بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۲۵ / ۷ / ۱۴۰۰

جلسه گذشته

$$\lim_{dx \to 0} \frac{dP}{dx} = p(x)$$

→ تابع توزیع

Joint PDF

Suppose (1+1) Dimension $\{\xi\}, \{\xi_1, t_1; \xi_2, t_2; \ldots; \xi_N, t_N\}$

متغیر اتفاقی

$p_\xi(x, t) = \checkmark$

Independent Parameter

احتمال اینکه در لحظه t_i مقدار x_i بیاید و در لحظه t_j مقدار x_j بیاید → $\boxed{\text{Causal Relat} \quad t_i > t_j}$

$$\begin{cases} p(x_i, t_i; x_j, t_j) = ? \\ p(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}, x_{n-2}, t_{n-2}, \ldots; x_1, t_1) = ? \end{cases}$$

→ Two-Point PDF (Joint PDF)

→ n-Point PDF (Joint PDF)

که به آن تابع توزیع همبسته نیز می‌گویند

Bayes theorem

$$p(x, y) = p(x|y)\, p(y)$$

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}$$

$$\boxed{p(y, x) = p(x, y)}$$

Stationary

حالت ایستا

$$\boxed{\begin{matrix} p(x, t, y, t') \\ p(y, t, x, t') \end{matrix}}$$

$$p(y, x) = p(y|x)\, p(x)$$

$$p(y|x) = \frac{p(y, x)}{p(x)}$$

Stationary

Weak Definition of Stationary

$\sigma^2 = \langle x^2(t) \rangle \rightarrow \sigma_w^2 = \langle x(t)^2 \rangle_w$

$p(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}, x_{n-2}, t_{n-2}; \dots; x_1, t_1)$

$\underset{n\text{-joint}}{=} p(x_n, t_n+\tau; x_{n-1}, t_{n-1}+\tau; x_{n-2}, t_{n-2}+\tau; \dots; x_1, t_1+\tau)$

به ازای هر مقدار τ خواص آماری تحت τ-Translation ناوردا است

[n-order stationary Regime]

