باسمه تعالی

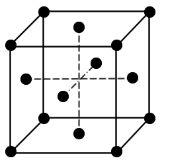
سوالات سری اول درس مکانیک آماری پیشرفته ۲ **(یادآوری)** تاریخ تحویل ۹۵/۱۱/۲۰

۱- یک استوانه به شعاع R و طول l حاوی N ذره بدون برهمکنش در میدان گرانشی زمین قرار دارد که با سرعت زاویه‌ای ω حول خودش در حال دوران است. اگر در نظر بگیریم که گاز درون استوانه به حالت تعادل رسیده باشد. انرژی آزاد، آنتروپی، پتانسیل شیمیایی و انرژی داخلی را محاسبه کنید. (راهنمایی: از آنسامبل کانونی بهره بگیرید)

۲- محتمل‌ترین تندی ذرات یک گاز کلاسیک را در d بُعد محاسبه نمایید.

۳- با استفاده از معادله حالت گاز واندروالس یعنی $\left[P+(N/V)^2 a\right][V-Nb]=NKT$ انرژی داخلی و آنتروپی را به صورت تابعی از دما و حجم بیابید. (فرض کنید ظرفیت گرمایی در حجم ثابت متناسب با T^2 باشد). در صورتی که تعداد ذرات تغییر کند چه اتفاقی می‌افتد؟

۴- برای توصیف خواص فرومغناطیسی در تقریب میدان متوسط، هامیلتونی $\mathrm{H}=-(g\mu_B)\sum_i S_i B_i+\frac{1}{2}NPJM^2$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. شدت میدان مغناطیسی B_i به صورت $B_i=B_{ext}+PJM/g\mu_B$ بیان می‌شود و در آن P تعداد همسایه‌های نزدیک، J شدت برهمکنش بین دوقطبی‌ها و N تعداد کل یاخته‌ها را نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن ۲ درجه آزادی برای ذرات و در شکل زیر دمای کوری (دمایی که در غیاب میدان خارجی به ازای دمای بالاتر از آن مغناطش خودبخودی صفر می‌شود) و پذیرفتاری مغناطیسی را محاسبه کنید. نتایج را در حد کلاسیکی بنویسید. (FCC مکعبی است که علاوه بر راسهای آن بر روی وسط هر وجه آن نیز یک یون قرار دارد.)



۵- در یک جعبه به حجم V تعداد ثابت N گاز دو اتمی که هریک دارای دوقطبی الکتریکی ذاتی $\vec{p}$ می‌باشند قرار دارند. اگر این مجموعه را در یک میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}=(0,E_y,E_z)$ قرار دهیم، کمیتهای زیر را حساب کنید: (۱۵ نمره)

الف: متوسط بردار قطبش را بدست آورید.

ب: ثابت دی‌الکتریک (ε) را در میدان ضعیف محاسبه کنید.

ج: بردار جابجایی الکتریکی و میدان الکتریکی درون دی‌الکتریک را محاسبه کنید.

موفق باشید

موحد

	Microcanonical $\Omega(E,V,N)$	Canonical $Z(T,V,N)$	Grand canonical $\mathcal{Z}(T,V,\mu)$
$\frac{S}{k}$	$\ln\Omega$	$\left(\frac{\partial(T\ln Z)}{\partial T}\right)_{V,N}$	$\left(\frac{\partial(T\ln\mathcal{Z})}{\partial T}\right)_{V,\mu}$
F	$E-kT\ln\Omega$	$-kT\ln Z$	$kT\mu^2\left(\frac{\partial(\mu^{-1}\ln\mathcal{Z})}{\partial\mu}\right)_{T,V}$
U	Fixed $(=E)$	$kT^2\left(\frac{\partial(\ln Z)}{\partial T}\right)_{V,N}$	$-\left(\frac{\partial(\ln\mathcal{Z})}{\partial\beta}\right)_{\beta\mu,V}$
N	Fixed	Fixed	$kT\left(\frac{\partial(\ln\mathcal{Z})}{\partial\mu}\right)_{T,V}$
kT	$\left(\frac{\partial(\ln\Omega)}{\partial E}\right)_{V,N}^{-1}$	Fixed	Fixed
$\frac{\mu}{kT}$	$-\left(\frac{\partial(\ln\Omega)}{\partial N}\right)_{E,V}$	$-\left(\frac{\partial(\ln Z)}{\partial N}\right)_{T,V}$	Fixed
P	$kT\left(\frac{\partial(\ln\Omega)}{\partial V}\right)_{E,N}$	$kT\left(\frac{\partial(\ln Z)}{\partial V}\right)_{T,N}$	$\frac{kT}{V}\ln\mathcal{Z}$
$\frac{C_V}{k}$	$-\beta^2\left(\frac{\partial^2(\ln\Omega)}{\partial E^2}\right)_{V,N}^{-1}$	$\beta^2\left(\frac{\partial^2(\ln Z)}{\partial\beta^2}\right)_{V,N}$	$T\left(\frac{\partial^2(T\ln\mathcal{Z})}{\partial T^2}\right)_{V,\mu}$
$(\Delta N)^2$	0	0	$\left(\frac{\partial^2(\ln\mathcal{Z})}{\partial(\beta\mu)^2}\right)_{\beta,V}$
$(\Delta E)^2$	0	$\left(\frac{\partial^2(\ln Z)}{\partial\beta^2}\right)_{V,N}$	$\left(\frac{\partial^2(\ln\mathcal{Z})}{\partial\beta^2}\right)_{\beta\mu,V}$

$\int_0^\infty dx\; x^n\; e^{-\alpha x}=\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}\right)!=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\int_{-\infty}^{\infty}dx\exp\left[-ikx-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]=\sqrt{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{\sigma^2k^2}{2}\right]$ $\qquad$ $\lim_{N\to\infty}\ln N!=N\ln N-N$

$\left\langle e^{-ikx}\right\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ik)^n}{n!}\langle x^n\rangle$ $\qquad$ $\ln\left\langle e^{-ikx}\right\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ik)^n}{n!}\langle x^n\rangle_c$

$\cosh(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$ $\qquad$ $\sinh(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$

Surface area of a unit sphere in d dimensions $\qquad$ $S_d=\frac{2\pi^{d/2}}{(d/2-1)!}$

$$\sum_k \to\frac{l^d}{(2\pi)^d}\int d^dk\to\int g(\varepsilon)d\varepsilon$$

$$V_d=\frac{R^d\pi^{d/2}}{\frac{d}{2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\qquad B_j(y)=\left(1+\frac{1}{2j}\right)\coth\left(\left[1+\frac{1}{2j}\right]y\right)-\frac{1}{2j}\coth\left(\frac{y}{2j}\right)$$

$$for\ y\to 0\quad B_j(y)\sim\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{j}\right)y$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dxe^{-ax^2}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\Gamma(t)=\int_0^{+\infty}dxx^{t-1}e^{-x}=(t-1)\Gamma(t-1)$$

$$\Gamma(t)\Gamma(1-t)=\frac{\pi}{\sin\pi t}\quad,\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$