

$$\equiv\frac{1}{\sigma_0}\delta(\alpha-\nu)$$

پس چون F مشتق از مشتقات مربوط به α است پس

$$P(x)=\frac{1}{\sigma_0}\left\langle\delta\left(\alpha-\frac{x}{\sigma_0}\right)\right\rangle$$

$$=\frac{1}{\sigma_0}\langle\delta(\alpha-x/\sigma_0)\rangle_G+\frac{1}{3!\,\sigma_0}\sum_{\mu_1=0}^{0}\sum_{\mu_2=0}^{0}\sum_{\mu_3=0}^{0}K^{(3)}_{\mu_1\mu_2\mu_3}\left\langle\frac{\partial^3\delta(\alpha-x/\sigma_0)}{\partial\mu_1\partial\mu_2\partial\mu_3}\right\rangle_G\sigma_0+\cdots$$

$$=\frac{1}{\sigma_0}\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}\frac{dx}{\sigma_0}\,\delta(\alpha-x/\sigma_0)+\quad''$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\nu^2/2}+\frac{1}{3!}K^{(3)}_{000}\left\langle\frac{\partial^3\delta(\alpha-x/\sigma_0)}{\partial^3\alpha}\right\rangle_G+\cdots$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}e^{-\nu^2/2}+$$

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$H_n(\nu) = e^{-\nu^2/2}\left(-\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^n e^{-\nu^2/2}$$

$$\left\langle \frac{\partial^k \delta(\alpha-\nu)}{\partial \alpha^k} H_n(\alpha) \right\rangle_G = \frac{e^{-\nu^2/2}}{\sqrt{2\pi}} H_{k+n}(\nu)$$

$$\left\langle \frac{\partial^k \theta(\alpha-\nu)}{\partial \alpha^k} H_n(\alpha) \right\rangle_G = \frac{e^{-\nu^2/2}}{\sqrt{2\pi}} H_{k+n-1}(\nu)$$

با کمک عبارت‌های بالا می‌نویسیم:

$$\left\langle \frac{\partial^3 \delta(\alpha - x/\sigma)}{\partial x^3} \right\rangle_G = \left\langle \frac{\partial^3 \delta}{\partial x^3} H_0 \right\rangle$$

$$= \frac{e^{-\nu^2/2}}{\sqrt{2\pi}} H_3(\nu)$$

پس

$$P(x) = \frac{e^{-\nu^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\left(1 + \sigma_0 \frac{S^{(0)}}{6} H_3(\nu) + \mathcal{O}(\sigma_0^2)\right].$$

تمرین: مرتبه بعدی را بنویسید.

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

PAPCO

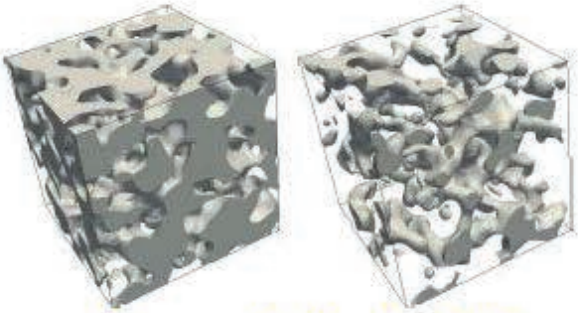
تا اینجا مشخص شد که چگونه می‌توان تابع احتمال را استخراج کرد. و قبلاً هم گفتیم که مشاهده پذیرهای مختلف به صورت متوسط‌گیری آن مبنی کمّی می‌شوند. در ادامه می‌خواهم برخی از مشاهده پذیرهای هندسی و توپولوژی را معرفی کنم

