بسم الله الرحمن الرحیم

موضوع : یافتن پارامترهای آزاد یک تابع توسط برازش با داده

Finding Best fit Values for Model's free Parameters

تابع

(1) Model's free Parameters : $\{\theta\} : \{m, c\}$

(2) Model
- → first principal, اصول اولیه
- → Phenomenological approach رهیافت پدیده‌شناختی

$$Y_{\text{Theo.}}(\{\theta\}, x) = mx + C$$

هیچ روش مشخص تعریفی برای تعیین مقادیر دقیق آنها پیش از انجام آزمایش وجود ندارد.

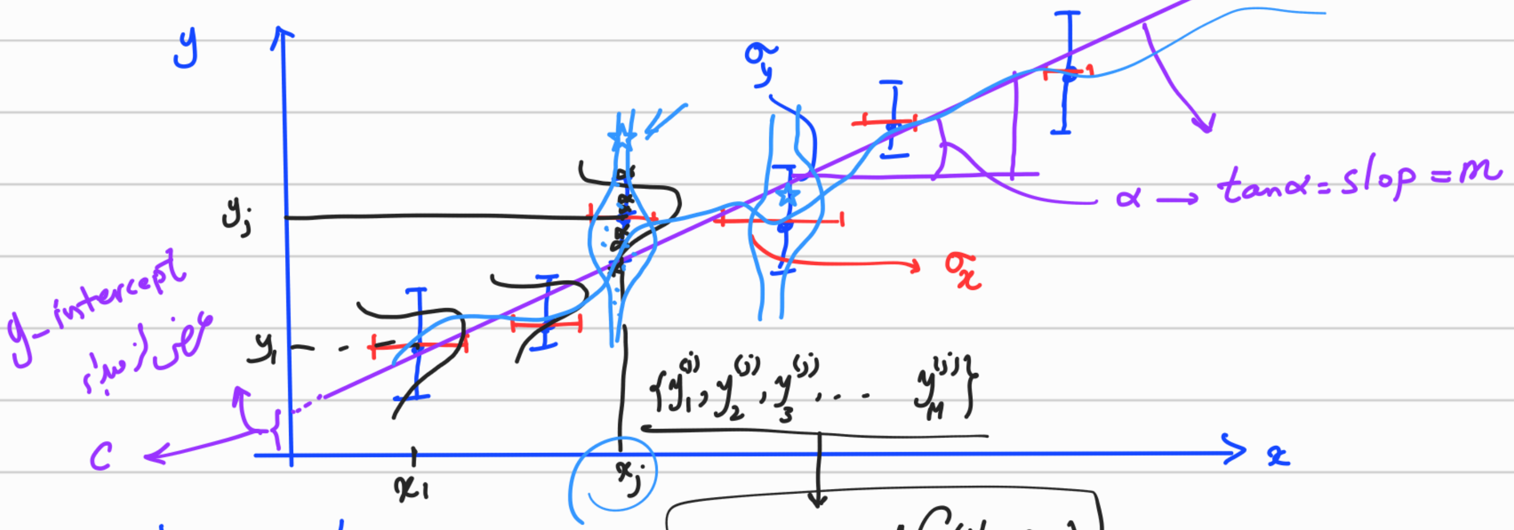
(3) Measurements : observation اندازه‌گیری

$$\{D\} : \{(x_i \pm \sigma_{x_i}, y_i \pm \sigma_{y_i})\} \qquad \boxed{i = 1 \ldots N}$$

x	y	σ_x	σ_y
x_1	y_1	σ_{x_1}	σ_{y_1}
x_2	y_2	σ_{x_2}	σ_{y_2}
$\vdots$			
x_N	y_N	σ_{x_N}	σ_{y_N}

{Data in typical Experiment}

(4) $\{\theta\}_{\text{Best}} : \{m_{\text{Best}}, C_{\text{Best}}\}$



Theory $Y_{Theor} = mx + C$

$$\boxed{P(y^{(j)}) = \mathcal{N}(Y_{Theor}, \sigma_{y_j})}$$

از قضیه حد مرکزی.