$\xi(t) =$ داده‌ای تصادفی است

$\downarrow$

$p(x)$

ایستا $\neq$ پایا =

وابستگی زمانی وجود دارد

خواص آماری مستقل از زمان یا انتقال در زمان است

steady state } تغییرات زمانی داریم

Static → ثابت

هیچ گونه وابستگی زمانی نه در متغیر $\xi(t)$ و نه در خواص آماری وجود ندارد

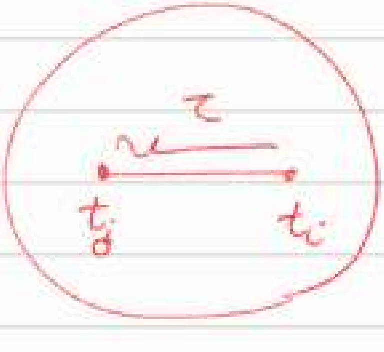
چطور $p(x_i, t_i; x_j; t_j)$ حساب کنیم؟

$\tau = |t_i - t_j| \leftarrow$ Stationary

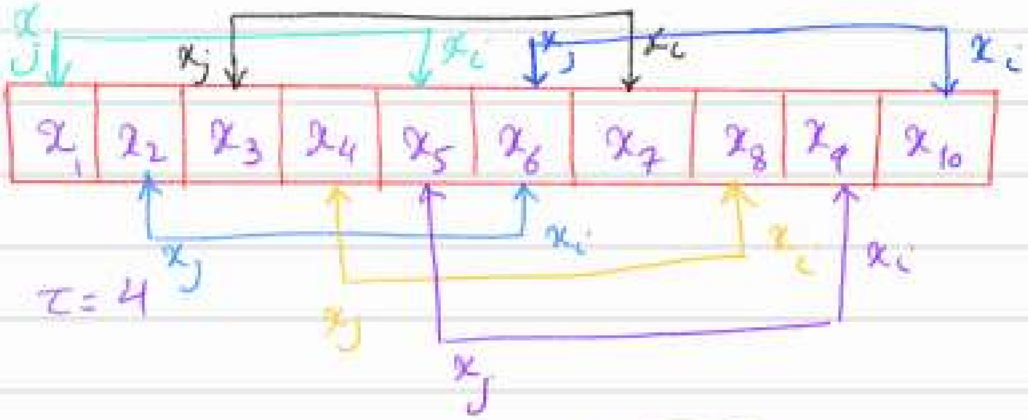
فرض $t_i > t_j$

$p(x_i, t_i; x_j, t_i - \tau) = p(x_i, t_i+\tau; x_j; t_i)$

حول تابع چنین حالتی داریم



فقط فاصله زمانی رخداد x_i و x_j مهم است



for "τ" $\longrightarrow$ "$N-\tau$" عضو داریم

اثرات مرز را خواهیم داشت

$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \leftarrow$ خطا داریم $\longleftarrow$ چون آمار کمتری می‌گیرد

برای τ های بزرگ که برویم انتظار داریم خطای آماری تابع توزیع بزرگتر شود

Simple algorithm for Joint PDF $\boxed{P(x,y;\tau)}$

Import Data set $\{\xi\}$,

$$\Delta x = \frac{\max\{\xi\} - \min\{\xi\}}{M} \longrightarrow \boxed{\text{تعداد کانال‌ها}}$$ Input

loop τ

  loop $i=1,\ N-\tau$

    $k_1 = \text{float}(\xi_i/\Delta x)$, x_j

    $k_2 = \text{float}\left(\frac{\xi_{i+\tau}}{\Delta x}\right)$ → $x_i = x_{j+\tau}$

    $p(k_2,k_1) = p(k_2,k_1) + 1$ → Simple algorith → $W(\ \ )$

  End loop

Normalization

loop $k_1 = k_{1min}, k_{1max}$

loop $k_2 = k_{2min}, k_{2max}$

Write $\underbrace{k_1 \Delta x}_{x_j}, \underbrace{k_2 \Delta x}_{x_i}, p(k_2, k_1)$