مجموعه‌های گشت و نقاط بحرانی Excursion Sets and Critical Points

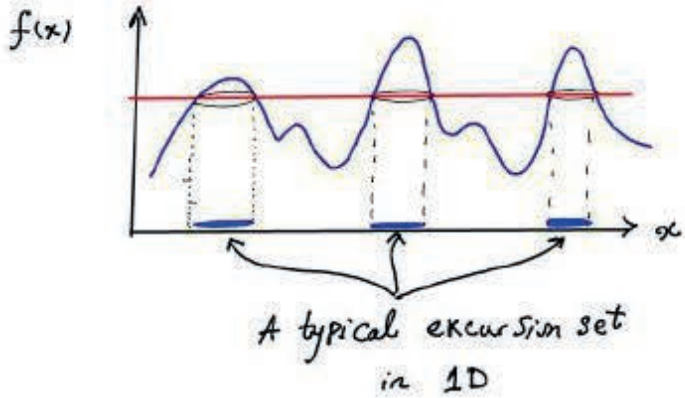
مجموعه گشت به صورت ریاضی به صورت

$$A_T(F) \equiv \{T \mid F(T) \geq u\}$$

یعنی مقادیری از میدان تصادفی که در یک شرط یکنواخت صدق کند. در شکل زیر نمونه‌هایی از مجموعه‌های گشت را مشاهده می‌کنید



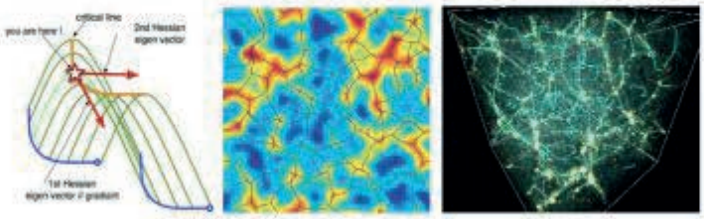
Emmanuel Roubin 2013



به غیر از مجموعه‌های گشت در واقع می‌توان نقاط بحرانی را نیز از جمله خواص هندسی تعریف کرد. در شکل زیر نیز نمونه‌هایی از آنها آمده است

به طور کلی یک مجموعه بحرانی به صورت مثلا نقاط اکسترمم یا مسیری که بر روی آن ویژگی بحرانی بودن صدق کند در نظر گرفته می شود

Skeleton as a probe of filamentary 2D & 3D

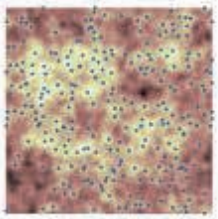


Mon. Not. R. Astron. Soc. 366, 1201–1216 (2006)

Mon. Not. R. Astron. Soc. 383, 1655–1670 (2008)

Skeleton is given by the set of points where the gradient is aligned with local curvature major axis and simultaneously, second component of local curvature is negative

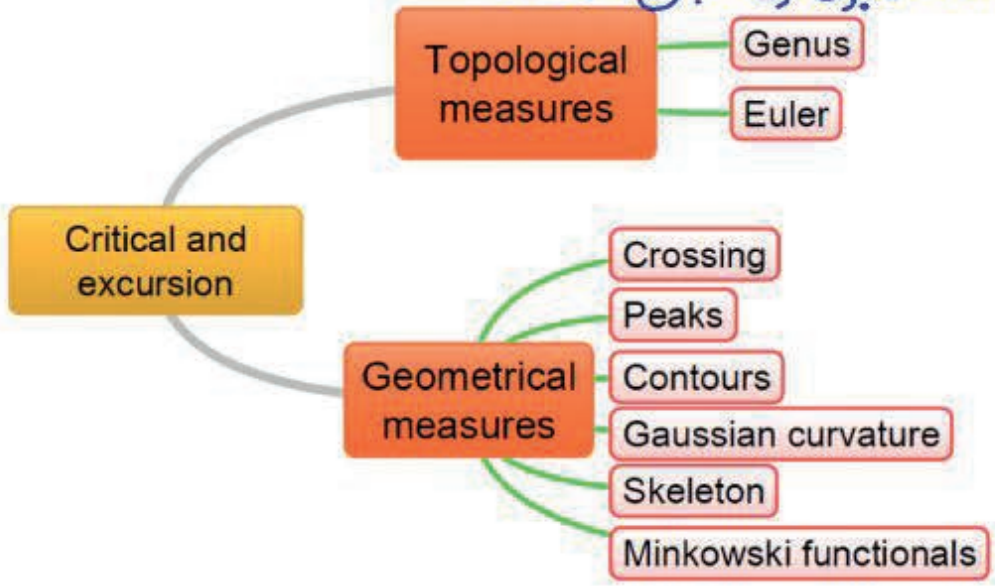
Peaks



S.M.S. Movahed et. al., (2013)

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

در نمودار زیر دسته‌بندی از حیث خواص موضعی (خواص هندسی) و خواص سراسری (خواص توپولوژی) آمده است. البته ارتباطاتی بین این دو بخش وجود دارد.



