بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۲۷/۷/۱۴۰۰

تابع توزیع

* PDF Transformation { A , B

B ← تولید مجموعه‌ای با تابع توزیع دلخواه اما همبستگی کاتوره‌ای به طور کلی می‌شود.

؟ تولید مجموعه‌ای از داده داشته باشیم با تابع توزیع دلخواه و همبستگی دلخواه ← به طور کلی حل

Power Spectrum — Correlation

• هرچند با ~~حل~~ روش B-M می‌توان انواع توابع توزیع را تولید کرد

← سپس ؟

$$\int_{-\infty}^{x} p_{x}(x')\,dx' = \int_{-\infty}^{y} p_{y}(y')\,dy'$$

اما در مراحل خیلی وقت‌ها که شکل تابع توزیع مورد نظر پیچیده باشد، انتگرال‌گیری بالا و معکوس کردن

امکان‌پذیر نیست به صورت تحلیلی ← $\cancel{y = g(x)}$

کاملاً عددی ← Von-Nuemann Method

در همین گام به سمت بهره‌مندی از مولدهای اعداد کاتوره‌ای در کامپیوتر برای شبیه‌سازی ← $\boxed{\text{Monte-Carlo}}$

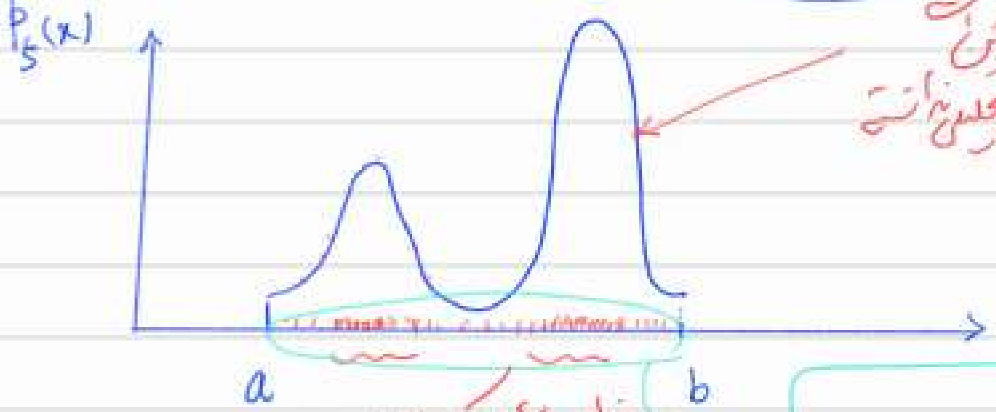
مسئله: تولید سری اعداد کاتوره‌ای با تابع توزیع کاملاً دلخواه

$\{\xi\}: \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\} \rightarrow p_\xi(x) =$ مطابق با شکل داده شده است

?

تصور می‌کنیم

حتی ممکن است به شکل پیچیده‌ای داشته باشد



تعداد نقطه‌هایی که دارای این مقادیر هستند بیشتر است

← که دارای بیشتر ← احتمال بیشتر ← $p_\xi(x)$

$\{\xi\}: \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_N\}$

$a \leq \xi \leq b$, $p_\xi(x) = \checkmark$

چگونه می‌توان تولید کرد؟

$\boxed{\text{Von\_Neumann}}$ روش عددی

نکته مهمی که وجود دارد ← تسهیل‌گری در تولید اعداد $\{\xi\}$ وجود داشته باشد (نقطه) مجموعه $\{\xi\}$

