بسم الله الرحمن الرحیم

Error estimation and propagation
(۱۴۰۳)

سیدمحمدصادق موحد

دانشکده فیزیک - دانشگاه شهید بهشتی

گروه کیهان شناسی محاسباتی (GCC-SBU)

آزمایشگاه میان رشته ای ابن سینا

http://facultymembers.sbu.ac.ir/movahed/

مهمترین منابع مورد استفاده

Books:

موارد قرمز شده بسیار مرتبط است خصوصا آخرین مرجع قرمز رنگ

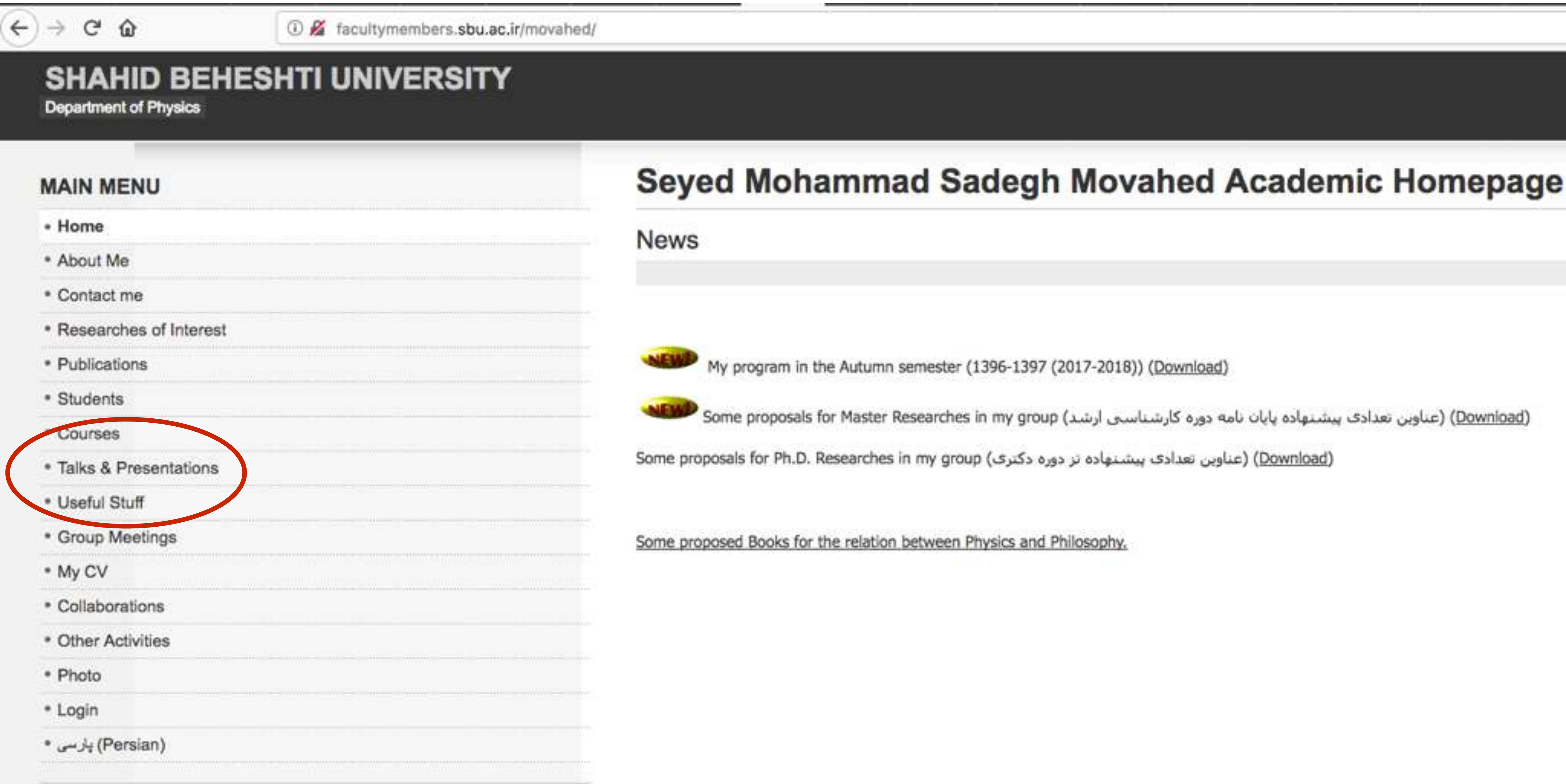
- Data analysis: A Bayesian Tutorial, by D.S. Sivia & J. Skilling, Oxford science Publication, 2010
- Data reduction and error analysis for the physical sciences, P. R. Bevington & D. K. Robinson, McGrawHill, 2003
- Error of Observations and their Treatment, J. Topping, 1972.
- Practical Physics, G. L. Squires, 1985.
- An Introduction to to Error Analysis: The Study of Uncertanties in Physical Measurements, Taylor, J. R. 2nd Ed.; University Science Books: Sausalito, CA, 1997.
- Data analysis in cosmology, "Lecture notes in physics 665"
- Mathematical statistics with applications, J.E. Freund's, Pearson education, 2005,
- All of Statistics, L. Wasserman, Springer, 2004
- Statistics, R.J. Barlow, Wiley, 2002.
- Introduction to statistics and Data analysis for Physicist, Gerhard Bohm, Günter Zech, 2010.
- Statistics, Data Mining, and Machine Learning in Astronomy: A Practical Python Guide for the Analysis of Survey Data (Princeton Series in Modern Observational Astronomy), Željko Ivezic´, Andrew J. Connolly,
  Jacob T. VanderPlas, and Alexander Gray, PRINCETON UNIVERSITY PRESS, 2014

مهمترین منابع مورد استفاده

Papers and Lectures:

- Verde, Licia. "A practical guide to basic statistical techniques for data analysis in cosmology." arXiv preprint arXiv:0712.3028 (2007).
- Verde, Licia. "Statistical methods in cosmology." Lectures on Cosmology. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010. 147-177.
- Liddle, Andrew R. "How many cosmological parameters." Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 351.3 (2004): L49-L53.
- Heavens, Alan. "Statistical techniques in cosmology." arXiv preprint arXiv:0906.0664 (2009).
- Efron, Bradley. "Bayesians, frequentists, and physicists." PHYSTAT2003: Statistical Problems in Particle Physics, Astrophysics, and Cosmology, SLAC, Stanford CA (2003): 17-24
- BARLOW, ROGER J. "Asymmetric statistical errors." Statistical Problems In Particle Physics, Astrophysics And Cosmology. 2006. 56-59, arXiv:physics/0406120
- Betancourt, Michael. "A conceptual introduction to Hamiltonian Monte Carlo." arXiv preprint arXiv:1701.02434 (2017).
- Neal, Radford M. "MCMC using Hamiltonian dynamics." Handbook of Markov Chain Monte Carlo 2.11 (2011).
- **http://facultymembers.sbu.ac.ir/movahed/**

مهمترین منابع مورد استفاده



سایر منابع

1- کتاب آشنایی با روشهای شبیه سازی در فیزیک، مولف مهدی نیک‌عمل و همکاران

2- Nicholas J. Giordano, "*Computational Physics*".