در اینجا قصد نداریم هر موارد بالا را بررسی کنیم فقط در مورد دو تای آن یعنی Peaks و Crossing را بررسی می‌کنیم. برای اینکار از چارچوب احتمالاتی که در بخش قبل تدوین شد استفاده خواهیم کرد. در واقع مبتنی بر این چارچوب می‌توان هر دنرگی دلخواه را بر اساس یک متوسط‌گیری به صورت زیر تعریف کرد

$$\langle F \rangle = \langle \text{شرایط مبتنی بر استخراج دنرگی} \rangle$$

$$= \langle F \rangle_{Gaussian} + \text{بخش‌های اختلالی}$$

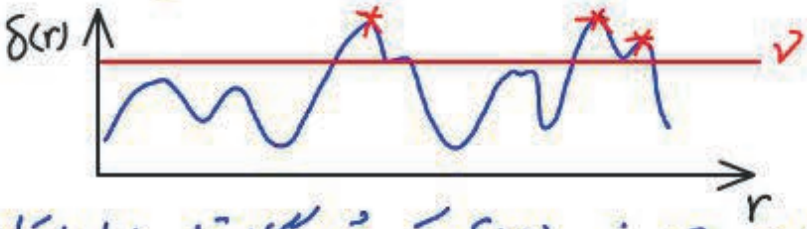
همچنین می‌توان ادعا کرد که بر اساس چارچوب احتمالاتی امکان مقایسه رهیافت نظری و محاسباتی فراهم می‌شود. از سوی دیگر وقتی توان پیش‌بینی‌های نظری انجام داد می‌توان انتظار داشت که روش بهینه در کمی کردن میدان مورد مطالعه استخراج کرد. نکته دیگری که باید اینجا خاطرنشان کنم این است که ممکن است این سئوال مطرح شود که چرا معیارهای مختلف برای کمی کردن میدان تصادفی بکار می‌رود؟ این یک سئوال بسیار مهم است. تابع توزیع فراوانی را نشان می‌دهد. تابع همبستگی اطلاعات در خصوص همبستگی‌ها در میدان تصادفی را مشخص می‌کند. برای یافتن دنرگی‌های مختلف و تمایز قائل شدن بین میدان‌های مختلف موارد مذکور کافی نیستند و از سوی دیگر روش‌های مختلف

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

معایب و مزایای مختلفی دارند بنابراین کاملاً منطقی است که روش‌های متعددی ابداع و بکار بریم.

• بیشینه های موضعی local peaks

از بین معیارهای مختلف برای بررسی من در اینجا بررسی تعداد قله ها را در یک میدان تصادفی را انتخاب می‌کنم. دلیل این انتخاب این است که ضمن وجود شرایط مختلف برای داشتن قله ها در یک میدان می‌توان اطلاعات تک نقطه‌ای را به صورت تحلیلی حساب کرد. ابتدا یک میدان 1+1 بعدی را انتخاب می‌کنم.



در واقع هدف ما این است که در میدان تصادفی $\delta(r)$ در یک بعد چگالی قله ها را بالاتر از تراز ν محاسبه کنیم. برای این منظور داریم:

$$\delta(r) \longrightarrow \alpha(r) = \frac{\delta(r) - \langle \delta(r) \rangle}{\sigma_0}$$

که در آن σ_0 واریانس میدان δ است. از آنجا که به دنبال قله ها هستیم لذا می‌توان فهمید که ماتریس A که مشخصه های میدان را در بر می‌گیرد فقط دارای ۳ عضو است یعنی

$$A_\mu : \{ \alpha(r) , \eta(r) , \xi(r) \}$$

که در آن $\eta(r) = \frac{\partial \alpha}{\partial r}$ و $\xi(r) = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2}$. توجه کنید در اینجا ۲ فقط تابع مثلاً α است لذا من آنرا با ۲ نشان می‌دهم. خوب قبل از اینکه جلو برویم به این سوال پاسخ می‌دهیم که برای اینکه قله داشته باشیم چه شرایطی باید ارضا شود؟

① $\delta(r) \geq \nu\sigma_0$ اول اینکه باید مقدار میدان از آستانه مشخص شده باید بالاتر قرار گیرد. این شرط برای این است که قله بالاتر از آستانه ν به دست آید.

