Stochastic000205

بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۱۴۰۰/۲/۵

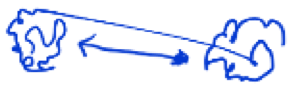
Random Walk and Langevin Equation

ولگشت تصادفی و معادله لانژون

از جمله مدلهای ریاضی نسبتاً ساده برای توصیف فرآیندهای تصادفی است.

Motivations

- Diffusion Phenomenon
- Brownian motion
- Self-avoiding Walk → Polymer
- Levy flight → Mesoscopic → λ : mean free Path $\sim L$ (system size)



- Structure formation and Excursion Sets
- Biology
- Econo-physic → stock markets.
- ⋮

Random-walk (RW) ولگشت

- Simple RW
- Continuous-Time RW

$\vec{r}(t) = ?$, $\sigma_r^2(t) = ?$

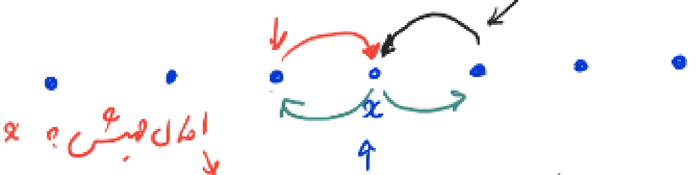
one Point statistics

$p(\vec{r}(t), t) = ?$ ← one-point ...

$p(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2; \vec{r}_3, t_3, \ldots \vec{r}_N, t_N) = ?$ ← N-point Statistic

Ex 1: 1-D RW

$t-\Delta t, x-\Delta x$ $t-\Delta t, x+\Delta x$



احتمال جهش؟ x

$$p(x,t) - p(x, t-\Delta t) = + A\, p(x-\Delta x, t-\Delta t) + B\, p(x+\Delta x, t-\Delta t)$$

احتمال جهش به x

$- p(x, t-\Delta t)$ ← احتمال خارج شدن از x

$A = B = 1/2$

$$\boxed{\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}}$$

D → Diffusion Coefficient

$p(x,t) = ✓$

Master Equation ←

Kramers-Moyal Expansion ← $p(x,t)$ ← $\dfrac{\partial p(x,t)}{\partial t} = ?$ برای یافتن

Fokker-Planck ←

Ex 2: General theoretical Derivation of Master-Equation

① $$\left.\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}\right|_{t=t'} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\overset{?}{p(x,t'+\tau)} - \overset{?}{p(x,t')}}{\tau}$$

② $$p(x, t'+\tau) = \int p(x, t+\tau; x', t')\, dx'$$

... $p(x',t')$

$$= \int dx' \; p(x, t+\tau \mid x, t) \, p(\ldots)$$

③ $$p(x,t') = \int dx' \; \underbrace{p(x,t' \mid x',t')}_{\delta_D(x-x')} \, p(x',t')$$

④ ②,③ → ①

$$\left.\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}\right|_{t=t'} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int \Big[\overbrace{p(x,t'+\tau \mid x',t')}^{Ⓐ} - \overbrace{p(x,t' \mid x',t')}^{Ⓑ} \Big] \times p(x',t') \, dx'$$

$\boxed{\text{tylor Expansion } \tau=0}$

⑤ $$Ⓐ = p(x,t'+\tau \mid x',t') = p(x,t' \mid x',t') + \tau \underbrace{\frac{\partial p(x,t' \mid x',t')}{\partial t'}}_{\text{اصل جهش از } x' \text{ به } x}$$

$$- \tau \int \underbrace{W_{t'}(y,x')}_{\text{اصل جهش از } x' \text{ به } y} \overbrace{\delta_D(x-x')}^{x \leftarrow x'} \, dy + O(\tau^2)$$

مجموع y و جمع بر خورد

$$\underbrace{- W_t(y,x)}_{\text{جهش از } x \text{ به جاهای دیگر}}$$

⑥ ⑤ → ④

$$\left.\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}\right|_{t=t'} = \lim_{\tau \to 0} \int \frac{dx' \, p(x',t')}{\tau} \Big[\cancel{p(x,t' \mid x',t')} + \tau \frac{\partial p(x,t' \mid x',t')}{\partial t'}$$

$$- \tau \int W_{t'}(y,x') \, \delta_D(x-x') \, dy - \cancel{p(x,t' \mid x',t')} \Big]$$

$$\left.\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}\right|_{t=t'} = \boxed{\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\cancel{\tau}} \int dx' \, p(x',t') \cancel{\tau} \frac{\partial p(x,t' \mid x',t')}{\partial t'}}$$

$$- \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int dy \int dx' \, p(x',t') \, W_{t'}(y-x') \, \delta_D(x-x')$$