3- Dieter W. Hermann, "*Computer simulation Methods in theoretical physics*".

4- Buffalo University home page for computational physics, http://www.physics.buffalo.edu/phy410-505-2009/

5- http://www.physics.buffalo.edu/phy411-506-2009/

6- http://www.handsonresearch.org/

7- Tao Pang , "*An Introduction to Computational Physics*", Cambridge University Press (2006)

8- Simon Širca and Martin Horvat, "*Computational methods for physicists _ compendium for students*", Springer (2013)

9- Harvey Gould, Jan Tobochnik and Wolfgang Christian, "*An introduction to computer simulation methods: Applications to physical systems*", Addison-Wesley (2007)

10- Rubin H. Landau, Manuel J. Paez and Cristian C. Bordeianu, "Computationa; Physics" (2011).

11- http://www.aghamousa.com/data-science-books/

12- http://www.deeplearningbook.org/lecture_slides.html

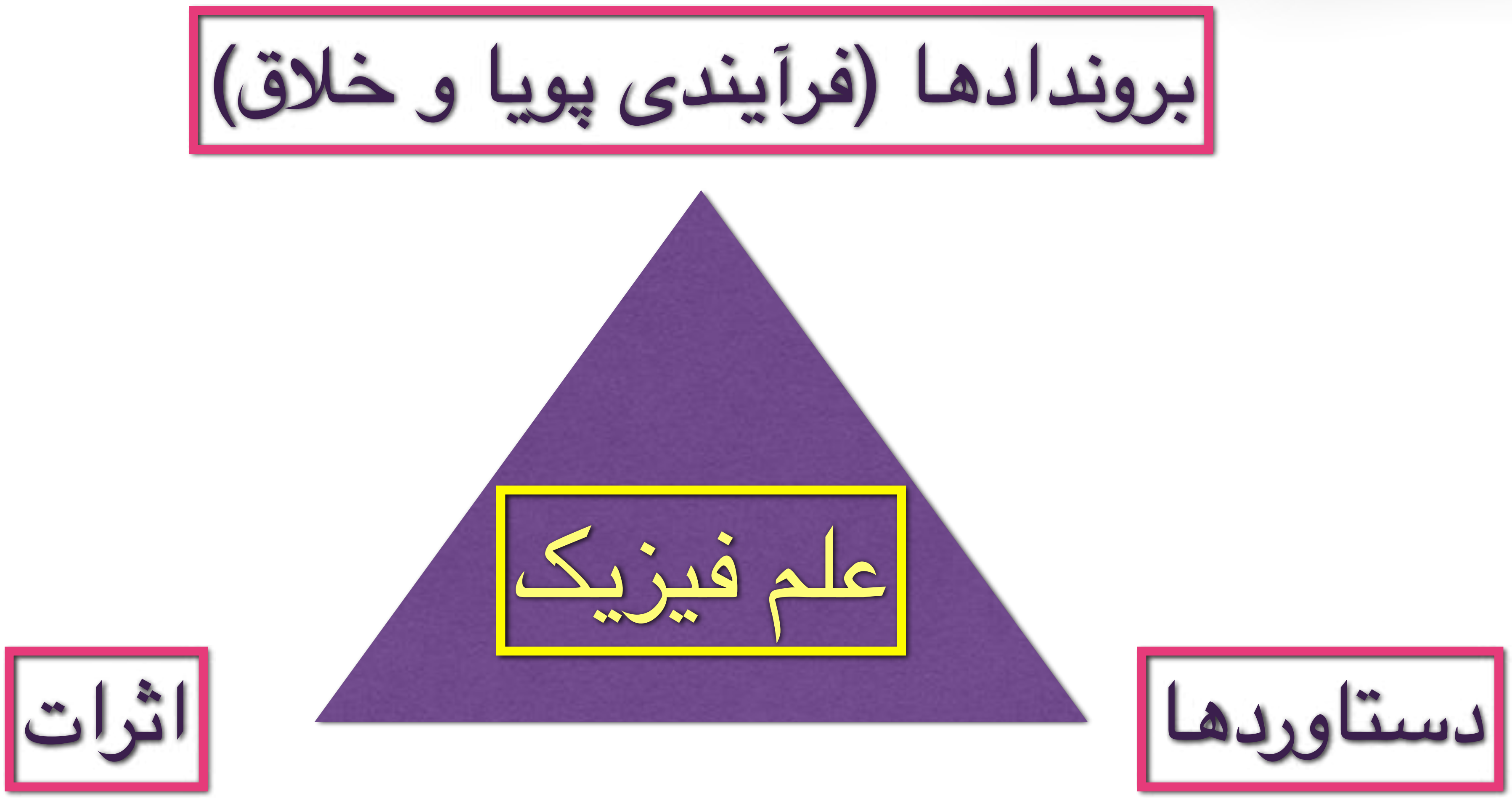
فهرست مطالب

بخش اول: مقدمه

علم فیزیک

- علم شناخت و مطالعه کمّی جهان طبیعت (نه جهان خلقت) با کمک زبان ریاضی (زبان علم و تجهیزات)
- به بیانی دیگر شناخت فرآیندها و سازوکارهای موجود در طبیعت