در ترتیب قرار گرفتن ξها در مجموعه $\{\xi\}$ کاتوره‌ای است

← نظم خاصی باشد! ← کنترل می‌گردد

همبستگی داشته

من از مولد اعداد کاتوره‌ای کامپیوتر استفاده می‌کنم

$g(R_2) = \xi_2$

$\{R_1, R_2, \dots R_N\} \rightarrow \{\xi_1, \xi_2, \dots \xi_N\}$

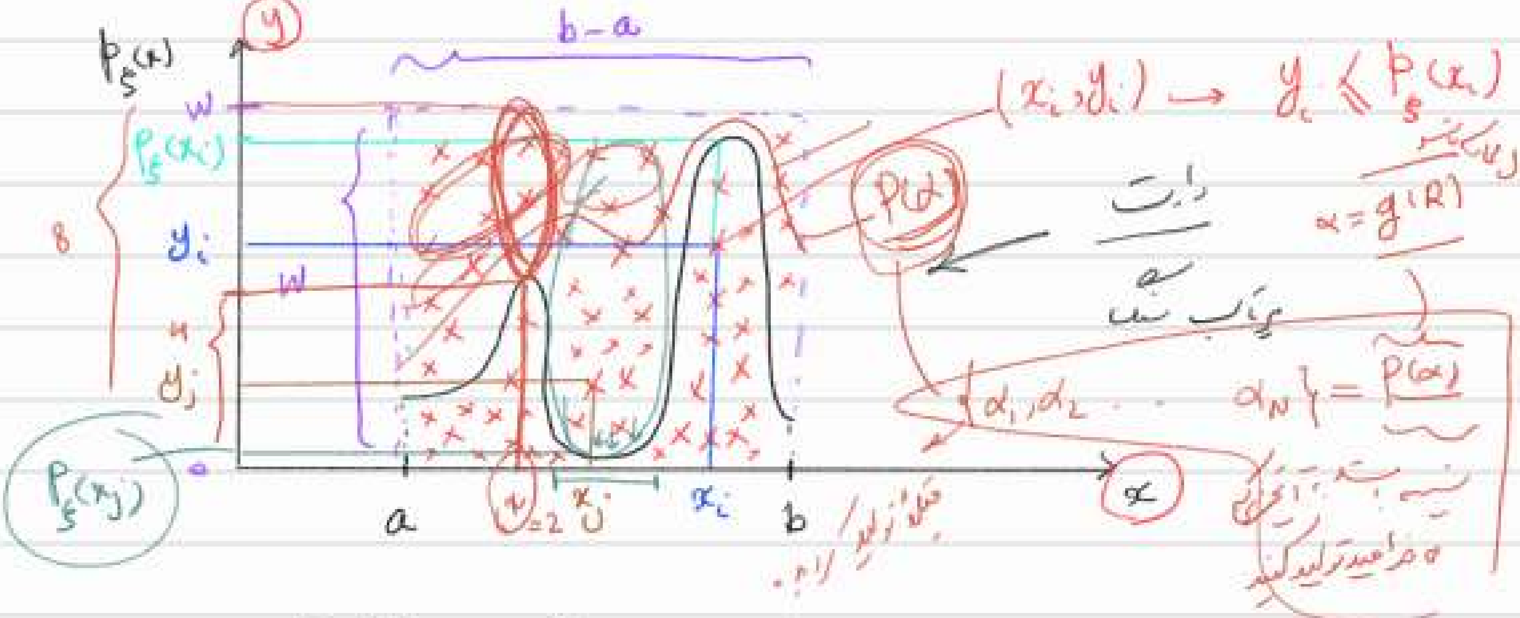
$x = g(R)$

$\langle R_i, R_j \rangle = \delta_{ij}$

$\xi_1 = g(R_1)$

این ترتیب حالتی به ما توزیع را کاتوره‌ای بودن

$\boxed{g(R) = ?}$ ← الان روش تبدیل که با این ترتیب حل می‌شود



$\xi \in [a,b]$, $p_\xi(x) = \checkmark$ $\Longrightarrow \{\xi_1 \dots \xi_N\} = ?$

Numerical algorithm

$$\boxed{\begin{array}{c} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq W \end{array}}$$

loop $i = 1$, $M \gg N$

$[0,1] \leftarrow R_1 =$ Call Random

تولید دو عدد تصادفی + شرط

$\{x\} \dots \rightarrow p(x) = \checkmark$

$[0,1] \rightarrow [a,b] \rightarrow x = a + (b-a) R_1$

$R_2 =$ Call Random

$[0,1] \rightarrow [0,w]$ $y = w R_2$

به این کار مکان یک تست گفته می‌شود

کاملاً کاتره‌ای

if ($y \leq p_\xi(x)$)