End loop

End loop

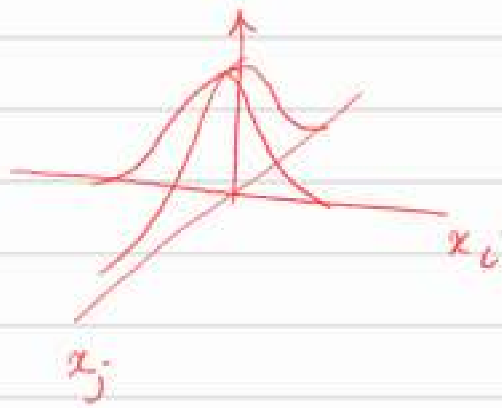
$p = 0$

End loop

$p(x_i, x_j)$

$p(x, y)$

(1+2) Dimension



برا هر ح دوتا عدد میاد

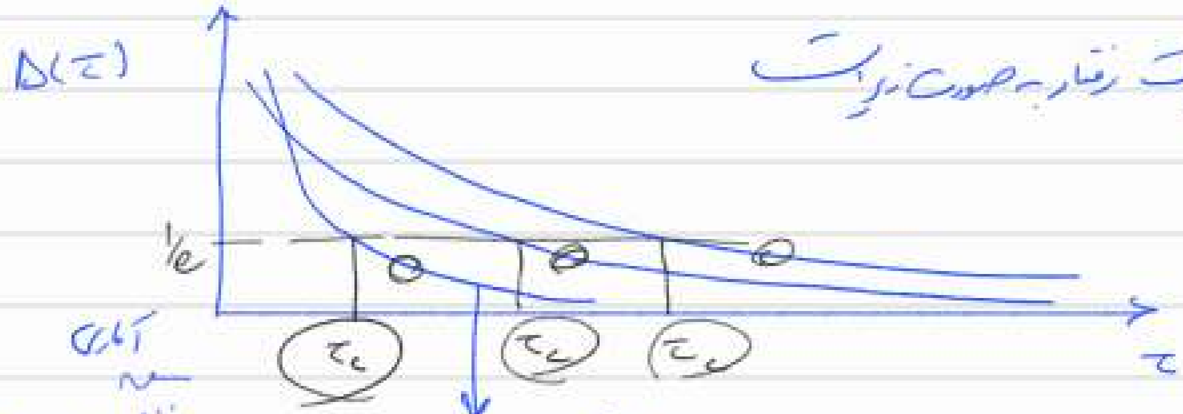
(1+3)-Dimension

چهار بعدی باید داشته باشیم

$$\Delta(\tau) = \int dx_i \int dx_j \left| p(x_i, x_j) - p(x_i)\, p(x_j) \right|$$

$$p(x_i, x_j) = p(x_i)\, p(x_j)$$

وقتی استقلال آماری داشتیم



هر چقدر سریع‌تر صفر شود یعنی حافظه در سیستم کوتاه‌مدت است.

Characteristic time-scale — مقیاس زمانی مشخصه

$$\Delta(\tau=\tau_c)=0$$

حالت ممکن است اتفاق نیفتد

تعریف

$$\frac{1}{e}\left(\mathrm{Max}(\Delta(\tau=0))\right)\Big|_{\tau=\tau_c}=\Delta(\tau=\tau_c)$$

اغلب مشاهده شده که توابع همبستگی به صورت نمایی

$$\sim e^{-\frac{\tau}{\tau_c}}$$

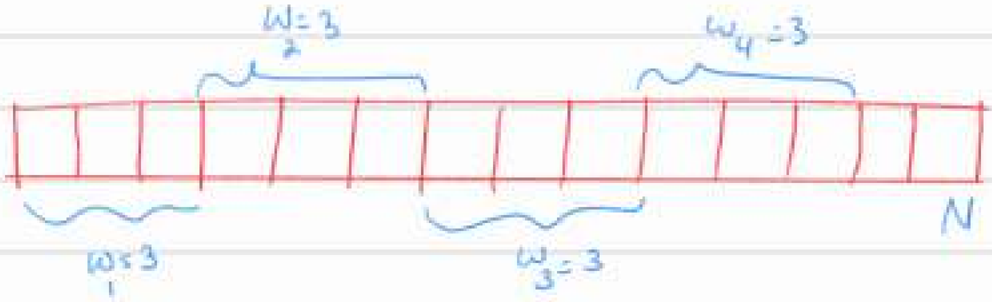
زمان مشخصه را تعریف کردیم

$$\boxed{\tau=\tau_c \to e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

Conditional PDF $p(x|y)=?$ Joint

تابع احتمال شرطی را حساب کرد $\longrightarrow$ $p(x|y)=\frac{\overbrace{p(x,y)}}{p(y)}$

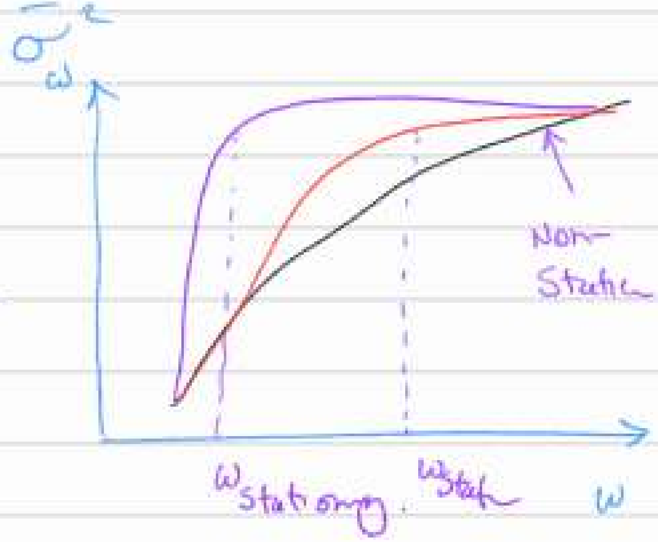
"بیزینه" $\longleftarrow$ $\boxed{\text{Baysian Analayan}}$