برخی از شاخصهای خروجی



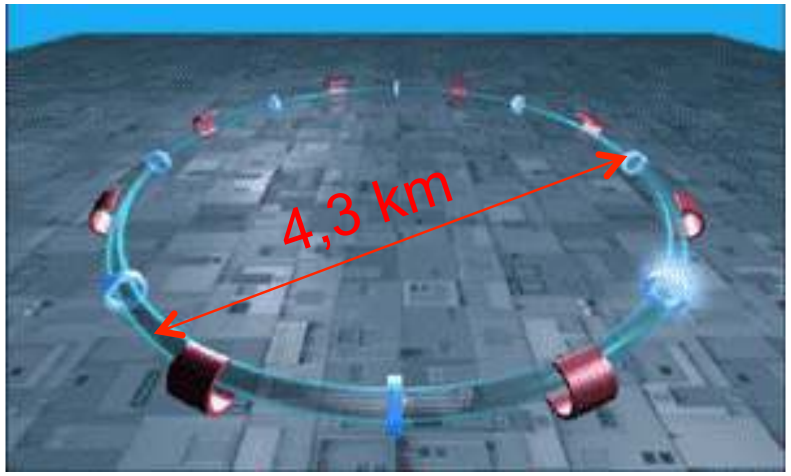
BIG Science

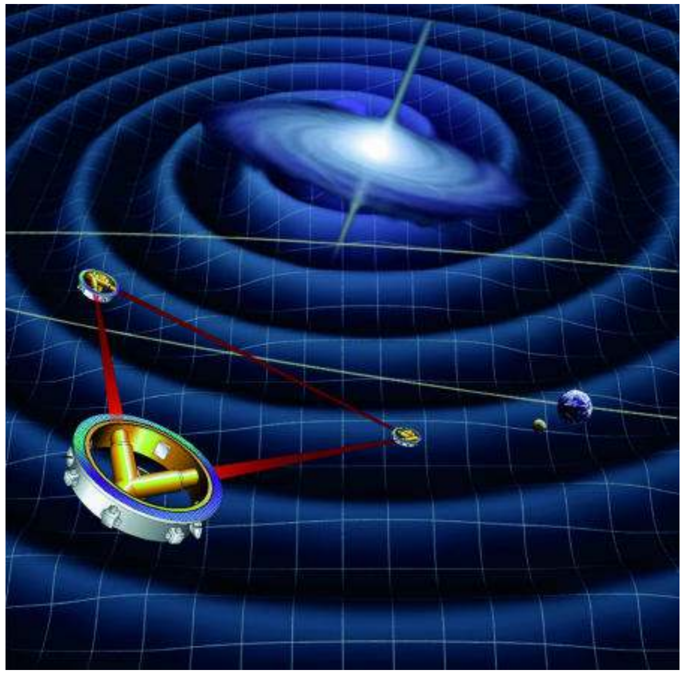
cost: ~$\$10^{10}$

time: ~decade

scientists: 1000s

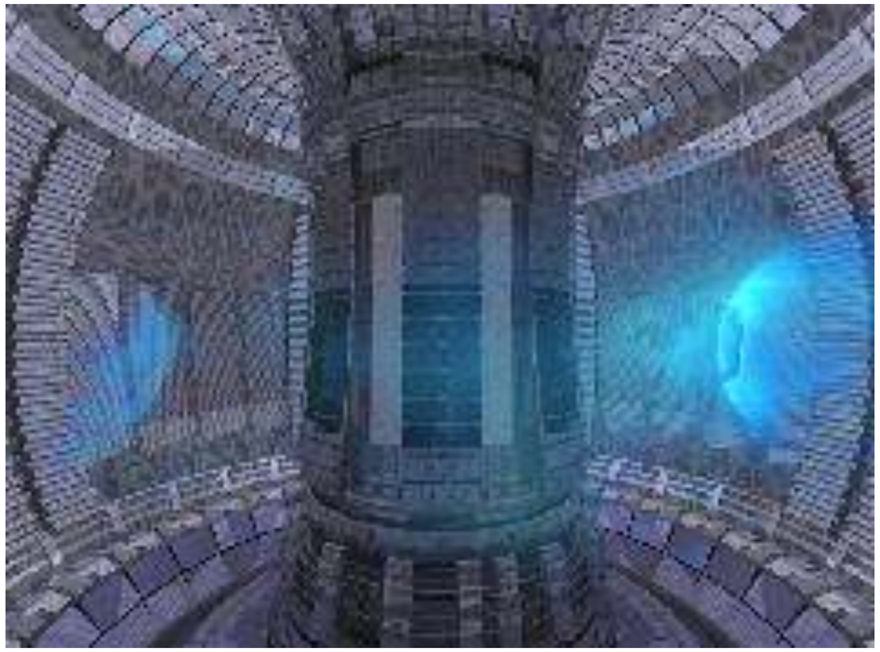
LHC: Large Hadron Collider
to search for Higgs particle





LISA: 3 satellites
to detect gravity waves

ITER: international
tokamak (fusion power)



