

از سؤالات ۱ و ۲ فقط به یکی پاسخ دهید:

۱- براساس تئوری پلانک برای نوسانگرهای هماهنگ کوانتومی مقدار متوسط انرژی به صورت زیر به دست می آید:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon \exp(-n\epsilon/kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\epsilon/kT)}$$

و در آن ϵ, k, T مقادیری ثابت هستند.

الف: نشان دهید $\langle E \rangle = \frac{\epsilon}{\exp(\epsilon/kT) - 1}$ (راهنمایی صورت و مخرج را سعی کنید به صورت بسط تابع مناسبی بازنویسی کنید) (۱۰ نمره)

ب: نشان دهید وقتی که $\epsilon \gg kT$ در آن صورت داریم $\langle E \rangle \sim kT$ (۵ نمره)

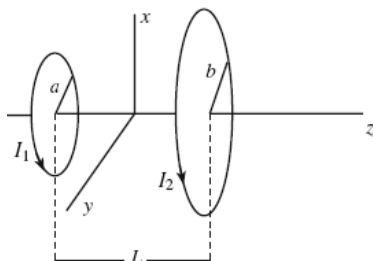
۲- شکل زیر پیچچه هلمهولتز را نشان می دهد که برای تولید میدان مغناطیسی تقریباً یکنواخت بین دو حلقه استفاده می شود. اگر میدان مغناطیسی

بر روی محور z به صورت $B(z) = B_1(z) + B_2(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I_1 a^2}{[a^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I_2 b^2}{[b^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}}$ باشد. به ازای

چه شرایطی این میدان بر روی محور z و در همسایگی نقطه $(0, 0, 0)$ تا مرتبه z^4 یکنواخت است.

(راهنمایی $B(z)$ را حول مبدأ مختصات بسط تیلور دهید) (۱۵ نمره)

۳- با کمک بسط دوجمله‌ای نشان دهید (۵ نمره): $\frac{d^n (f(x)g(x))}{dx^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k f(x)}{dx^k} \frac{d^{n-k} g(x)}{dx^{n-k}}$



۴- در آزمون گوس نسبت مورد بررسی را به صورت روبرو نیز نشان می دهند:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^2 + a_1 n + a_0}{n^2 + b_1 n + b_0}$$

برای چه مقادیری از a_1, b_1 سری $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ همگرا و واگرا است؟ (۱۰ نمره)

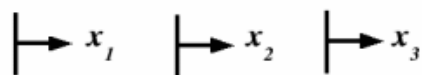
۵- با توجه به عبارت بردار اندازه حرکت زاویه‌ای یعنی: $\vec{L} = \sum_{i=1} m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$, $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

و عبارت $\vec{L} \equiv I \vec{\omega}$ ، تانسور لختی دورانی را بر حسب m_i, \vec{r}_i بنویسید. در ادامه با توجه به شکل انرژی جنبشی یعنی $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1} m_i v_i^2$ نشان

دهید می توان این انرژی را به صورت زیر نوشت: $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \omega^\dagger \cdot I \cdot \omega$ (۲۰ نمره)



۶- با کمک قانون هوک و مساله ویژه مقاداری، فرکانس‌های طبیعی سیستم جرم و فنر



روبرو را پیدا کنید. (۲۰ نمره)

۷- الف: نشان دهید تفاوت بین بردار هموردا و پادوردا در سیستم مختصات دکارتی از بین می‌رود. (۱۰ نمره)

ب: در سیستم مختصات کروی مؤلفه‌های دیورژانس یک بردار پادوردا و هموردا را بنویسید. (راهنمایی:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta$$

۵ نمره به خوانایی تعلق دارد. قبل از تحویل پاسخنامه خود، بالای پاسخنامه شماره سؤالات حل شده را بنویسید.

موفق باشید

شرط خرد حفظ تجربه‌ها و به کار بستن آنها است (امام علی (ع))