$$\left\{\begin{aligned} \sigma_{w_1}^2 &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \\ \sigma_{w_2}^2 &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \\ &\vdots \\ \sigma_{w_n}^2 &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \end{aligned}\right.$$

$$\overline{\sigma_w}^2 = \frac{1}{Int[\frac{N}{w}]} \sum_{i=1}^{Int[\frac{N}{w}]} \sigma_{w_i}^2$$

تعریف ضعیف مانایی $\rightarrow$



n-Joint PDF

$$p(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) \xrightarrow{?} \langle x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \rangle$$

$$\langle f \rangle = \int d\Gamma \, \rho(\Gamma) \, f(\Gamma)$$

$$= \int dx \, p(x) \, f(x)$$

$$\langle x_1 x_2 \ldots x_n \rangle = \int dx_1\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_n\; x_1 x_2 \ldots x_n\; p(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$$

if completely independent

[illegible]

$$\langle x_1 x_2 \ldots x_n \rangle = \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \langle x_3 \rangle \ldots \langle x_n \rangle = 0$$

$$= \int dx_1\, x_1\, p(x_1) \int dx_2\, x_2\, p(x_2) \ldots \int dx_n\, x_n\, p(x_n)$$

$$\boxed{p(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = p(x_1)\, p(x_2) \ldots p(x_n)}$$

PDF - Transformation

تبدیل تابع توزیع

Ⓐ $\{\xi\} : \{\xi_1 \ldots \xi_N\} = \checkmark \xrightarrow{g(\xi) = \checkmark} \{\eta\} : \{\eta_1 \ldots \eta_M\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_\xi(x) = \checkmark \\ \eta = y = g(\xi) = \checkmark \end{array} \right. \xrightarrow{?} p_\eta(y) = ?$$

(B) $p_\xi(x) = ✓ \quad \{\xi\} = ✓ \quad \{\xi_1 \dots \xi_N\} = ✓$

$p_\eta(y) = ✓ \longrightarrow \{\eta\} : \{\eta_1 \dots \eta_N\}$?

شبیه سازی دینامیک مولکولی

موقعیت ها کاملا تصادفی در جعبه هستند $\longrightarrow \vec{r}_1 \dots \vec{r}_N$

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$ N تا ذره در اتاق شبیه سازی کنیم

از نوع توزیع MB باید در $\longrightarrow$

کاملا متفاوت را با نسبت هم تصادفی است

(v_x, v_y, v_z)

$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$						$\vec{v}_N$

3N تا v میخواهم

$$p(\vec{v}) \sim e^{-\vec{v}^2 / 2kTm}$$

$\{v\} = ✓ \longleftarrow \{\xi\}$ از اعداد تصادفی کامپیوتر استفاده کنیم

$p(\xi) = ✓ \quad \boxed{v = g(\xi) = ?} \quad \{v\}:$

$p(v) = ✓ \longrightarrow$ | | | | – |

$\{\xi\} = ✓$

(A) $p_\eta(y) = ?$

$y = g(\xi) = ✓$

$$\underbrace{p_\eta(y)}_{?} = \left\langle \delta_D(y-\eta) \right\rangle_\eta = \left\langle \delta_D(y-g_\xi(x)) \right\rangle_\xi$$

$$= \underbrace{\int d\eta\ \delta_D(y-\eta)\, \underbrace{p_\eta(\eta)}_{?}}_{\text{به درد نمی‌خورد}} = \underbrace{\int d\xi\ \delta_D(y-\tilde{g}_\xi(\xi))\, p_\xi(\xi)}_{\text{این را باید پیدا کنیم}}$$