② $\eta(r, r_p) = 0$ باید مشتق اول در مکان قله صفر باشد تا میدان اکسترمم باشد

③ شرط قله بودن این است که مشتق دوم منفی باشد

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

اکنون می‌خواهم با در نظر گرفتن موارد مذکور چگالی قله‌ها در آستانه بزرگتر از ν_0 را محاسبه کنم

بر طبق تعریف داریم

$$\langle n_p(r) \rangle = \sum_{r_p} \delta_D(r - r_p)$$

معنی عبارت بالا این است که اگر بخواهیم در نقطه r متوسط چگالی قله‌ها را داشته باشیم

باید زیر حالت‌های مختلفی را برداریم و در r نگاه کنیم اگر شرایط ۳ گانه فوق برای داشتن قله دارا بود

وجود داشت در آن صورت تابع دلتا انجام می‌دهد و بعد بر تعداد کل نمونه‌ها تقسیم می‌کنیم.

شکل پیوسته عبارت فوق عبارت است از:

$$\langle n_p(r) \rangle = \int dA_\mu \; \delta_D(r - r_p) \, P(A_\mu)$$

$$= \int d\alpha \, d\eta \, d\xi \; \delta_D(r - r_p) \, P(\alpha, \eta, \xi)$$

واضح است برای اینکه بتوان عبارت فوق را محاسبه کرد باید ارتباط بین تابع دلتای دیراک

و متغیرهای انتگرال‌گیری را پیدا کنیم، که من از آن به عنوان ژاکوبین تبدیل نام می‌برم. برای این

این تبدیل توجه کنید داریم:

$$\alpha(r) = \alpha(r_p) + (r - r_p)\,\eta(r_p) + \frac{(r - r_p)^2}{2!}\,\xi(r_p) + \cdots$$

$$\eta(r) = \eta(r_p) + (r - r_p)\,\xi(r_p) + \cdots$$

$$\eta(r) - \underbrace{\eta(r_p)}_{0} = (r - r_p)\,\xi(r_p) + \cdots$$

$$\delta_D(\eta) = \delta_D(r - r_p)\,|\xi(r_p)|^{-1}$$

یعنی

$$\delta_D(r - r_p) = |\xi| \, \delta_D(\eta)$$

پس

$$\langle n_p(r) \rangle = \int d\alpha \, d\eta \, d\xi \;\; |\xi| \, \delta_D(\eta) \, P(\alpha, \eta, \xi)$$

البته رابطه بالا دارای نقص است چرا که فقط شرط صفر شدن مشتق اول را دارد در صورتی که

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

شرط اینکه قله بالاتر از آستانه $\nu\sigma_0$ باشد و اینکه نقطه اکسترمم باید حتماً قله باشد را هنوز نداریم با اضافه کردن دو شرط زیر مسئله تکمیل می‌شود

$$\langle n_p(r)\rangle_{>\nu\sigma_0} = \int d\alpha\, \Theta(\alpha-\nu) \int d\eta\, \delta_D(\eta) \int d\xi\, \Theta(-\xi) \times p(\alpha,\eta,\xi)\,|\xi|$$

اکنون اگر شکل $p(\alpha,\eta,\xi)$ را داشته باشیم عبارت فوق محاسبه می‌شود. قبل از اینکه جواب را برای حالت های خاص استخراج کنیم توجه کنید می‌توان نوشت:

$$\langle n_p(r)\rangle_{>\nu\sigma_0} = \langle \underbrace{\Theta(\alpha-\nu)}_{\text{شرط بالاتر بودن از آستانه}}\ \underbrace{\delta_D(\eta)}_{\text{شرط اکسترمم بودن}}\ |\xi|\ \underbrace{\Theta(-\xi)}_{\text{شرایط قله بودن}} \rangle$$

حال در نظر بگیریم که تابع توزیع دارای شکل گوسی چندگانه باشد یعنی

Multivariate Gaussian PDF

$$p(\alpha,\eta,\xi) = (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}(C)}}\, e^{-\frac{A^T\cdot C^{-1}\cdot A}{2}}$$