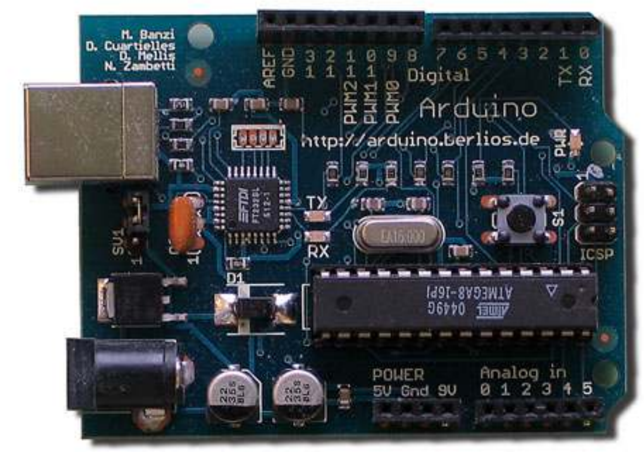
Hands-on table-top science

cost: ~$1000 | time: ~year(s) | scientists: ~few

- ***Inexpensive instrumentation***

webcam
$60

Arduino
$30



- ***Inexpensive computation***

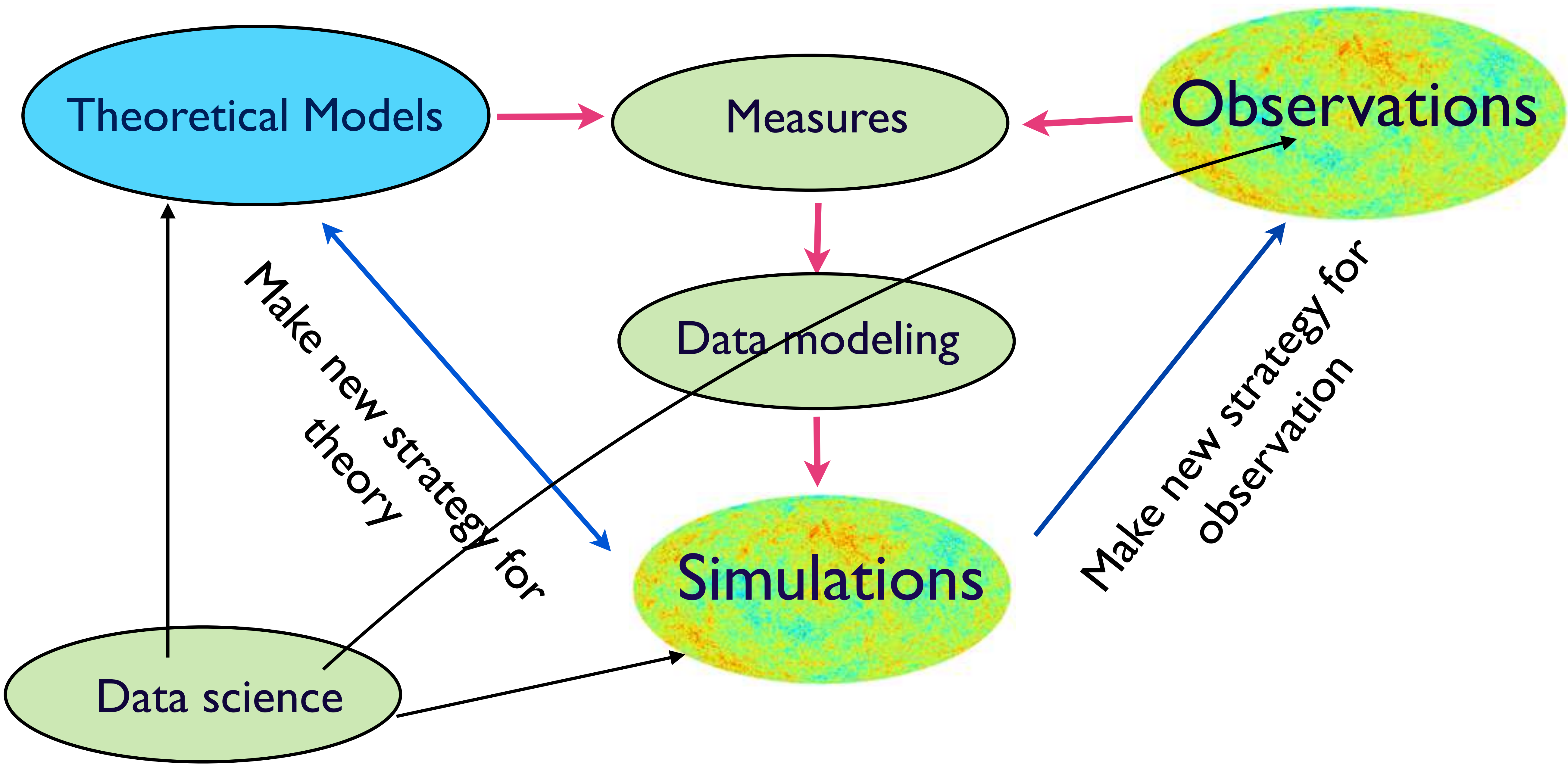
1 TB
$100

MATLAB