$$\delta_D(y-g(\xi)) \xrightarrow{?} \delta_D(x-\xi)$$

[illegible] تبدیل اش کنیم

$$g(\xi) = \overbrace{g(\xi_0)}^{y} + (\xi-\xi_0)\left.\frac{dg(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_0} + \underbrace{O(\Delta\xi^2)}_{0}$$

$$g(\xi) - \overbrace{g(\xi_0)}^{y} \simeq (\xi-\xi_0)\left.\frac{dg(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_0}$$

$$\delta_D(g(\xi)-g(\xi_0)) \simeq \delta_D\left((\xi-\xi_0)\left.\frac{dg(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_0}\right)$$

$$\boxed{\delta(\pm ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)}$$

$$\delta_D(y-g(\xi)) \simeq \delta_D(\xi-\xi_0)\left|\frac{dg}{d\xi}\right|^{-1}_{\xi=\xi_0}$$

$$\Rightarrow p_\eta(y) = \left\langle \delta_D(y-\eta)\right\rangle_\eta = \int d\xi\ \delta_D(\xi-\xi_0)\left|\frac{dg}{d\xi}\right|^{-1}_{\xi=\xi_0} p_\xi(\xi)$$

$$= \sum_{n} p_{\xi}\left(g_n^{-1}(y)\right) \left|\frac{dg}{d\xi}\right|^{-1}_{\xi=\xi_n=g_n^{-1}(y)}$$

تعداد ξ هایی که به یک مقدار y منجر می‌شوند $\rightarrow n$

$n=2$

$$y = g(x) = x^2 \qquad \begin{matrix} x=+1 \\ x=-1 \end{matrix} \rightarrow y=1$$

Ex $\quad p(v) = \checkmark$

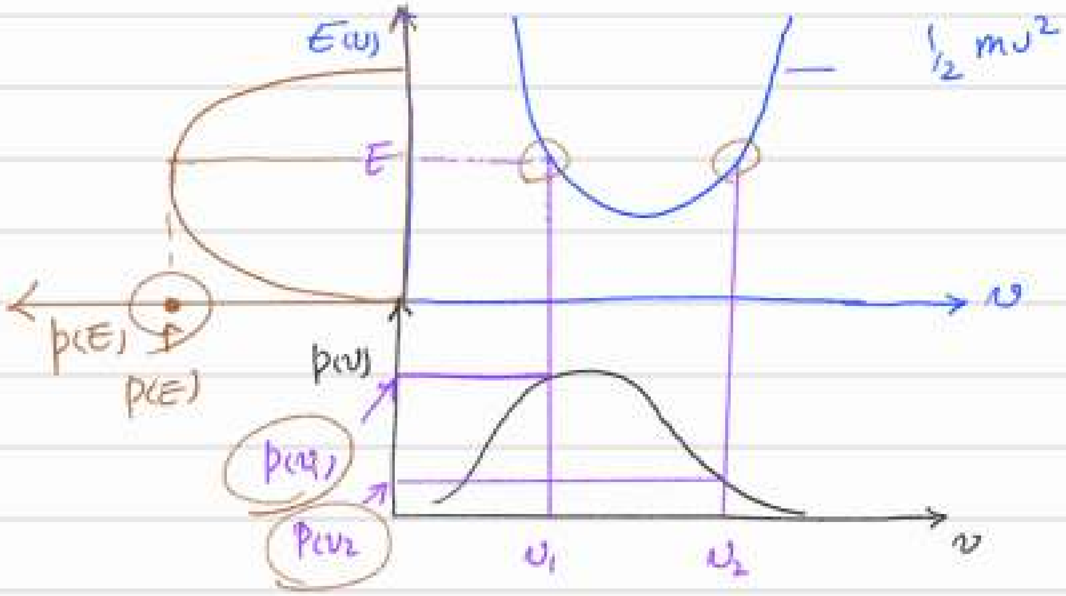
$$g(v) = E = \tfrac{1}{2}mv^2 \rightarrow p(E) = ?$$