(5) Bayes's theorem قضیه بیز

$$\underbrace{P(\{\theta\}|\{D\})}_{\text{Posterior Distribution}} \Rightarrow P_{Max}(\{\theta\}_{Best}|\{D\})$$

توزیع پسینی

(تابع درست نمایی) Likelihood Distribution

Prior Distribution توزیع پیشینی

$$P(\{\theta\}|\{D\}) = \frac{\mathcal{L}(\{D\}|\{\theta\})\,P(\{\theta\})}{\underbrace{\int d\{\theta\}\,\mathcal{L}(\{D\}|\{\theta\})\,P(\{\theta\})}_{\mathcal{L}(\{D\})}}$$

هرگونه اطلاعات اولیه درخصوص $\{\theta\}$ توسط $P(\{\theta\})$ داده می‌شود

Bayesian Inference

استنباط بیزی

Frequentist Inference

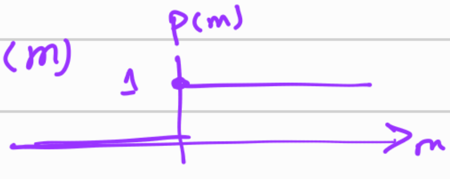
استنباط فراوانی گرایانه

$$P(\{\theta\}) = 1$$

اگر هیچ اطلاعاتی که مرجح کننده مقادیر خاص $\{\theta\}$ نداشته باشیم پس همه $\{\theta\}$ با احتمال یکسان انتخاب می‌شوند

$m > 0$

$P(m) = \Theta(m)$



گوسی $\rightarrow$ $P(m) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_m^2}} e^{-\frac{(m-10)^2}{2\sigma_m^2}}$

⑥ $\mathcal{L}(\{D\}|\{\theta\})$.

☆ احتمال داشتن آزمایش $\{D\}$ درصورتی که مدل $\{\theta\}$ را داشته باشیم

$P(\{\theta\}|\{D\})$

☆ احتمال به دست آمدن مدل $\{\theta\}$ با شرطی که آزمایش $\{D\}$ را داشته باشیم

⑦ $$\mathcal{L}_{Max} = \mathcal{L}\left(\{D\}_{i=1,N} \mid \{\theta\}_{Best}\right) = \mathcal{L}\Big(\underbrace{(x_1,y_1);(x_2,y_2);\dots}_{N} \mid \{m,c\}\Big)$$

$\mathcal{L} = ?$

$\rightarrow$ Centeral limit theorem

قضیه حد مرکزی ← شکل $\mathcal{L}_i$ ← گوسی

$\rightarrow$ $\underbrace{\text{Independency}}$ استقلال اندازه‌گیری

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \times \dots \mathcal{L}_N = \prod_{i=1}^{N} \mathcal{L}_i$$

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{y_i}} e^{-\frac{(y_i - Y_{Theo})^2}{2\sigma_{y_i}^2}}$$

$$\mathcal{L} \propto \prod_{i=1}^{N} e^{-\frac{\left(y_i - Y_{Th}(\{\theta\},x_i)\right)^2}{2\sigma_{y_i}^2}}$$

$$\mathcal{L} \propto e^{-\sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - Y_{The}(\{\theta\}, x_i)]^2}{2\sigma_{y_i}^2}}$$

$$\propto e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - Y_{Theo}(\{\theta\}, x_i))^2}{\sigma_{y_i}^2}$$

$$\mathcal{L}_{Max} \propto e^{-\frac{\chi^2_{min}}{2}}$$

$$\chi_{min} = ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left.\dfrac{\partial \chi^2}{\partial m}\right|_{\substack{m = m_{Best} \\ c = c_{Best}}} = 0 \\[2ex] \left.\dfrac{\partial \chi^2}{\partial c}\right|_{\substack{m = m_{Best} \\ c = c_{Best}}} = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{l} m_{Best} = \checkmark \\ c_{Best} = \checkmark \end{array}$$

فرض

$\sigma_{y_i} = cte$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - m x_i - c)^2$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial m} = \sum_{i=1}^{N} -2x_i(y_i - m x_i - c) = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial c} = \sum_{i=1}^{N} -2(y_i - m x_i - c) = 0$$

Simple Algorithm for PDF estimation

الگوریتم ساده ی تخمین تابع چگالی احتمال ← فراوانی

$\{\xi_i\}$, $i = 1 \ldots$ $N = 14$

$20 = M \equiv \#$ of Classes تعداد کلاس ها

$\Delta x = 0.5$

14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
2.1	3	4.5	7	8	9.5	1.2	3.1	3.6	5	8.3	9.1	0.5	2.5