که در آن

$$C = \langle A\otimes A\rangle = \begin{bmatrix} \langle\alpha^2\rangle & \langle\alpha\eta\rangle & \langle\alpha\xi\rangle \\ \langle\eta\alpha\rangle & \langle\eta^2\rangle & \langle\eta\xi\rangle \\ \langle\xi\alpha\rangle & \langle\xi\eta\rangle & \langle\xi^2\rangle \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sigma_1^2 \\ 0 & \sigma_1^2 & 0 \\ -\sigma_1^2 & 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

که در آن

$$\sigma_j^2 = \frac{L}{2\pi}\int dk\, k^{2j} P(k)$$

با تعریف

$$q \equiv -\xi/\sigma_0 \quad , \quad \gamma \equiv \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2\sigma_0} \quad , \quad R \equiv \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

خواهیم داشت:

$$n_p(>\nu) = \frac{1}{\left[(2\pi)^3(1-\gamma^2)R^2\right]^{1/2}} \int_\nu^{+\infty} d\alpha \int_0^{+\infty} dq\, q\, e^{-S_0}$$

و

$$S_0 \equiv \left(\nu^2 - 2\gamma\nu q + q^2\right)/2(1-\gamma^2)$$

که انتگرال های فوق به صورت تحلیلی قابل تعیین هستند.

در واقع تا اینجا توانستیم با داشتن انرژی سوی طیفی از یک میدان تصادفی بدون اینکه بخواهیم شبیه سازی انجام دهیم با فرض گوسی بودن چگالی قله ها را به طور متوسط برحسب آستانه مشخص شده استخراج کنیم.

از دیگر اهمیت انتخاب این مثال این است که برای مطالعه تشکیل ساختارهای بزرگ مقیاس در کیهان شناسی مشخصه بسیار مفیدی است.

این روش محاسبه را می توان در 2D و 3D تعمیم داد. برای مثال در 2D داریم:

$$A_p : \{\alpha(r), \eta_x, \eta_y, \xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{yy}\}$$

و با در نظر گرفتن شرط قله ها در تراز ν

$$\langle n_p \rangle = \langle \delta_D(\alpha-\nu)\, \delta_D(\vec{\eta})\, |\mathrm{Det}(\xi)|\ \text{Condition for Peak} \rangle$$

با تغییر متغیرهای

$$X \equiv -\frac{\xi_{xx}+\xi_{yy}}{\sigma_2} \qquad Z \equiv \frac{2\xi_{xy}}{\sigma_2}$$

$$Y \equiv \frac{\xi_{xx}-\xi_{yy}}{\sigma_2}$$

پس

$$\mathrm{Det}(-\xi) = \frac{X^2-Y^2-Z^2}{4\sigma_2^2}$$

توجه کنید چون $(-\xi)$ در نظر گرفتیم لذا

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

برای داشتن قله‌ی در فیلتر باید مثبت باشد پس

$$\langle n_p \rangle = \int d\alpha \; \delta_D(\alpha-\nu) \int_{-\sqrt{x^2-y^2}} d\eta_x \, d\eta_y \; \delta_D(\eta_x)\,\delta_D(\eta_y)$$

$$\int_0^{+\infty} dx \int_{-x}^{+x} dy \int_{-\sqrt{x^2-y^2}} dz \quad (x^2-y^2-z^2)\; p(\alpha, \bar{\eta}=0, x, y, z)$$

در واقع شرط قله شدن $x>0$ ، $y^2+z^2<x^2$ است

با این حساب شمارش قله در میدان 1+2D در تراز ν به صورت زیر است:

$$n_p(\nu) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\,\theta_*^2}\, e^{-\nu^2/2}\, G(\gamma, \gamma\nu)$$

$$\theta_* \equiv \sqrt{2}\,\sigma_1/\sigma_2 \quad , \quad \gamma \equiv \frac{\sigma^2}{(\sigma_0\sigma_2)}$$

