بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۱۱ر۳ر۱۴۰۰

Covariant form of Fokker-Planck Equation

$$
\begin{cases}
① \quad p \longrightarrow \text{Scaler} \\
② \quad D^{(1)} \longrightarrow \text{Contravariant Vector} \\
③ \quad D^{(2)} \longrightarrow \text{Contravariant Tensor}
\end{cases}
$$

در جلسه قبل دیدیم که از انتظارات بالا فقط شرط ③ ارضا شد پس نتیجه می‌گیریم که الزاماً باید p و $D^{(1)}$ را بازتعریف کنیم

① $\quad p \longrightarrow p' = J\,p$ اسکالرگونه رفتار نمی‌کند

$$p \longrightarrow \bar{p} \equiv \sqrt{\text{Det}}\; p \qquad \text{Det} \equiv \text{Det}\{D^{(2)}\}$$

پس ادعا می‌کنیم در این صورت $\bar{p}$ مانند یک اسکالر رفتار می‌کند

$$\bar{p} \longrightarrow \bar{p}' = \sqrt{\text{Det}'}\; p' \overset{?}{=} \sqrt{\text{Det}}\; p$$

$$\text{Det}' = \text{Det}\{D'^{(2)}\} = \text{Det}\left\{\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l} D^{(2)kl}\right\}$$

$$= \text{Det}\left\{\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\right\} \text{Det}\left\{\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}\right\} \text{Det}\{D^{(2)kl}\}$$

$$= \left[\text{Det}\left\{\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\right\}\right]^2 \text{Det}\{D^{(2)}\}$$

$$\boxed{\text{Det}\{D'^{(2)}\} = \left(\frac{1}{J}\right)^2 \text{Det}\{D^{(2)}\}}$$

$$\boxed{p' = \mathcal{J} p}$$

$$\bar{p}' = \sqrt{Det'}\, p' = \frac{\sqrt{Det}}{\cancel{\mathcal{J}}}\, \cancel{\mathcal{J}}\, p = \sqrt{Det}\, p = \bar{p}$$

نشان می‌دهد این ابزار اسکالر گونه شدن $\bar{p}$ را درست است

② $$\dot{D}^i \longrightarrow \dot{D}^{k'} = \underbrace{\left(\frac{\partial x'^k}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\right)\dot{D}^i + \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^j} D^{ij}}_{\text{هنوز شبیه به بردار پادوردا رفتار نمی‌کند}}$$

$$D^i \rightarrow \cancel{D^{k'} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} D^i}$$

$$D^i \longrightarrow \bar{D}^i \equiv D^i - \sqrt{Det}\, \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\bar{D}^{ij}}{\sqrt{Det}}$$

$Det \equiv Det\{D^{ij}\}$

$\bar{D}^{ij} \equiv D^{ij}$

به صورت یک بردار پادوردا رفتار می‌کند

$$\bar{D}^i \rightarrow \boxed{\bar{D}^{k'} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \bar{D}^i}$$

$$\bar{D}^i \longrightarrow \bar{D}^{i'} = D^{i'} - \sqrt{Det'}\, \frac{\partial}{\partial x'^j} \bar{D}^{ij'}$$

تمرین: نشان دهید که در این صورت به این تبدیل می‌شود

$$\bar{D}^{i'} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \bar{D}^k$$

یادآوری می‌کنم که زمان در سری زمانی $\{x\}$ را از دستگاه بدون پریم به دستگاه پریم‌دار بدون تغییر در نظر گرفتیم

اکنون مجدداً به معادله فوکر-پلانک برمی‌گردیم تا بخش‌هایی که توقف کردیم را به نحوی کنار هم قرار دهیم.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot S = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mathcal{L}_{FP}\, p \longrightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial S_i}{\partial x^i} = 0} \; *$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S}$$

یادآوری می‌کنم

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left[\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) D^1 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 D^2 \right] p$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[D^1 - \frac{\partial}{\partial x} D^2 \right] p$$

probability current

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} S = 0} \qquad S \equiv \left[D^1 - \frac{\partial}{\partial x} D^2 \right] p$$

$$\boxed{S^i = D^i p - \frac{\partial}{\partial x^j} D^{ij} p}$$

شکل مرسوم جریان احتمال

از شکل هموردا که در آن بجای p

$\bar{p}$ را داریم پس شکل همورداری جریان احتمال به صورت زیر است:

$$S^i \longrightarrow \boxed{\bar{S}^i = \bar{D}^i \bar{p} - \bar{D}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{p}}$$