Harry L. Swinney, ICTP 2013

روش شناسی علمی

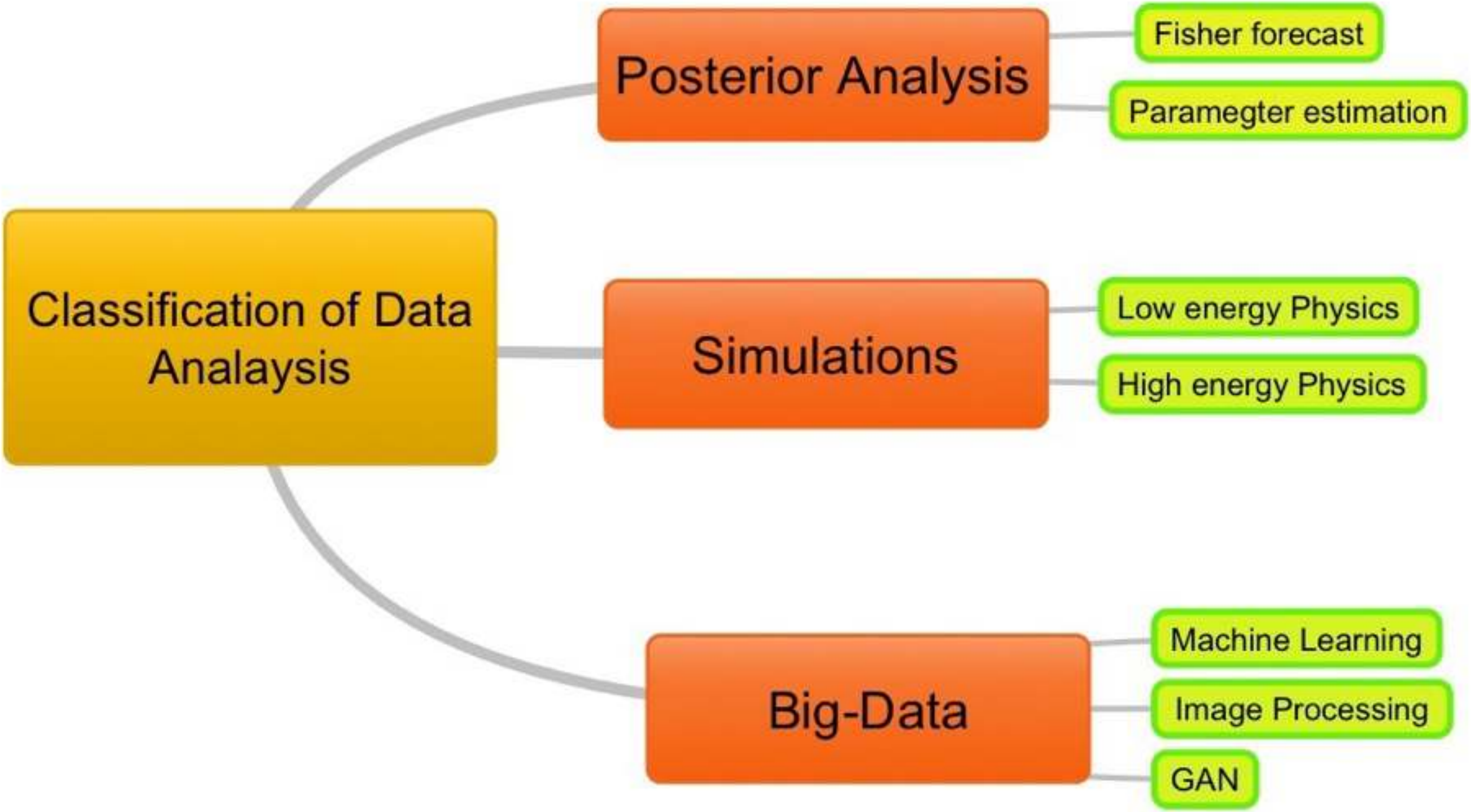
Model - Observation & Experiments - Statistical analysis



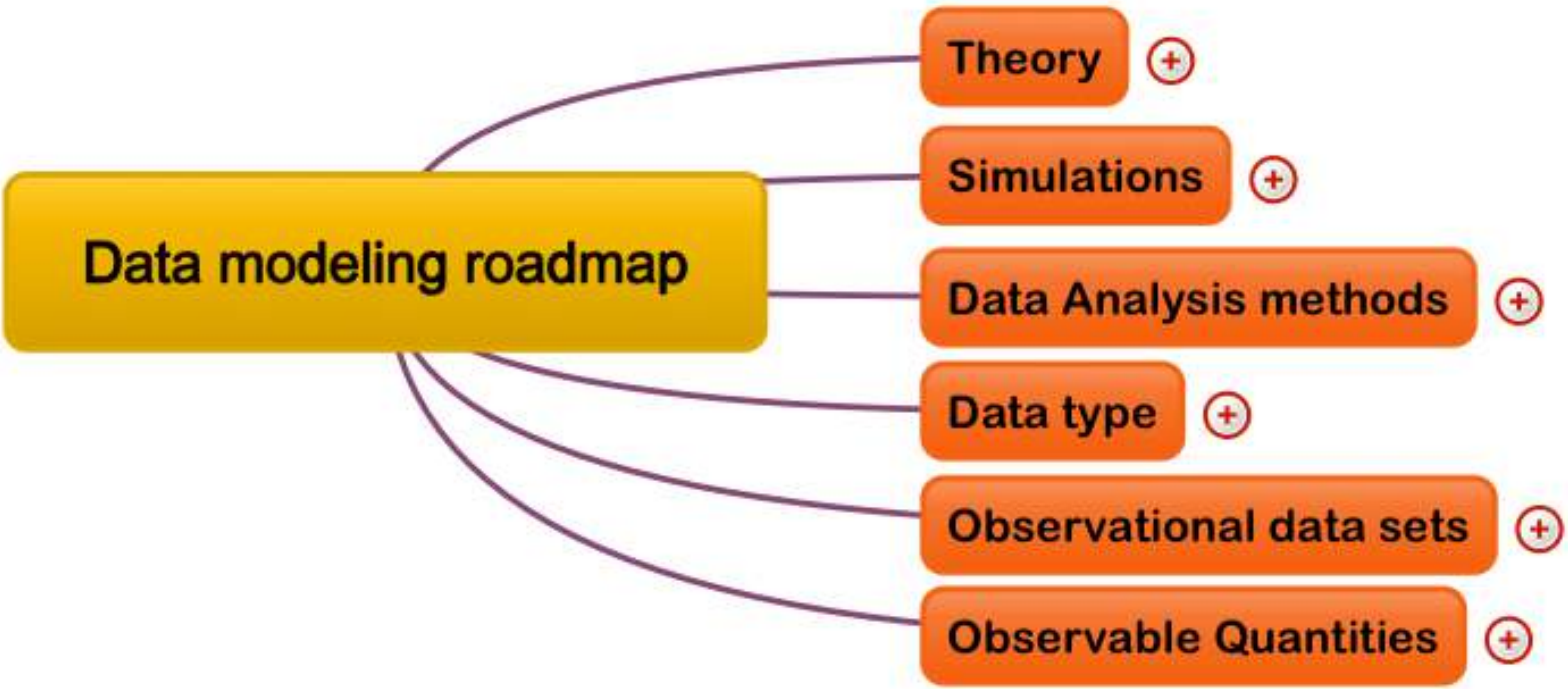
برای پاسخ گویی به سوالاتی در خصوص
چیستی و چرایی (علم و دانش) و رسیدن به مرحله چگونگی (دانش فنی)
باید مدلی بنا کنیم