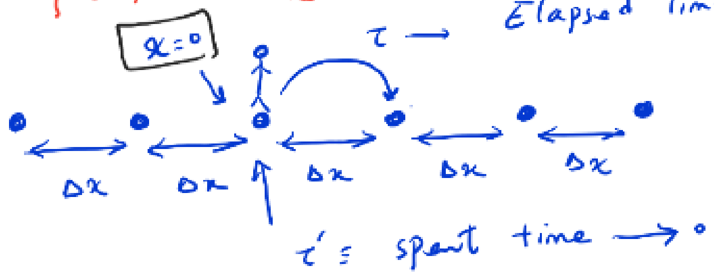
$$\boxed{\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{t=t'} = + \int dx' \, \underbrace{W_{t'}(x,x')}_{\text{آهنگ جهش از } x' \text{ به } x} \, \underbrace{p(x',t')}_{\text{احتمال حضور در نقطه } x' \text{ در زمان } t'} - \int dy \, \underbrace{W_{t'}(y,x)}_{\text{آهنگ جهش از } x \text{ به } y} \, \underbrace{p(x,t')}_{\text{احتمال حضور در } x}}$$

Master-Equation

$$\boxed{W_{t'}(x,x') = \frac{\partial p(x,t'|x',t')}{\partial t'}}$$

Ex3 Simple RW 1D

$\tau \to$ Elapsed Time



بعد از N قدم ← $t_N = N\tau$ → بعد از گذشت این زمان ← $x_N = x(t_N)$

$$x(t_N) = x(N\tau) = (N^+ - N^-)\Delta x \qquad N = N^+ + N^-$$

N^+: تعداد قدمهایی که به سمت راست رفته است

N^-: تعداد قدمهایی که به سمت چپ رفته است

$$\langle x(N\tau) \rangle = \Delta x \langle N^+ - N^- \rangle = \Delta x \left[\langle N^+ \rangle - \langle N^- \rangle \right]$$

تابع توزیع دوجمله‌ای است : N بار پرتاب (قدم) ← N^+ (جلو) ← p_+

N^- (عقب) ← p_-

هر قدم مستقل از قدم قبلی

$$p(N^+, N^-) = \binom{N}{N^+} p_+^{N^+} p_-^{N^-}$$

$$\langle x(N\tau)\rangle = \int dx\, x\, p(x)$$

$x(N\tau)$

$$\langle x(N\tau)\rangle = \sum_{N^+=0}^{N} \binom{N}{N^+} p_+^{N^+} p_-^{N^-} \left[\Delta x (N^+ - N^-)\right]$$