$\# \ \xi \in [x, x + \Delta x)$ $\sim Q(14)$

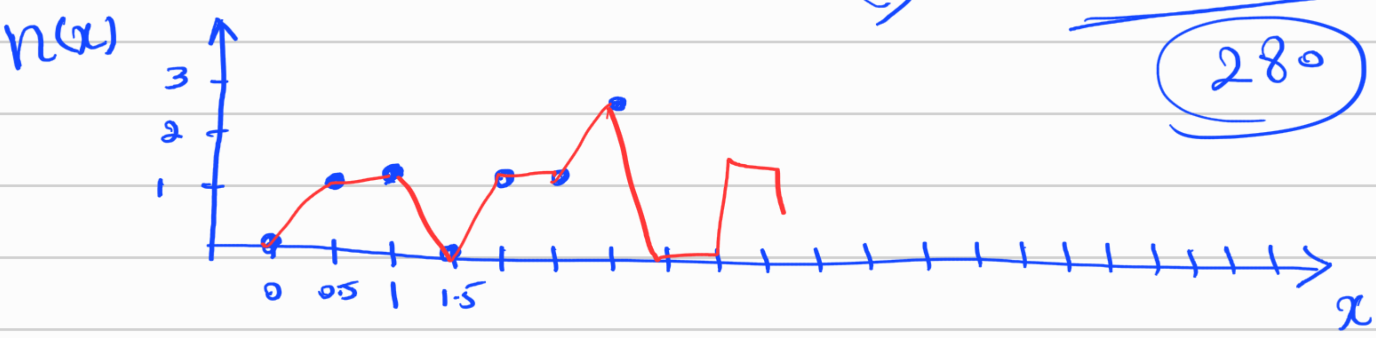
k

0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5 ...
0	1	1	0	1	1	2	1
4.	4.5	5	5.5	6.	6.5	7	7.5
0	1	1	0	0	0	1	0
8	8.5	9	9.5	10			
2	0	1	1	0			

$Q(14 \times 20)$

$\overline{\quad}$

280



$\Delta x = 0.5$

$$k = \left[\frac{\xi}{\Delta x} \right]$$

$$\underline{\underline{4}} = \left[\frac{2.1}{0.5}\right] = \left[\frac{21}{5}\right] = [4.2]$$

$p(4) = p(4) + 1$

$k_{min} = 0$

$\underline{k_{max}} = \left[\frac{10}{0.5}\right] = 20$

$$k = \left[\frac{4}{0.5} \right] = \left[\frac{40}{5} \right] = 8$$

$p(8) = p(8) + 1$

$x \, , \, p(x)$

$k\Delta x \quad p(k)$

$\uparrow$

$\underbrace{8 \times 0.5}$

$4 \quad \underbrace{p(8)}$

$\uparrow$

EX 1

2.012 , 2.016 , 2.101 , 2.165

21 21

2.200 , . ___ .

22

$\Delta x = 0.1$

$$k = \text{float}\left[\frac{\xi}{0.1} \right]$$

$2 — 2.1$

$2.1 — 2.2$

$2.2 — 2.3$

$$k_1 = \left[\frac{2.012}{0.1} \right] = [20.12]$$

$$= 20$$

$$k_2 = \left[\frac{2.016}{0.1} \right] = [20.16] = 20$$

Convolusion Algorithm

الگوریتم پیچش

$$f(x) \xrightarrow[W]{} \bar{f} = W \otimes f$$

$$\bar{f}(x) = \int dx' \, \underbrace{W(x,x')}\, f(x')$$

$N = \#$ of Data $\quad 10^6$ $\qquad \# \bar{f} \sim \mathcal{O}(10^{12})$

$10^6 \leftarrow$ loop x

10^6 — loop x'

Fast Fourier Transform FFT

$\mathcal{O}([N \log N] \times 3)$

$\sim \mathcal{O}(N \log N \times 3)$

$\mathcal{O}(\underbrace{10^6 \times 6}_{N\log N} \times 3) \sim \mathcal{O}(10^7)$

F.T.