- برای بررسی تحول فرآیندها در طبیعت و احتمالاً پیش بینی وضعیت آنها در آینده
- این مدل بایستی حتی الامکان از نقطه نظر ریاضی ساده باشد
- کمیتهای مشاهده پذیر را تعیین کنیم
- اندازه گیری های مستقیم و غیر مستقیم
- استفاده از روشهای قدرتمند آماری برای تحلیل

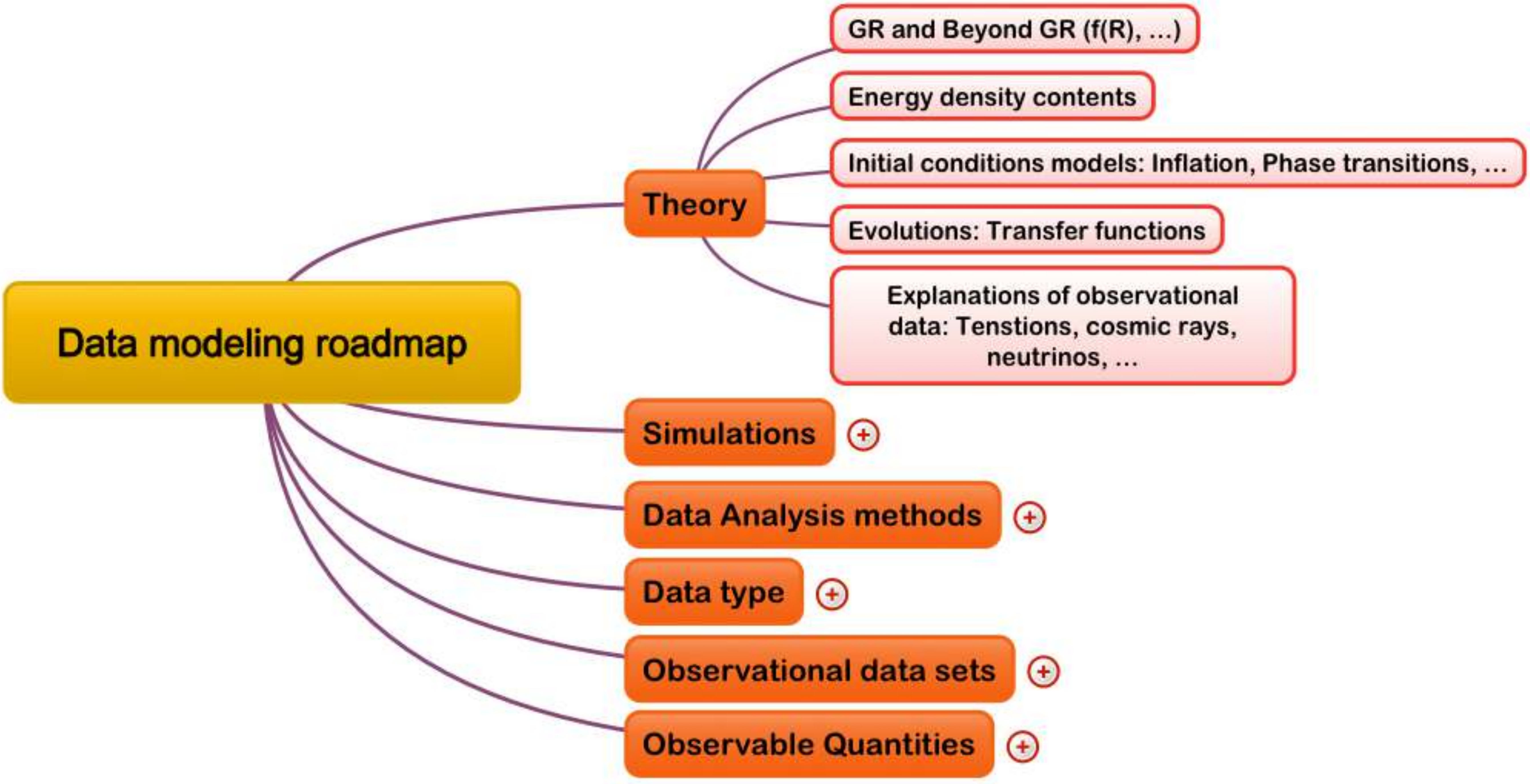
دسته بندی اهداف تحلیل داده



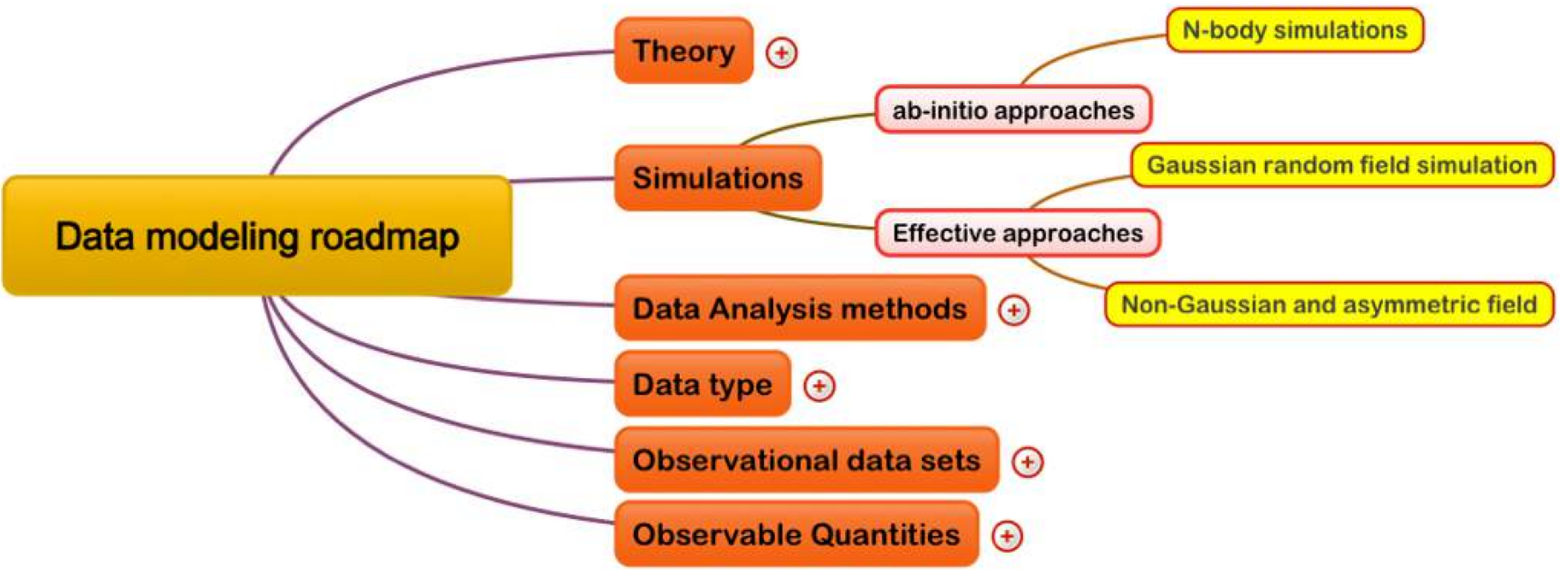
A glance at the roadmap (1)



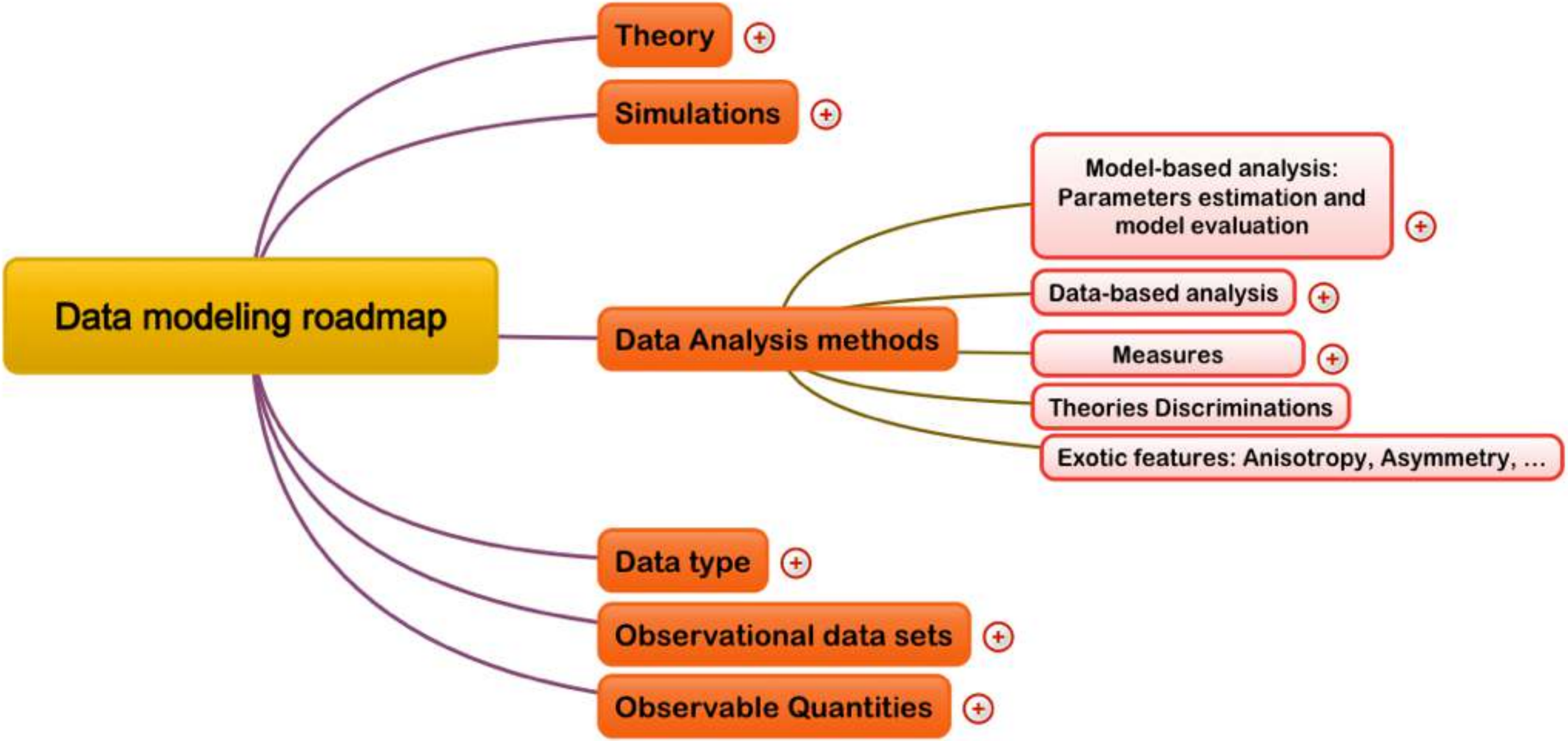
A glance at the roadmap (2)



