Stochastic000228

۱۴۰۰/۲/۲۸ جلسه — بسم الله الرحمن الرحیم

ادامه: یادآوری و خواص ویژگی های آماری:

④ for small "t"

$$M_{1i}(t) = G_{ij}(t)\, x_j^{(0)} \quad , \quad \bar{G}(t) = e^{-\bar{\xi} t}$$

for small t $\quad \bar{G}(t) = \mathbb{1} - \bar{\xi} t + \frac{1}{2} \bar{\xi}^2 t^2 + \cdots$

$$\lim_{t\to 0} M_{1i} = x_i^{(0)} - \xi_{ij}\, x_j^{(0)}\, t + \cdots$$

$\langle \eta \rangle = 0$

$$\lim_{\xi t\to\infty} M_{1i} = \text{Stationary Regime} = \text{Drift Part} + \text{Stochastic}$$

$= 0$

$$\lim_{t\to 0} K_{2ij} = \lim_{t\to 0} \int_0^t G_{ik}(t-t')\, G_{js}(t-t')\, g_{ks}\, dt'$$

$$= g_{ij}\, t - \frac{1}{2}\left(\xi_{ik}\, g_{kj} + \xi_{jk}\, g_{ik}\right) t^2 + \cdots$$

for $i=j$ $\quad \sigma^2 = K_{2ii} \simeq g\, t$

$$\boxed{K_{n i_1 \ldots i_n} = \left\langle \left[x_{i_1}(t) - M_{1 i_1}\right]\left[x_{i_2}(t) - M_{1 i_2}\right] \cdots \left[x_{i_n}(t) - M_{1 i_n}\right] \right\rangle}$$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ n=4}} K_{4i} \simeq 3 g^2 t^2 = 3 K_{2ii}^2$$

به یک گوسی نزدیک می‌شود

$i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = i$

5 Correlation function (Weighted TPCF)

$$C_{ij}(t,\tau) = \langle x_i(t+\tau)\, x_j(t) \rangle_{ens.}$$

Cross-Correlation

$$\boxed{x_i(t=0) = x_i^{(0)}}$$

$$x_i(t) = x_i^h(t) + x_i^p(t)$$

$$= G_{ij}(t)\, x_j^{(0)} + \int_0^t dt'\, G_{ij}(t-t')\, \eta_j(t')$$

$$x_i(t+\tau) = x_i^h(t+\tau) + x_i^p(t+\tau)$$

$$= G_{ij}(t+\tau)\, x_j^{(0)} + \int_0^{t+\tau} dt'\, G_{ij}(t+\tau-t')\, \eta_j(t') \leftarrow x^{(0)}$$

$$= G_{ij}(\tau)\, x_j(t) + \int_t^{t+\tau} dt'\, G_{ij}(t-t')\, \eta_j(t') \leftarrow x(t)$$

$$C_{ij}(t,\tau) = \Big\langle \overbrace{\Big[G_{jk}(t)\, x_k^{(0)} + \int_0^t dt'\, G_{jk}(t-t')\, \eta_k(t') \Big]}^{x_j(t)}$$

$$\times \overbrace{\Big[G_{is}(\tau)\, x_s(t) + \int_t^{t+\tau} dt'\, G_{is}(t-t')\, \eta_s(t') \Big]}^{x_i(t+\tau)} \Big\rangle$$

$$= \Big\langle \Big[G_{is}(\tau)\, x_s(t) + \int_t^{t+\tau} dt'\, G_{is}\, \eta_s(t') \Big] x_j(t) \Big\rangle$$

$$= G_{is}(\tau) \langle x_s(t)\, x_j(t) \rangle + 0 \rightarrow \langle x(t)\, \eta(t') \rangle \quad t' > t, \; t \neq t'$$

$$C_{ij}(t,\tau) = G_{is}(\tau)\langle x_s(t)\, x_j(t)\rangle$$

$$= G_{is}(\tau)\, \underbrace{C_{sj}(t,0)}$$

$$\text{e.g. } i=j \;\; \rightarrow \;\; C(t,\tau) = G(\tau)\, \overbrace{\langle x(t)\, x(t)\rangle}^{\langle x(t)\rangle = 0 \;\rightarrow\; \sigma_x^2}$$

$$i=1 \qquad \boxed{C(\tau) = \underbrace{G(\tau)}\, \sigma_x^2}$$

آیا درس می‌کنیم

$$\Psi(t,\tau) \simeq B(t,\tau)\, C(t,\tau)$$

$$\Psi(t) = B\, C(t) \qquad \rightarrow \qquad \boxed{B(t,\tau) \overset{?}{—} B(t)}$$

یه بحث تحقیقی دنبال شود.