Real Space $(x) \longrightarrow$ Fourier Space $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\bar{f}(x) = \int dx' \, W(\tilde{x - x'}) \, f(x')$$

$$\tilde{f}(k) = \int dx \, e^{ikx} f(x)$$

$$\tilde{W}(k) = \int dX \, e^{ikX} W(X)$$

$$\boxed{f(x) = \int dk \, e^{-ikx} \tilde{f}(k)}$$

$$W(x-x') = \int dk \, e^{-ik(x-x')} \tilde{W}(k)$$

$$\bar{f}(x) = \int dx' \times \underbrace{\int dk\, e^{-iK(x-x')}\,\tilde{W}(K)}_{W(x-x')} \times \underbrace{\int dk' e^{-ik'x'}\tilde{f}(k')}_{f(x')}$$

$$= \int dk \int dk' \underbrace{\int dx'\, e^{+ix'(K-K')}}_{\delta_D(K-K')}\, e^{-iKx}\,\tilde{W}(K)\tilde{f}(K')$$

$$\boxed{\bar{f}(x) = \int dK\, e^{-iKx}\, \underbrace{\tilde{W}(K)\tilde{f}(K)}}$$

F.T $O(N^2)$

$$= \int dK\, e^{-iKx}\, \tilde{\bar{f}}(K)$$

$N \log N$ $N \log N$

F.T.   F.T.

$f(x)$ $\underset{N \log N}{\underbrace{\text{I.F.T}}}$ $\boxed{\tilde{\bar{f}}(K) = \tilde{W}(K)\,\tilde{f}(K)}$ — خروجی

یک ضرب ساده

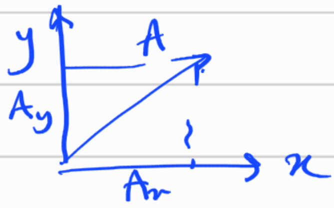
x — x, x'

خروجی   باقیه

$$f(x) = \int dk\, \tilde{f}(k)\, e^{-ikx} \quad \sin(kx) \quad \sin(k'x)$$

پایه‌های فضای فوریه

$$\int dk\, \underbrace{e^{-ikx}\, e^{-ik'x}} = \delta_D(K-K')$$



$\vec{A} = \vec{A}\cdot\hat{i}\,\hat{i} + \vec{A}\cdot\hat{j}\,\hat{j}$

$= A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$

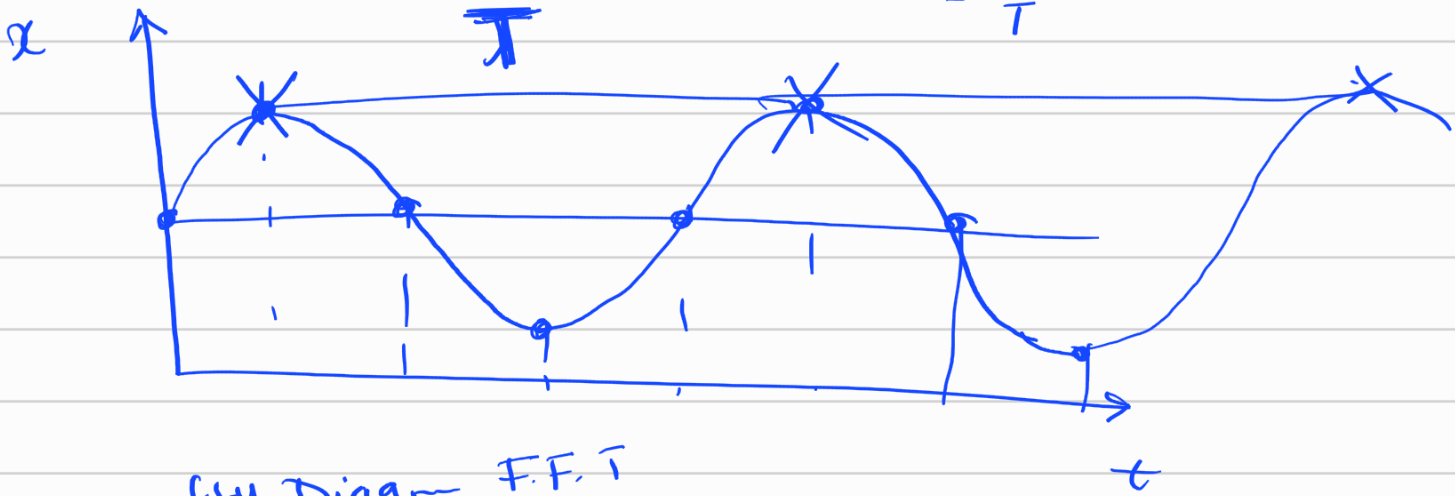
$A_x A_y$

$\hat{i}\cdot\hat{j} = 0$

nu

$\nu = \frac{1}{T}$

T



Butterfly Diagram F.F.T

$f_S \geq 2f_D$

$N! = N\log N - N$