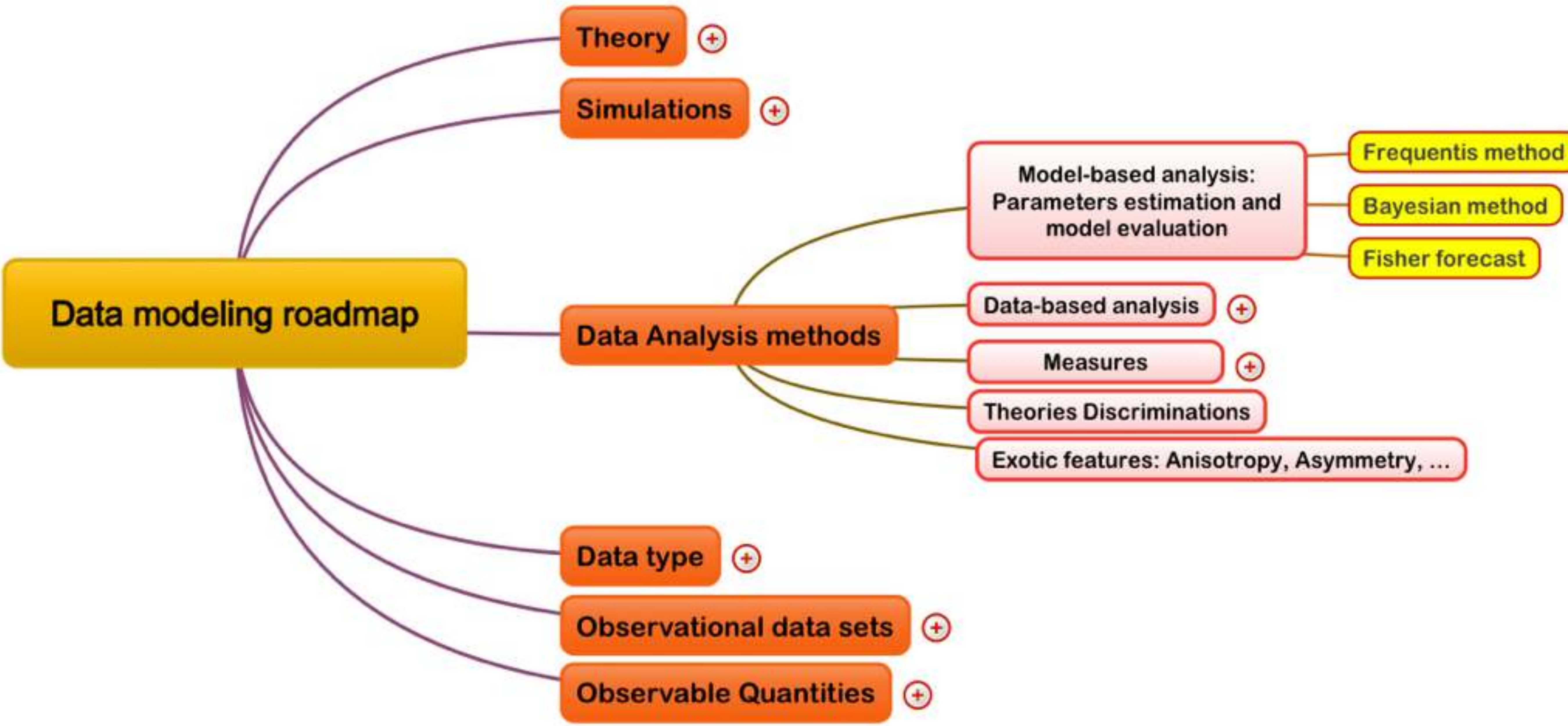
A glance at the roadmap (3)



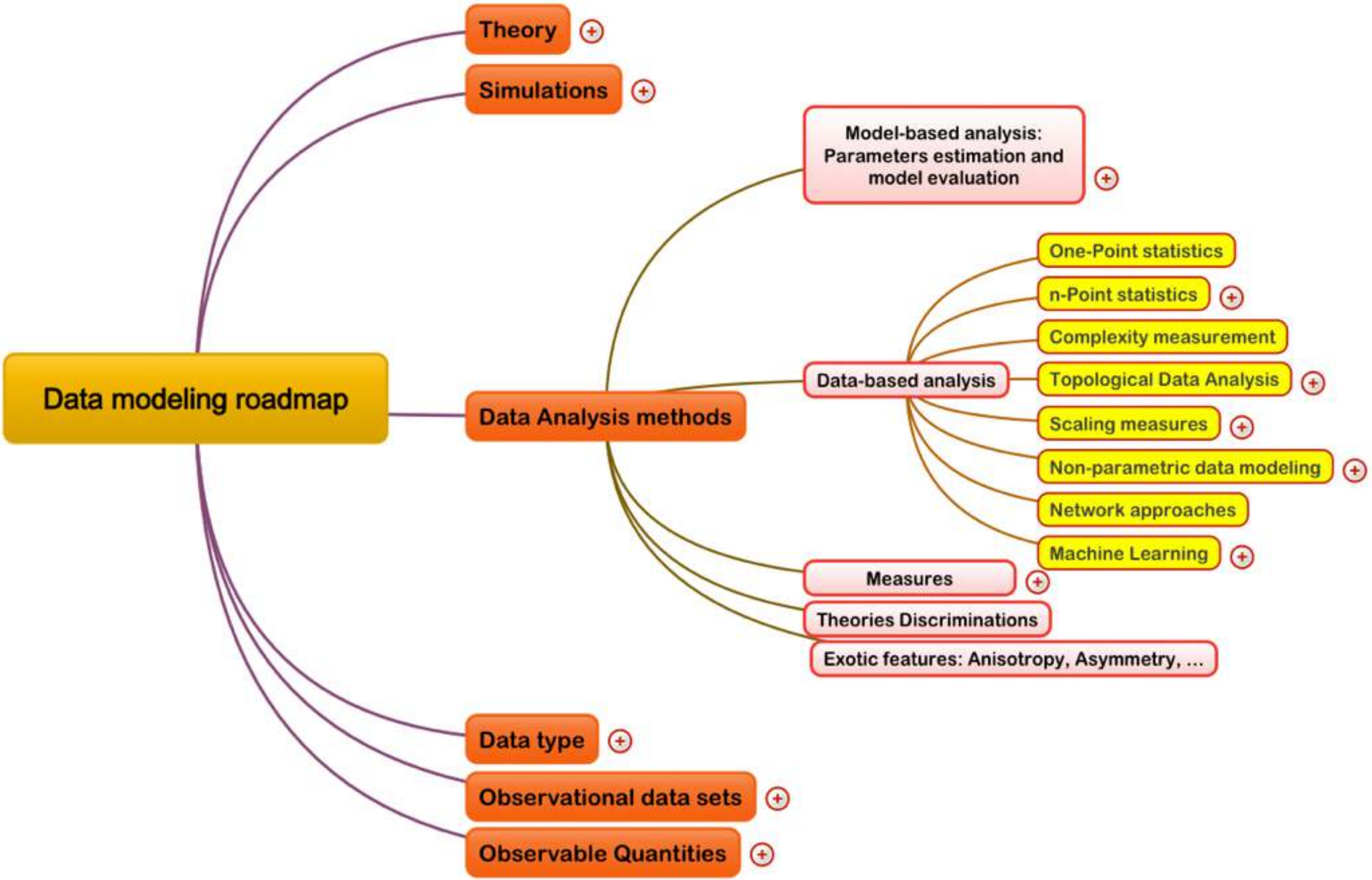
A glance at the roadmap (4)