Fractional Gaussian Noise (fGn) ← Stationary

Fractional Brownian Motion ($\underline{fBm}$) ← Non-stationary

$$\begin{cases} \langle x\rangle = 0 \\ C(t) = \langle x(t)\, x(t)\rangle_{esm} = \sigma^2(t) \end{cases}$$

$$x \rightarrow fBm \;\; \longrightarrow \;\; C_{xx}(t) = \sigma^2(t) = t^{2H}\, \underbrace{\sigma^2(t=0)}$$

Greens function

Power-law scaling

$$\sigma^2(t=0) = \langle x(0)\, x(0)\rangle$$

H: Hurst Exponent ⟶ Self-Similar

↓

Fractal

"H" $\longrightarrow$ اگر بتوانیم حساب کنیم $\longrightarrow$ اغلب خواص آماری را به صورت تحلیلی و بدون انجام محاسبات عددی به دست می‌آوریم.

سری زمانی داده $\longleftarrow$ آیا $\underline{fBm}$ یا $\underline{fGn}$ هست یا نه $\longleftarrow$ چگونه H تعیین کنیم

$H = \checkmark$ $\longleftarrow$ اغلب خواص را بدون انجام محاسبات عددی به دست می‌آوریم.

Non-linear Langevin Eq.

$$\dot{x}(t) = h(t,x) + g(t,x)\,\eta(t) \qquad \langle \eta(t) \rangle = 0$$

$$\boxed{\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2\delta_0(t-t')}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = ? \longleftarrow \frac{\partial P}{\partial t} = \checkmark \longleftarrow \frac{\partial P}{\partial t} = ? \longleftarrow D^{(n)} = ?$$

① اگر از مسئله‌ی لانژون که معادله حاکم بر متغیر تصادفی را داریم یعنی $\dot{x}(t)$ $\longleftarrow$ معادله حاکم بر تحول تابع توزیع چیست؟

② مسئله دوم اینکه معادله حاکم بر تحول تابع توزیع متغیر تصادفی را داریم یعنی $\frac{\partial P}{\partial t}$ $\longleftarrow$ معادله حاکم بر تحول متغیر تصادفی چیست؟

مسئله مدل سازی $\longleftarrow$ پیش بینی

Ex: linear Langevin Eq:

$$\dot{x}(t) = -\tilde{\xi}\, x(t) + g\,\eta(t) \qquad \boxed{\begin{array}{l} \xi = cts \\ g = cts \end{array}}$$

$$\boxed{\dot{x}(t) = D^{(1)}(x,t) + \sqrt{D^{(2)}}\,\eta(t)}$$

①

$$* \; D^{(1)} = \lim_{\tau \to 0} \frac{M_1}{\tau} = -\xi x(t)$$

$$* \; D^{(2)} = \lim_{\tau \to 0} \frac{M_2}{2!\,\tau} = g^2$$

$$D^{(n)} = 0 \qquad n \geq 3$$

②

یعنی داشتن معادله حاکم بر تحول سیستم نویز ✓ ✓

* در تصویر لانژون، معادله غیرخطی خواهیم داشت آیا داشتن شرح حالت خطی است؟ *

$$\text{Non-linear Langevin Eq} \longrightarrow D^{(n)} = ?$$

$$\dot{x}(t) = h(x,t) + g(x,t)\,\eta(t) \longrightarrow D^{(n)} = ?$$

$$D^{(n)}(x,t) = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left\langle [\underbrace{x(t+\tau) - x(t)}_{?}]^n \right\rangle \Bigg|_{x(t)=x}$$

اگر کمیت $x(t+\tau) - x(t)$ تعیین شود $\longleftarrow$ $D^{(n)}$ ✓

$$\frac{dx}{dt} = h(x,t) + g(x,t)\,\eta(t)$$

$$x(t+\tau) - x(t) = \int_t^{t+\tau} \left[h(x(t'),t') + g(x(t'),t')\,\eta(t') \right] dt'$$

حول نقطه بسط می‌دهیم $\leftarrow$ $x(t') = x$

$$h(x(t'),t') = h(x,t') + (x(t') - x)\, h'(x,t') + \dots$$

$$g(x(t'),t') = g(x,t') + (x(t') - x)\, g'(x,t') + \dots$$

$$x(t'') - x = \int_t^{t'} dt'' \left[h(x,t'') + g(x,t'')\,\eta(t'') \right]$$

$$x(t+\tau) - x(t) = \int_t^{t+\tau} \left[h(x,t') + (x(t') - x)\, h'(x,t') + \dots \right] dt'$$

$$+ \int_t^{t+\tau} dt' \left[g(x,t') + (x(t') - x)\, g'(x,t') + \dots \right] \eta(t')$$