$$v_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$\frac{dg}{dv} = mv$$

$$p(E) = p_v(\underset{g^{-1}(E)}{v_1}) \left|\frac{dg}{dv}\right|^{-1}_{v=v_1} + p_v(v_2)\left|\frac{dg}{dv}\right|^{-1}_{v=v_2}$$

$$= p_v\left(+\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)\frac{1}{m\sqrt{\frac{2E}{m}}} + p_v\left(-\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)\frac{1}{m\sqrt{\frac{2E}{m}}}$$



(B) $\{\xi\} = ✓$

$p_\xi(x) = ✓ \implies \{\eta\} = ?$

$p_\eta(y) = ✓$

از طریق شبیه سازی ال

مونت کارلو

مورد استفاده قرار می‌دهیم

به صورت زیر است

EX1. می‌خواهیم اعدادی تولید کنیم که دارای تابع توزیع پواسونی هستند

Random

Poissonian Distribution

① $* \boxed{\langle \eta_i \eta_j \rangle = \delta_{ij}} *$

② $p_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-y/\lambda} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$

$\{\eta_1, \eta_2, \dots \eta_N\} = ?$

عبارت: اینکه در کامپیوتر توابع داخلی وجود دارد که می‌تواند اعداد تصادفی تولید کند بنابراین خاصیت ① را

از خود کامپیوتر کمک می‌گیریم

Random Number $= \{\xi_1 \; \dots \; \xi_N\}$ generated by computer

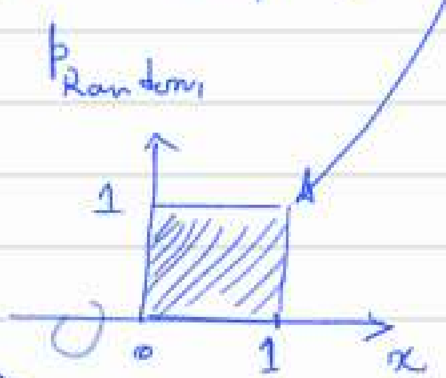
$\eta_i = g(\xi_i) = ?$

$\eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_N$

$$\boxed{\langle \xi_i \xi_j \rangle = \delta_{ij}}$$

$$\langle \eta_i \eta_j \rangle = \delta_{ij}$$

الگوریتم مرسوم تولید عدد تصادفی کامپیوتر را مورد لحاظ قرار داد



$$y = g(\xi) = ?$$

حدودش فرض کردم

$$\int_0^1 p_{Random}(x)\, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, p_\eta(y) = 1 = \int_0^{+\infty} dy\, p_\eta(y) = 1$$

$$\underbrace{\int_0^{R} \underbrace{p_{Random}}_{1}(x)\, dx}_{} = \underbrace{\int_0^{y} p_\eta(y')\, dy'}_{}$$

$$y = -\lambda \ln(1-R)$$

$$R = \int_0^y dy' \, \frac{e^{-y'/\lambda}}{\lambda}$$

$$R = -e^{-y'/\lambda}\Big|_0^y = 1 - e^{-y/\lambda} \Rightarrow e^{-y/\lambda} = 1 - R$$

$$-y/\lambda = \ln(1-R)$$

$$\boxed{y = -\lambda \ln(1-R)}$$

R = Random Number

تحلیلی

$$\eta = \boxed{y = -\lambda \ln(1-R)}$$

می‌توان چک کرد

$$p_\eta(y) = \frac{e^{-y/\lambda}}{\lambda}$$

① با انتگرال (تحلیلی) ⟵ ؟

دو مرحله وجود دارد

② معکوس کردن تابع (تحلیلی) ⟵ ؟

Ex2: تولید اعداد تصادفی گوسی (در کار بود استفاده از آن)

$$p_\eta(y) = \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \qquad \{\eta_1, \ldots \eta_N\} = ?$$

$$\langle \eta_i \eta_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$\int_0^{+1} dR \, \overbrace{p_{Random}(R)}^{1} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = 1$$