Write x

Endif

End loop

$x = 2$ — $y = 3$

$x = 2$ — $y = 3.5$

$x = 2$, $y = 4$

$\boxed{x = 2, \cancel{y = 6}}$

$\cancel{y(x=2) > 4}$

$P(x=2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

از مجموع x و y [illegible] تعداد ۴ تا

مقدار ۲ هستند در مقابل بقیه اعداد [illegible]

[illegible]

$\{2, 3, 4, 2, 2, \cancel{2}\}$ 5

$p_s(x)\,\underbrace{\Delta x}_{\varphi} = \Delta P(x)$

2.01
2.1
2.4

2, 1) .. $\longrightarrow$

Metro-Police $\equiv$ Monte-Carlo

Moments and Cumulants

(گشتاورها)   گشتاور تجمعی

Connected Moments

$$M_n \equiv \langle x^n \rangle = \int dx\; x^n\, p(x) \qquad n \in \mathbb{R}$$

خواص آماری وقایع پرتکرار را نشان می‌دهد

M_n for $n<1$ $\longrightarrow$ سهم وقایع پر تعداد در گشتاورها بیشتر خواهد بود

M_n for $n \gg 1$ $\longrightarrow$ سهم وقایع نادر در گشتاور غالب است

خواص آماری وقایع نادر نشان می‌دهد.

$0.1 \longrightarrow 100$

$\frac{1}{100}$

$$n = -2 \rightarrow \langle x^{-2} \rangle$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\; x^{-2}\, p(x)$$

$$\sigma^2 \equiv \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$ معیاری از پراکندگی اعداد است

$$K_1 = M_1 = \langle x \rangle$$

$$K_1 = \langle x \rangle_c \rightarrow$$ Connected – Moment

$$K_2 = M_2 - M_1^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

$$= \langle (x - M_1)^2 \rangle = \langle x^2 + M_1^2 - 2xM_1 \rangle$$

$$= \langle x^2 \rangle + \langle M_1^2 \rangle - 2\langle xM_1 \rangle$$

عدد

$$= \langle x^2 \rangle + M_1^2 - 2\langle x \rangle M_1$$

$$= M_2 + M_1^2 - 2M_1M_1$$

$$= M_2 + M_1^2 - 2M_1^2$$

$$K_2 = \langle x^2 \rangle_c = \sigma^2 = M_2 - M_1^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

چه رابطه مستقیمی بین M_n و K_n برقرار است؟

اسماً این کمیت‌ها چه معنایی دارند؟

$$K_n = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} M_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ M_2 & M_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ M_3 & M_2 & \binom{2}{1} M_1 & 1 & 0 & 0 \cdots \\ M_4 & M_3 & \binom{3}{1} M_2 & \binom{3}{2} M_1 & 1 & 0 \cdots \end{vmatrix}_{n \times n}$$

این رابطه را کی ثابت کرد؟

characteristic funct → partition funct

$K_1 = M_1$

$$K_2 = -1 \begin{vmatrix} M_1 & 1 \\ M_2 & M_1 \end{vmatrix} = -1\left(M_1^2 - M_2\right)$$

$$= M_2 - M_1^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$\vdots$

$K_n \longrightarrow$ Free - Energy

پتانسیل ترمودینامیکی است

Gaussian PDF $\quad p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$

$$M_1 = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

$$M_1 = \langle x \rangle = \bar{x}$$

$$\sigma^2 = K_2 = M_2 - M_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; (x-\bar{x})^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

$$\sigma^2 = \sigma^2$$

$$M_3 = \langle x^3 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \underbrace{x^3}_{\text{فرد}} \; \underbrace{\frac{e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}}_{\text{زوج}} = cte$$