[خواهیم دید که در تعریف $\bar{D}^i$ هم $\frac{\partial}{\partial x^i} \bar{D}^{ij}$ وجود دارد پس در نهایت این عبارت ساده می‌شود]

$$\bar{S}^i \to \bar{S}^{i\prime} = \bar{D}^{i\prime} \bar{p}' - \bar{D}^{ij\prime} \frac{\partial}{\partial x^{j\prime}} \bar{p}'$$

$$\boxed{\bar{S}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{l}}\, \bar{S}^{l}}$$

* می‌توان نشان داده

چون فقط تنسور بردار

پادوردا است.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{S} \longrightarrow \bar{S}^{i}_{;i} \equiv \underbrace{\frac{\partial \bar{S}^{i}}{\partial x^{i}}}$$

مشتق هموردا

Covariant Derivative

$$\boxed{\bar{S}^{i}_{;i} \equiv \sqrt{Det}\, \frac{\partial}{\partial x^{i}} \frac{\bar{S}^{i}}{\sqrt{Det}}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^{i}} \longrightarrow \underbrace{\sqrt{Det}\, \frac{\partial}{\partial x^{i}} \frac{1}{\sqrt{Det}}}}$$

پس

$$\bar{S}^{i}_{;i} \longrightarrow \bar{S}^{i'}_{;i'} = \sqrt{Det'}\, \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \frac{\bar{S}^{i'}}{\sqrt{Det'}} \overset{?}{=} \bar{S}^{i}_{;i}$$

پس باید این نتیجه را داشته باشیم

$$\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{S} = \text{اسکالر}}$$

$$\bar{S}^{i'}_{;i'} = \sqrt{Det}\, \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \frac{\bar{S}^{i}}{\sqrt{Det}}$$

$$= \sqrt{Det}\left[\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^{\prime k}} \frac{\partial x^{\prime k}}{\partial x^{i}} J\right] \frac{\bar{S}^{i}}{\sqrt{Det}}$$

$$= \frac{\sqrt{Det}}{J}\, \frac{\partial}{\partial x^{\prime k}}\, \underbrace{\frac{\partial x^{\prime k}}{\partial x^{i}}\, \frac{J}{\sqrt{Det}}\, \bar{S}^{i}}$$

$$\bar{S}^{i}_{;i} = \underbrace{\sqrt{Det'}\, \frac{\partial}{\partial x^{\prime k}} \frac{\bar{S}^{k'}}{\sqrt{Det'}}} = \bar{S}^{k'}_{;k} = \bar{S}^{i'}_{;i'}$$

Dummy index

~~پس نشان دادیم که اسکالر است~~

پس در نتیجه شکل هموردای سازگار F.P به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + S^{i}_{;i} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{S}^{i}_{;i} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = -\bar{S}^{i}_{;i} = -\left[\bar{D}^{i}\bar{p} + \bar{D}^{ij}\,\bar{p}_{;j}\right]_{;i}}$$

شکل هموردا دارد

شکل هموردا ندارد

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial S^{i}}{\partial x^{i}} = 0}$$

p اسکالر گونه است

D^{i} بردار گونه است

D^{ij} تانسور پادوردا دو مرتبه

اسکالر گونه است $\bar{p} = \sqrt{Det}\;p$

بردار پادوردا گونه است $\bar{D}^{i} = D^{i} - \sqrt{Det}\,\frac{\partial}{\partial x^{i}}\frac{\bar{D}^{ij}}{\sqrt{Det}}$

تانسور پادوردا گونه است $\bar{D}^{ij}$ ..

$$\frac{\partial}{\partial x^{i}} \rightarrow \boxed{\sqrt{Det}\,\frac{\partial}{\partial x^{i}}\,\frac{1}{\sqrt{Det}}}$$

همان تحریکی که $\frac{\partial^2}{\partial x^2} D^2$ داشته باشیم $\leftarrow D^2 \frac{\partial}{\partial x} p$

$\frac{\partial}{\partial x} D^2$ به نظر آمده نوشته شود

در صورتی که اکنون جزء $\bar{D}^{i}$ نوشته شود

Colored Gaussian Noise

Linear Langevin Eq: $\frac{\partial u}{\partial t} = -\xi u + \sqrt{D^{(2)}}\,\eta(t)$