کل فضای فاز در نظر گرفته شده است

$$\int_0^R dR' \, 1 = \int_{-\infty}^{y} dy' \, \frac{e^{-y'^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \rightarrow$$

معادله‌ای که

$$R = \; ?$$

تحلیلی جواب ندارد

① = ?

② = ?

Box-Muller to generate Gaussian Random Number

δ_{ij}

$\{R\} \longrightarrow \{y\}$

Gaussian

$\{R_1, R_2\} \longrightarrow \{x, y\}$ Gau

$p(R_1, R_2) = P(R_1)\, P(R_2)$

$p(x, y) = p(x)\, P(y)$

$$\int_0^1 dR_1\, 1 \int_0^1 dR_2\, 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$1 = 1$$

زوج

$$\int_0^{R_1} dR_1' \int_0^{R_2} dR_2' = \int_{-\infty}^{x} dx'\, \frac{e^{-\frac{x'^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} dy'\, \frac{e^{-y'^2/2}}{\sqrt{\pi}}$$

$(R_1, R_2) \longrightarrow (r, \theta) \longrightarrow (x, y)$

$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}}$$

$r^2 = x^2 + y^2$

$$\int_0^{R_1} dR_1' \int_0^{R_2} dR_2' = \int_0^{\theta}\int_0^{r} \frac{r'd\theta' dr'}{2\pi} e^{-\frac{r'^2}{2}}$$

$$\int_0^{R_1} dR_1' \int_0^{1} dR_2' = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} \int_0^{r} r'dr' e^{-\frac{r'^2}{2}}$$

$$\int_0^{R_1} dR' = \int_0^{r} dr' r' e^{-r'^2/2}$$

$$R_1 = -e^{-r'^2/2}\Big|_0^{r} = 1 - e^{-r^2/2}$$

$$1 - R_1 = e^{-r^2/2}$$

$$-r^2/2 = \ln(1-R_1)$$

$$r^2 = -2\ln(1-R_1)$$

$$\boxed{r = \pm\sqrt{-2\ln(1-R_1)}}$$

Box Muller

$$\rightarrow x = r\cos\theta = +\sqrt{-2\ln(1-R_1)}\ \cos(2\pi R_2)$$

$$\rightarrow y = r\sin\theta = +\sqrt{-2\ln(1-R_1)}\ \sin(2\pi R_2)$$

(0,1) (0,1)

و همینکه می‌توان مطابق با روش "B-M" اغلب توابع توزیع را تولید کرد اما هر حال

ممکن است مولدهای شده انتگرال و معکوس کردن امکان پذیر نباشد.

Von- Nuemann algorithm

کاملاً عددی است — می‌توانید هر نوع اعدادی با تابع توزیع دلخواه را تولید کنید

تحلیلی نباشد

حالا بعد خواهیم گفت.

Filter → Convolution

Filter

Transformat

$g(x) \to y \to p(y) =$ مورد نظر

?

x

Outlier نقاط تیز

Shot-Noise

Manipulation رنگهای دروغی →

① ما تاکنون مدام گفتیم که تولید داده تصادفی $\langle \eta_i \eta_j \rangle = \delta_{ij}$ ← $p_\eta(y) = ?$

② تولید داده‌های گوسی $p_\eta(y)$ باشد ولی همبستگی دلخواه داشته باشد

? $\langle \eta_i \eta_j \rangle \neq \delta_{ij} = f(i,j)$ دلخواه

Correlation

③ تولید داده که تابع توزیع دلخواه و تابع همبستگی دلخواه ?

Random