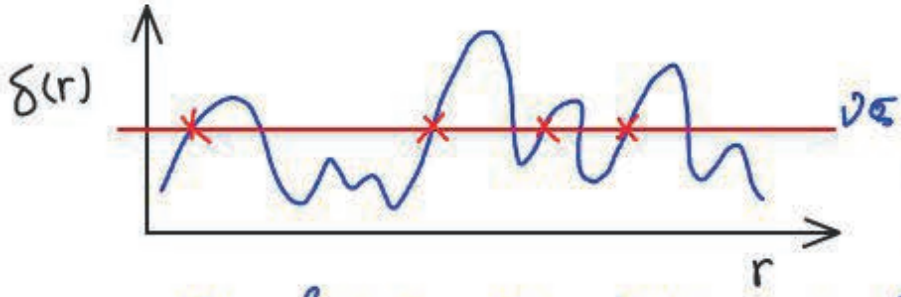
و تابع G به صورت زیر است

$$G(\gamma, x_*) \equiv (x_*^2-\gamma^2)\left\{1-\frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left[\frac{x_*}{\sqrt{2(1-\gamma^2)}}\right]\right\} + x_*(1-\gamma^2)\frac{\exp\left[\frac{-x_*^2}{2(1-\gamma^2)}\right]}{\sqrt{2\pi(1-\gamma^2)}} + \frac{\exp\left[\frac{-x_*^2}{3-2\gamma^2}\right]}{\sqrt{3-2\gamma^2}}\left\{1-\frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left[\frac{x_*}{\sqrt{2(1-\gamma^2)(3-2\gamma^2)}}\right]\right\}$$

قبل از اینکه به سراغ دیگر آماره بروم بیان می‌کنم که تا اینجا مطالعات تک نقطه‌ای انجام شد. یعنی فقط این سوال مطرح شد که همگالی تعداد قله‌ها چقدر است؟ اما می‌توان پرسید که توزیع قله‌ها در اطراف یکدیگر چگونه است؟ در واقع، بیان این پرسش ما داریم خوشگی را بررسی می‌کنیم

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

که من در این درسنامه به آن اشاره نمی‌کنم ولی می‌توان در مراجع آن را یافت.



• چگالی برخوردها

شکل روبرو را در نظر بگیرید:

نقاطی که با X نشان داده شده است شرط برخورد در تراز ν_0 را با شیب مثبت دارند.

حال سؤال این است که تعداد این برخوردها چقدر است؟ در ابتدا یک میدان 1+1D را در نظر می‌گیریم.

$$\langle n_{up}(r)\rangle = \sum_{r_{up}} \delta_D(r-r_{up})$$

$$= \int dA_\mu\, \delta_D(r-r_{up})\, P(A_\mu)$$

می‌توان حدس زد که A_μ دارای چه کمیت‌هایی است پس $A_\mu : (\alpha(r), \eta(r))$

چرا؟ چون ما فقط برخورد را بدون در نظر گرفتن میدان مهم می‌دانیم، چه شیبی خط تراز را قطع می‌کند. پس فقط α و η را بکار می‌بریم. مانند قبل ارتباط بین تابع دلتای دیراک و dA_μ را پیدا می‌کنیم پس:

$$\alpha(r) = \alpha(r_{up}) + (r-r_{up})\,\eta + \cdots$$

$$\alpha(r)-\alpha(r_{up}) = (r-r_{up})\,\eta + \cdots$$

$$\downarrow$$

$$\delta_D(\alpha-\nu) = \delta_D(r-r_{up})\,|\eta|^{-1}$$

$$\langle n_{up}\rangle = \langle \delta_D(\alpha-\nu)\,|\eta|\,\theta(\eta)\rangle$$

برای داشتن برخورد با شیب مثبت

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

پس

$$\langle n_{up} \rangle = \int d\alpha\, \delta_0(\alpha - \sigma) \int d\eta\, |\eta|\, \theta(\eta) \times P(\alpha, \eta)$$

اگر $P(\alpha,\eta)$ گوسی باشد لذا خواهیم داشت:

$$\langle n_{up} \rangle = \frac{\sigma_1}{2\pi\sigma_0}\, e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

اگر توجه کنیم ویا لنسیون $\langle n_{up} \rangle$ به صورت طول را است

پس $l(\sigma) \propto \frac{1}{n_{up}(\sigma)}$ یعنی طول شخصه‌ای که به طور کاری در موتر از بین لذا این

طول برخورد با شیب مثبت خواهیم داشت. تصور کنید که به جای $\delta(\sigma)$ میدان تصادفی قیمت

نفت برحسب زمان باشد. در آن صورت با فرض فانا بودن تحول قیمت نفت می‌توان

با محاسبه آماره برخوردها مدت زمانی که قیمت نفت آن تراز را با شیب مثبت قطع می‌کند را

محاسبه کرد. و مفاهیمی مثل ریسک و غیره را کمی کرد.