① ② ③ ④ ⑤ ⑥

$$= \int_t^{t+\tau} h(x,t')\,dt' + \int_t^{t+\tau} dt'\, h'(x,t') \int_t^{t'} dt''\, h(x,t'')$$

$$+ \int^{t+\tau} dt'\, h'(x,t') \int^{t'} dt''\, g(x,t'')\,\eta(t'')$$

$$+\int_t^{t+\tau} dt'\, g(x,t')\,\eta(t') \quad ④ \qquad + \int_t^{t+\tau} dt' \left[g'(x,t') \int_t^{t'} dt''\, h(x,t'') \right] \eta(t') \quad ⑤$$

$$+\int_t^{t+\tau} dt' \left[g'(x,t') \int_t^{t'} dt''\, g(x,t'')\,\eta(t'') \right] \eta(t') \quad ⑥$$

$$\boxed{t \leq t'' \leq t' \leq t+\tau}$$

نقطه شروع t

برای به دست آوردن D'' باید $\langle x(t+\tau)-x(t)\rangle\big|_{x(t)=x}$ به دست آوریم

$$\langle x(t+\tau)-x(t)\rangle\big|_{x(t)=x} = \int_t^{t+\tau} dt'\, h(x,t') \;①\; + \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'} dt''\, h'(x,t')\,h(x,t'') \;②$$

$$+ \overset{③}{0} + \overset{④}{0} + \overset{⑤}{0} +$$

$$+\int_t^{t+\tau} dt'\, g'(x,t') \int_t^{t'} dt''\, g(x,t'')\, \overbrace{\langle \eta(t'')\,\eta(t')\rangle}^{2\delta_D(t'-t'')} \quad ⑥$$

$$\langle\;\rangle = \int_t^{t+\tau} dt'\, h(x,t') + \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'} dt''\, h'(x,t')\,h(x,t'')$$

$$+2\int_t^{t+\tau} dt'\, \underbrace{g'(x,t')\,g(x,t')}_{⑥}\, \tfrac{1}{2}$$

$$\boxed{g' = \frac{dg}{dx}} \qquad \boxed{h' = \frac{dh}{dx}}$$

جمله ⑥ را درست ببینیم

$$\int^{t+\tau} dt'' \int^{t'} dt''\, g'(x,t')\, g(x,t'')\, \langle \eta(t'')\,\eta(t')\rangle$$

$$(6) \equiv \int_t dt' \int_t dt''\, g(x,t)\, g'(x,t)\, \langle \underbrace{\Gamma(t')\,\Gamma(t'')}_{2\delta_0(t'-t'')} \rangle$$

$t \leqslant t'' \leqslant t'$

$$\int_t^{t'} dt''\, 2\,\delta_0(t'-t'') = \int_t^{t'-\epsilon/2} dt''\, 2\delta(t'-t'') + \underbrace{\int_{t'-\epsilon/2}^{t'} dt''\, 2\delta(t'-t'')}_{1/2 \quad 1/2}$$

$t'' \neq t'$

$$\boxed{\int_{t'-\epsilon/2}^{t'+\epsilon/2} dt''\, \delta(t'-t'') = 1}$$

$$\int_{t'-\epsilon/2}^{t'+\epsilon/2} = \underbrace{\int_{t'-\epsilon/2}^{t'}}_{1/2} + \underbrace{\int_{t'}^{t'+\epsilon/2}}_{1/2} = 1$$

ایضاً

$$\begin{cases} D^{(1)} = \lim_{\tau \to 0} \dfrac{1}{\tau} \langle\ \rangle = h(x,t) + 0 + g'(x,t)\, g(x,t) \\[2ex] D^{(2)} = \lim_{\tau \to 0} \dfrac{1}{\tau\, 2!} \langle [\ ]^2 \rangle = g^2(x,t) \end{cases}$$

$$D' = h(x,t) + g'g$$

$$D^2 = g^2$$

تحریک تعیینی — تحریک تصادفی

$$, \quad \frac{dx}{dt} = \underbrace{h(x,t)}_{\text{تحریک تعیینی}} + \underbrace{g(x,t)\,\eta}_{\text{تحریک تصادفی}}$$

$D = g$ $\quad\quad$ dt

معادل داده‌شده

$$\dot{x} = h(x,t) + g(x,t)\eta \neq D^{(1)} + \sqrt{D^{(2)}}\,\eta$$

وقتی غیرخطی باشد

$$\dot{x} = -\xi x + g\eta = D^{(1)} + \sqrt{D^{(2)}}\,\eta$$

اگر خطی باشد

تب بزرگترین $D^{(n)}$ را توجه کنید

$$D^{(1)} = \underbrace{h(x,t)}_{\text{Deterministic}} + \underbrace{\underline{\underline{g'g}}}_{\text{Noise-Induced}}$$

$$D^{(2)} = g^2$$

اگر $g = cts$ (خطی)

$D^{(1)} = h(x,t)$ ← تغییر غیرتعینی ندارد

$D^{(2)} = g$

* جلسه بعد تلاش می‌کنیم برای $\frac{d}{dt}x \rightarrow \frac{\partial P}{\partial t}$ *