K_1 ✓

K_2 ✓

فرد

تغییر مبدا (میانگین)

$$x \longrightarrow x' = x - \langle x \rangle = x - \bar{x}$$

$$M_3 = \langle x'^3 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \; x'^3 \; \underbrace{\frac{e^{-\frac{x'^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}} = 0$$

if $\underline{M_1 = 0} \longrightarrow$ Gaussian PDF

$$M_n = \begin{cases} 0 & \text{for } \forall n \in \text{odd}, \; n > 2 \\ \underline{A (M_2)^{n/2}} & \forall n \in \text{even} \end{cases}$$

$$A = (n-1)!!$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} M_1 = ✓ & K_1 = ✓ \\ M_2 = ✓, & K_2 = 2 \end{array}}$$

در حالت کلی میانگین و σ کافیست

خواص آماری معلوم است

Skewness and Kurtosis

$$\alpha_3 \equiv \frac{M_3}{M_2^{3/2}} \equiv \text{Skewness Coefficient}$$

چولگی انحراف را نشان میدهد.

for Gaussian PDF $\alpha_3 = 0$

$\alpha_3 \equiv$ Symmetric or Anti-Symmetric of PDF

$$\begin{cases} \alpha_3 < 0 \longrightarrow \text{چولگی درسمت چپ} \\ \alpha_3 > 0 \longrightarrow \text{چولگی به سمت راست} \end{cases}$$

$$\alpha_4 \equiv \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

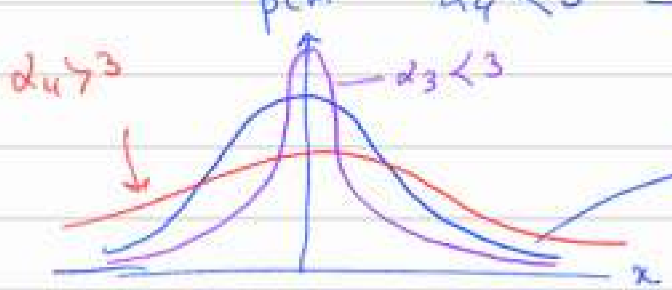
Gaussian $\longrightarrow$ Weik's theorem

$$\boxed{\mu_4 = 3\mu_2^2}$$

گوس $\underline{\alpha_4 = 3}$ —— $\underline{\bar{\alpha}_4 = \alpha_4 - 3}$

$\alpha_4 > 3 \longrightarrow$ fat-tail

$\alpha_4 < 3 \longrightarrow$ thin



اگر ممان ها را داشته باشیم ← $p(x)$ به دست آوریم !

نظریه :

تجربه داشته باشیم

$\boxed{\text{Charcteristic function}}$

تابع مشخصه

اصلاح یک plane-wave

$$Z_x(\lambda) = \left\langle e^{i\lambda x} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{i\lambda x} \, p(x)$$

تبدیل فوریه توزیع

مجهول

$\langle e^{i\lambda x} \rangle$

$$= \left\langle 1 + i\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2 x^2 + \dots \right\rangle = ''$$

$$= 1 + i\lambda\langle x\rangle - \frac{1}{2}\lambda^2\langle x^2\rangle + \dots$$

$$= 1 + i\lambda M_1 - \frac{1}{2}\lambda^2 M_2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} M_n$$

فرض داشتن آنها

$$Z_x(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} M_n$$

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \, e^{-i\lambda x} Z_x(\lambda)$$

$$M_n = \langle x^n \rangle = \frac{d^n}{d(i\lambda)^n} Z_x(\lambda) \Big|_{\lambda=0}$$

$$Z_x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} M_n$$

$$Z_x(\lambda) = e^{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} K_n\right)}$$

Helmholtz free Energy

$$\ln Z_x(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} K_n$$

$$= \ln\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^m}{m!} M_m\right)$$

متقابلاً اگر رفتار M_n و K_n میدانیم عرض به آمد

N-Dimension

$$Z_X(\vec{\lambda}) = \langle e^{i\vec{\lambda}\cdot\vec{x}} \rangle \ldots$$

کارهای اخیر مباحث تکمیلی آمده.

Gaussian PDF

if $\langle x \rangle = 0 \qquad M_1 = 0$

$K_n = 0 \qquad n \geq 3$

$\boxed{K_2 = \checkmark}$ — fluctuation

واریانس

ادامه بحث در خصوص Correlation است.