در اینجا نیز دوباره می‌توان مفاهیمی همچون خوشگی برخوردها را نیز بررسی کرد.

و همچنین می‌توان از آن به عنوان یک فیلتر جهت ناهمگرد استفاده کرد.

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

faculties.sbu.ac.ir/~movahed

بخش سوم: کاربرد آمار برخوردها برای یافتن ناهمسانگردی میدانهای 1+2D

Crossing Statistics of Anisotropic Stochastic Surface

M. Ghasemi Nezhadhaghighi,[1] S. M. S. Movahed,[2,3,*] T. Yasseri,[4,5] and S. Mehdi Vaez Allaei[6,3,†]

[1]Department of Physics, College of Sciences, Shiraz University, Shiraz 71454, Iran
[2]Department of Physics, Shahid Beheshti University, G.C., Evin, Tehran 19839, Iran
[3]School of Physics, Institute for Researches in Fundamental Sciences (IPM), P.O.Box 19395-5531,Tehran, Iran
[4]Oxford Internet Institute, University of Oxford, 1 St Giles', OX1 3JS, Oxford, UK
[5]Department of Physics, Budapest University of Technology and Economics, Budafoki ut 8, H1111, Budapest, Hungary
[6]Department of Physics, University of Tehran, Tehran 14395-547, Iran

In this paper, we propose crossing statistics and its generalization, as a new framework to characterize the anisotropy in a 2D field, e.g. height on a surface, extendable to higher dimensions. By measuring ν^+, the number of up-crossing (crossing points with positive slope at a given threshold of height (α)), and N_{tot} (the generalized roughness function), it is possible to distinguish the nature of anisotropy, rotational invariance and Gaussianity of any given surface. For the case of anisotropic correlated self- or multi-affine surfaces (even with different correlation lengths in various directions and/or directional scaling exponents), we analytically derive some relations between ν^+ and N_{tot} with corresponding scaling parameters. The method systematically distinguishes the directions of anisotropy, at 3σ confidence interval using P-value statistics. After applying a typical method in determining the corresponding scaling exponents in identified anisotropic directions, we are able to determine the kind and ratio of correlation length anisotropy. To demonstrate capability and accuracy of the method, as well validity of analytical relations, our proposed measures are calculated on synthetic stochastic rough interfaces and rough interfaces generated from simulation of ion etching. There are good consistencies between analytical and numerical computations. The proposed algorithm can be mounted with a simple software on various instruments for surface analysis and characterization, such as AFM, STM and etc.

Keywords: Crossing statistics, Stochastic field, Anisotropy, Gaussianity, Correlation length, Scaling exponent.

FIG. 1: A sketch showing the Monte Carlo modeling set-up for an ion-beam sputtering. As described in the text, an ion beam trajectory makes an angle θ with the axes z, and the projection of the ion-beam direction on the $x-y$ plane, makes an angle of ϕ_{exp} relative to the x axis. Anisotropic direction is perpendicular to the $x-y$ projection of the ion-beam.

در این مقاله هدف این بوده که با محاسبه آمار برخوردها در جهت های مختلف، جهت ناهمسانگردی را استخراج کنیم.

البته تاکید بر این بوده که یک نرم افزار تهیه شود و بر روی دستگاه های تخصصی یا بی سطوح نصب شود

برای این منظور از دو مقیاس شبیه سازی انجام شده است { ۱- تولید سطوح fBm
۲- شبیه سازی خزش سطح

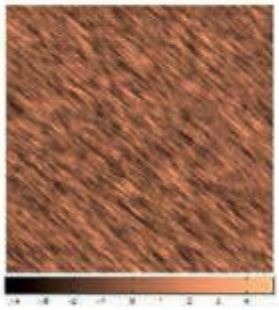
برای هر دو نوع شبیه سازی سطوح زبر با یک روش برخوردها با دقت بسیار خوبی جهت ناهمسانگرد قابل تعیین است.