$$\boxed{\langle x(N\tau)\rangle = \Delta x\, N\,[p_+ - p_-]}$$

متوسط مکان ذره بعد از t_N

$$\sigma_x^2(N\tau) = \langle x(N\tau)^2\rangle - \langle x(N\tau)\rangle^2$$

$t_N = N\tau$

$$\boxed{\sigma_x^2(N\tau) = N\Delta x^2\, 4 p_+ p_- \sim N \sim t_N}$$

انحراف از مکان ذره بعد از گذشت t_N

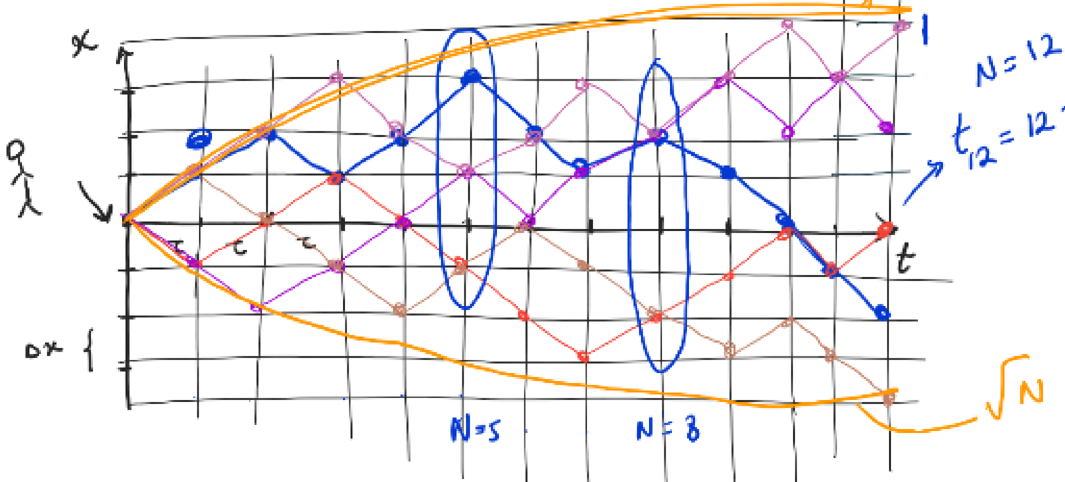
If $p_+ = p_- = 1/2$

$\boxed{p = p_+ + p_- = 1}$ نرمال احتمال

$\bar{x}(t_N) = \langle x(N\tau)\rangle = 0$

$\sigma_x^2(t_N) \sim t_N \longrightarrow \sigma_x(t_N) \sim \sqrt{t_N} \sim \sqrt{N}$

کوت برابرین



$$\langle x(t_5)\rangle_{\text{ensemble}} = \left[x(t_5) + x(t_5) + x(t_5) + x(t_5) + x(t_5)\right]/5$$

$$\langle x(t_5)\rangle = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_i(t_5) \longrightarrow 0 \longrightarrow$$ مستقل از N ← t_N

$P_+ = P_- = 1/2$ هم‌احتمالی در حرکت به سمت راست و چپ وجود ندارد

$\cancel{\langle x(t_N)\rangle = 0} \leftarrow P_+ \neq P_-$

$$\sigma(t_N) \sim \sqrt{t_N} \sim \sqrt{N}$$

نطری عطر ترتیب اتانی

$\langle x(t_N)\rangle = ?$ روش دوم برای بررسی

$x(t_N) = S_1 + S_2 + \cdots \quad S_N$ S_i میزان جهش در هر مرحله

$$= \sum_{i=1}^{N} S_i$$

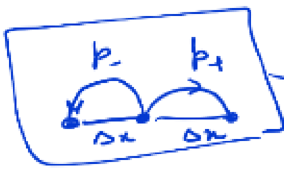
$$\langle x(t_N)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} S_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle S_i\rangle$$

فرض کنیم که در طول قدم برداشتن آمار حاکم بر جهش را عوض نشود

$$\langle x(t_N)\rangle = N\langle S\rangle$$

$$= N\int ds\, s\, p(s)$$

احتمال برداشتن قدمی به اندازه S

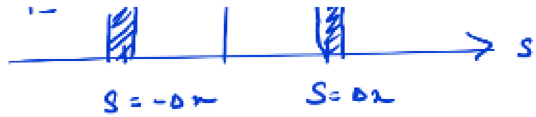


احتمال را شخ جهش در هر مرحله

$p(s) = ✓ \longrightarrow p(s) = P_+\,\delta_D(s-\Delta x) + P_-\,\delta_D(s+\Delta x)$

فرض آمار حاکم بر جهش در مدل ساده RW

مدل $\rightarrow$



$$\langle x(t_N)\rangle = N\langle s\rangle = N\left[\int ds\, s\, p_+\, \delta_D(s-\Delta x) + \int ds\, s\, p_-\, \delta_D(s+\Delta x)\right]$$

$$= N p_+ \Delta x + N p_- (-\Delta x)$$

$$\boxed{\langle x(t_N)\rangle = N\Delta x\,[\,p_+ - p_-\,]}$$

$$\sigma_x^2(t_N) = N\langle \Delta s^2\rangle$$

$$= N\int ds\,(s-\langle s\rangle)^2\, p(s)$$

$$\boxed{\sigma_x^2(t_N) = N\Delta x^2\, 4\, p_+ p_-}$$

$$\boxed{p(x(t_N)) = ?}$$ $\leftarrow$ اما سؤال: تابع ما چیست؟

جلسه بعد صحبت می‌کنیم