$\xi \equiv cts$

Gaussian White Noise $\rightarrow \langle \eta(t) \rangle = 0 \qquad p(\eta(t)) = \text{Gaussian}$

$\rightarrow \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2\,\delta_D(t-t')$

$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle \neq \delta_D$

$= f(t,t') \equiv$ Weighted TPCF

همبستگی زمانی

طیف توان $\Rightarrow \bar{f}(\omega) = \int d\tau\, e^{i\omega\tau} \underbrace{f(\tau)}_{\delta(\tau)} \neq cts$

Kubo oscillator

النون

$\frac{du}{dt} = i[\omega + \varepsilon(t)]u$

$\varepsilon(t) \equiv$ Gaussian Stochastic force

$\langle \varepsilon(t) \rangle = 0$

تابع همبستگی $\langle \varepsilon(t)\varepsilon(t') \rangle = \gamma D e^{-\gamma|t-t'|}$

$\varepsilon(t) \leftarrow \eta(t)$ با جملات نوفه که دارای حافظه است $\leftarrow$ رنگی است

$$\downarrow \quad \frac{du}{dt} = i\left[\omega + \varepsilon(t)\right]u$$

$$u(t) = u(0)\, e^{i\omega t + i\int_0^t \varepsilon(t')\,dt'}$$

$$\langle u(t)\rangle = ? = \left\langle u(0)\, e^{i\omega t + i\int_0^t \varepsilon(t')\,dt'} \right\rangle$$

we Know that

$$e^{i\int_0^t \varepsilon(t')\,dt'} = 1 + i\int_0^t \varepsilon(t')\,dt'$$

$$- \frac{1}{2!}\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2\, \varepsilon(t_1)\,\varepsilon(t_2) + \dots$$

$$\left\langle e^{i\int_0^t \varepsilon(t')\,dt'} \right\rangle = 1 + 0 + \dots$$

$$= e^{-Dt + \frac{D}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right)}$$

$$\langle u(t)\rangle = \langle u(0)\rangle\, e^{i\omega t - D\left(t - \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma}\right)}$$

$$e^{-t/(1/\gamma)}$$

① if $\gamma \to \infty$ $\quad \langle \varepsilon(t)\,\varepsilon(t')\rangle = \gamma D\, e^{-\gamma|t-t'|}$

$$\lim_{\gamma\to\infty} \langle \varepsilon(t)\,\varepsilon(t')\rangle \simeq \delta_D(t-t')$$

نتیجه مثل حالت لانژون خواهد بود.

$$-i\omega t - \gamma\, \underline{D t^2}$$

② if $\gamma \to 0$ $\quad \langle u(t)\rangle = \langle u(0)\rangle e^{\;\;}$ $\quad$ 2

میرایی دارد

نوفه رنگی

$$\boxed{\frac{du}{dt} = i\left[\omega + \varepsilon(t)\right] u}$$

معادله

به شکل در معادله تحول خطی شده بنویسیم. اکنون به جای اینکه مستقیماً از خواص ε استفاده کنیم ادعا می‌کنیم که $\varepsilon(t)$ به یک متغیر تصادفی است از یک معادله لانژون گونه استخراج شده که در نتیجه آن دارای

خواص
$$\begin{cases} \langle \varepsilon(t)\rangle = 0 \\ \langle \varepsilon(t)\varepsilon(t')\rangle \simeq e^{-\gamma|t-t'|} \end{cases}$$

نوفه لانژون

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = i(\omega_0 + \varepsilon(t))\, u \\ \boxed{\dfrac{d\varepsilon}{dt} = -\gamma\varepsilon + \gamma\sqrt{D}\,\eta(t)} \end{cases} \to \{u, \varepsilon; t\}$$

$p(u, \varepsilon, t) = ?$

$\langle \eta \rangle = 0$

$\langle \eta(t)\eta(t')\rangle = 2\delta(t-t')$

$D^{(1)}_{u,\varepsilon}, D^{(2)}_{uu,\varepsilon\varepsilon,\varepsilon u}$

$$\frac{\partial p(u, \varepsilon; t)}{\partial t} = \mathcal{L}_{FP}\, p$$

$$\mathcal{L}_{FP} \equiv -\frac{\partial}{\partial u}(i\omega_0 + i\varepsilon)u + \mathcal{L}_\varepsilon$$

$$\mathcal{L}_\varepsilon \equiv \gamma \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\varepsilon + \gamma^2 D \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}$$

وظیفه: داشتن حل p ، حالت مانا در ...