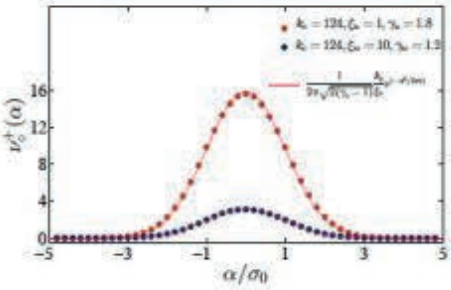
faculties.sbu.ac.ir/~movahed

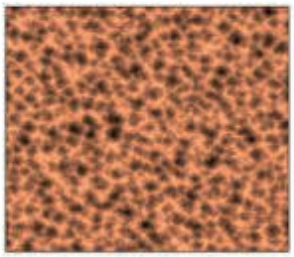
برای شبیه‌سازی از دو نوع طیف ناهمسانگرد که در زیر آورده‌ام استفاده شده است

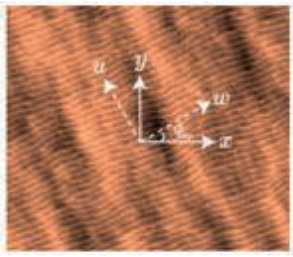
$$S^{(2D)}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi\gamma\sigma_0^2 k_e^{2\gamma}\xi_u\xi_w}{L^2\left[k_e^2+\xi_u^2k_u^2+\xi_w^2k_w^2\right]^{\gamma+1}}$$

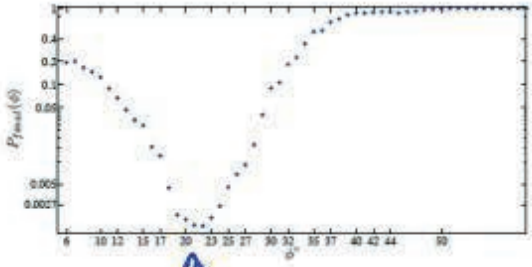
$$S^{(2D)}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi\sigma_0^2 k_e^{2(\gamma_u+\gamma_w)}\xi_u\xi_w\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\gamma_u\right)}{\Gamma(\gamma_u)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\gamma_w\right)}{\Gamma(\gamma_w)}}{L^2\left[k_e^2+\xi_u^2k_u^2\right]^{\gamma_u+1/2}\left[k_e^2+\xi_w^2k_w^2\right]^{\gamma_w+1/2}}$$











در تراز 35 هبت ناهمسانگرد مشاهده شده است

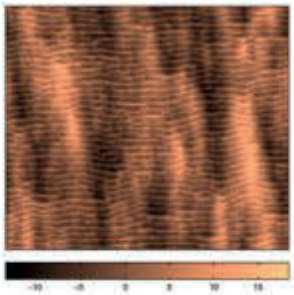


FIG. 2: Upper: Isotropic simulated rough surface for $\theta = 0°$ and $\phi_{exp} = 0°$. Middle: An preferred direction for $\theta = 25°$ and $\phi_{exp} = 25°$ exists for simulated surface. Lower panel corresponds to simulated anisotropic rough surface for $\theta = 50°$ and $\phi_{exp} = 0°$. The color-bar is in arbitrary unit.

بخش چهارم: جمع‌بندی

در این رساله هدفم این بود که میدان‌های تصادفی را تعریف کنم و جایگاه آنها را در فرآیندهای طبیعت نشان دهم. پس از تعیین مشاهده‌پذیرها در چارچوب روش احتمالی تابع توزیع استخراج شد. بعد نشان دادم که هر دیدگاهی دلخواه چگونه با یک متوسط‌گیری قابل تعیین است. به عنوان نمونه به چند معیار هندسی و توپولوژیک اشاره کردم و آمار مربوط به چگالی قله‌ها و چگالی برخوردها را استخراج کردم. این پارامترها هم به عنوان کاربرد برای تعیین هبت ناهمسانگرد در سطوح از آنها استفاده کردم.