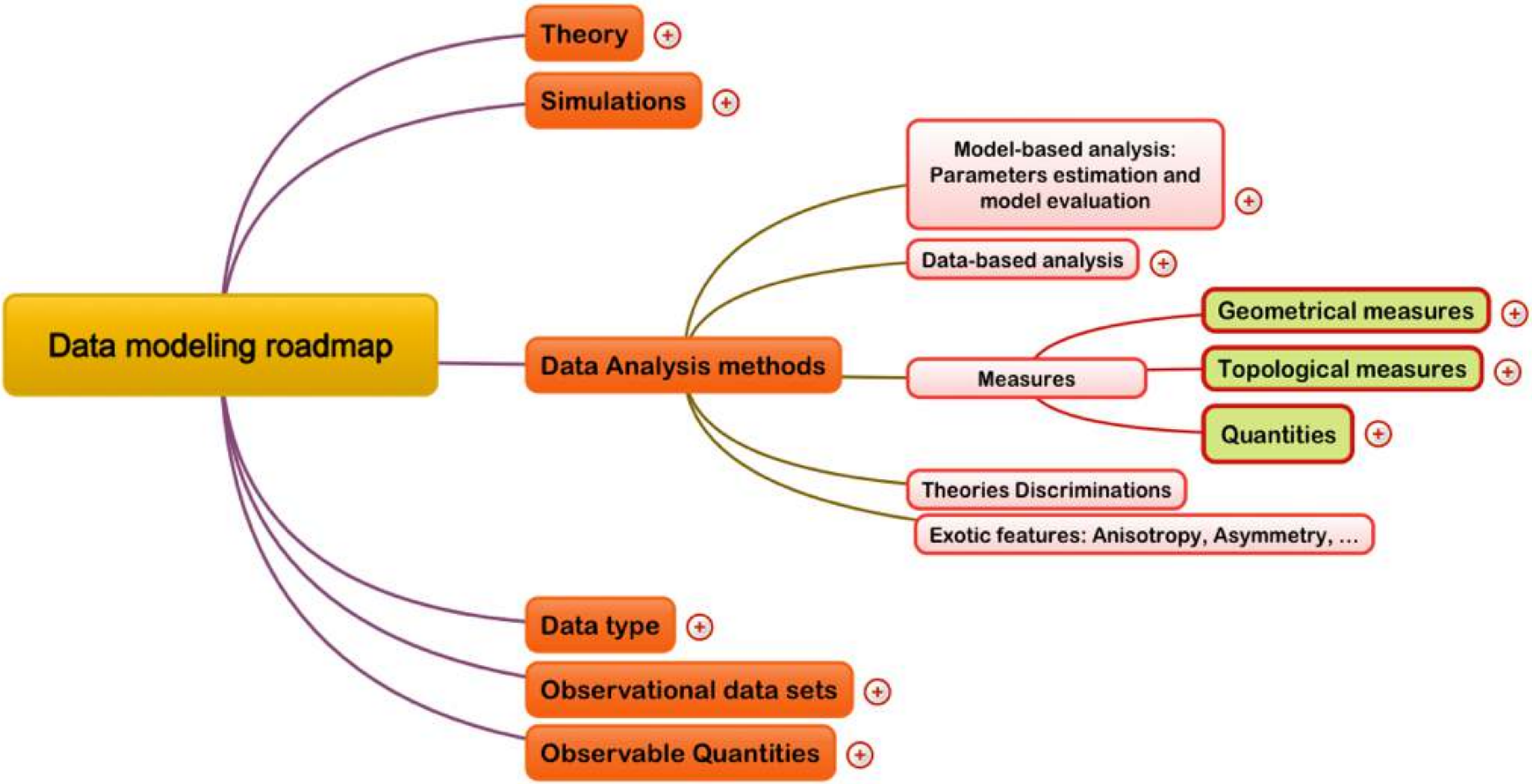
A glance at the roadmap (5)



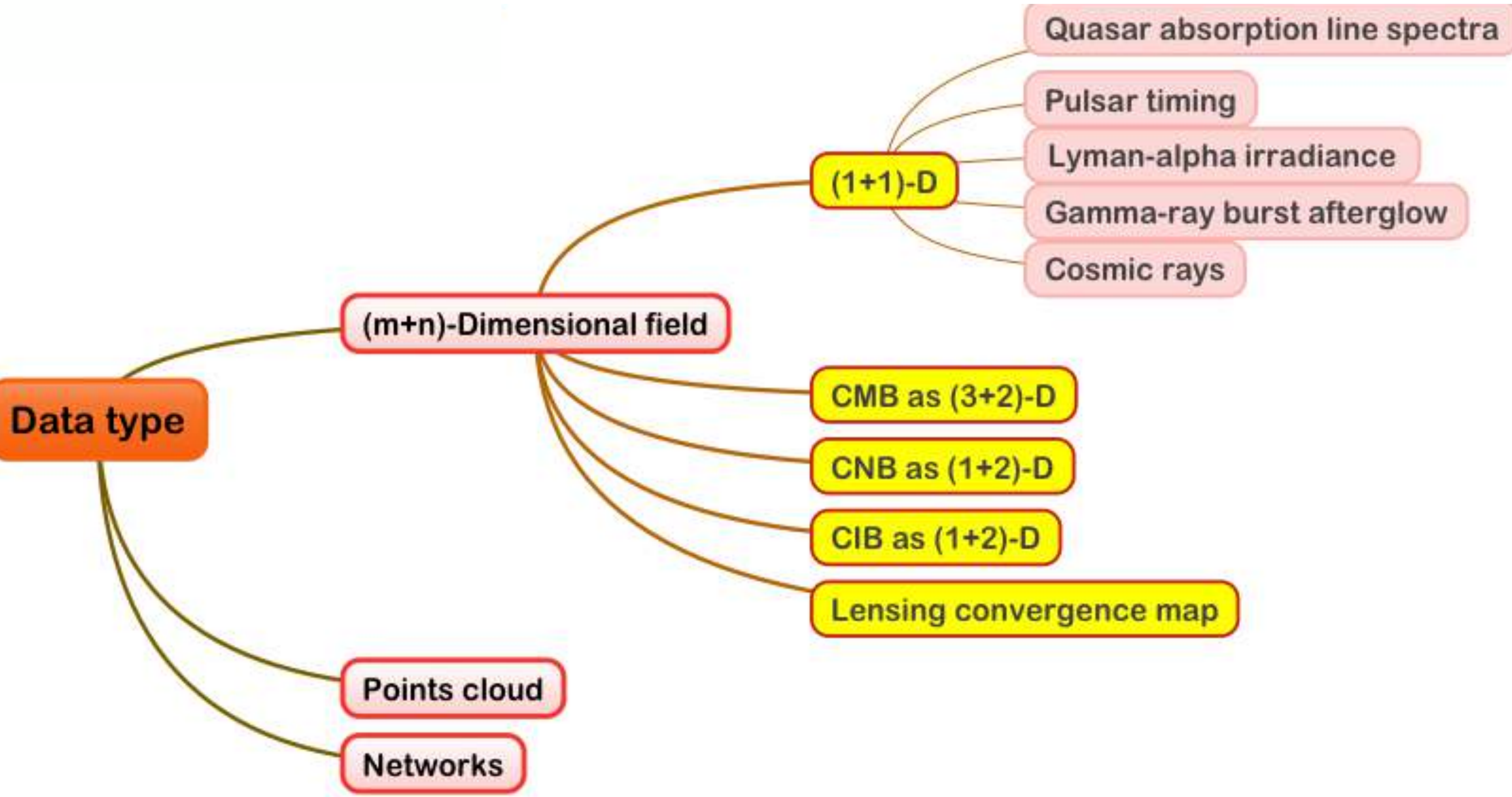
A glance at the roadmap (6)



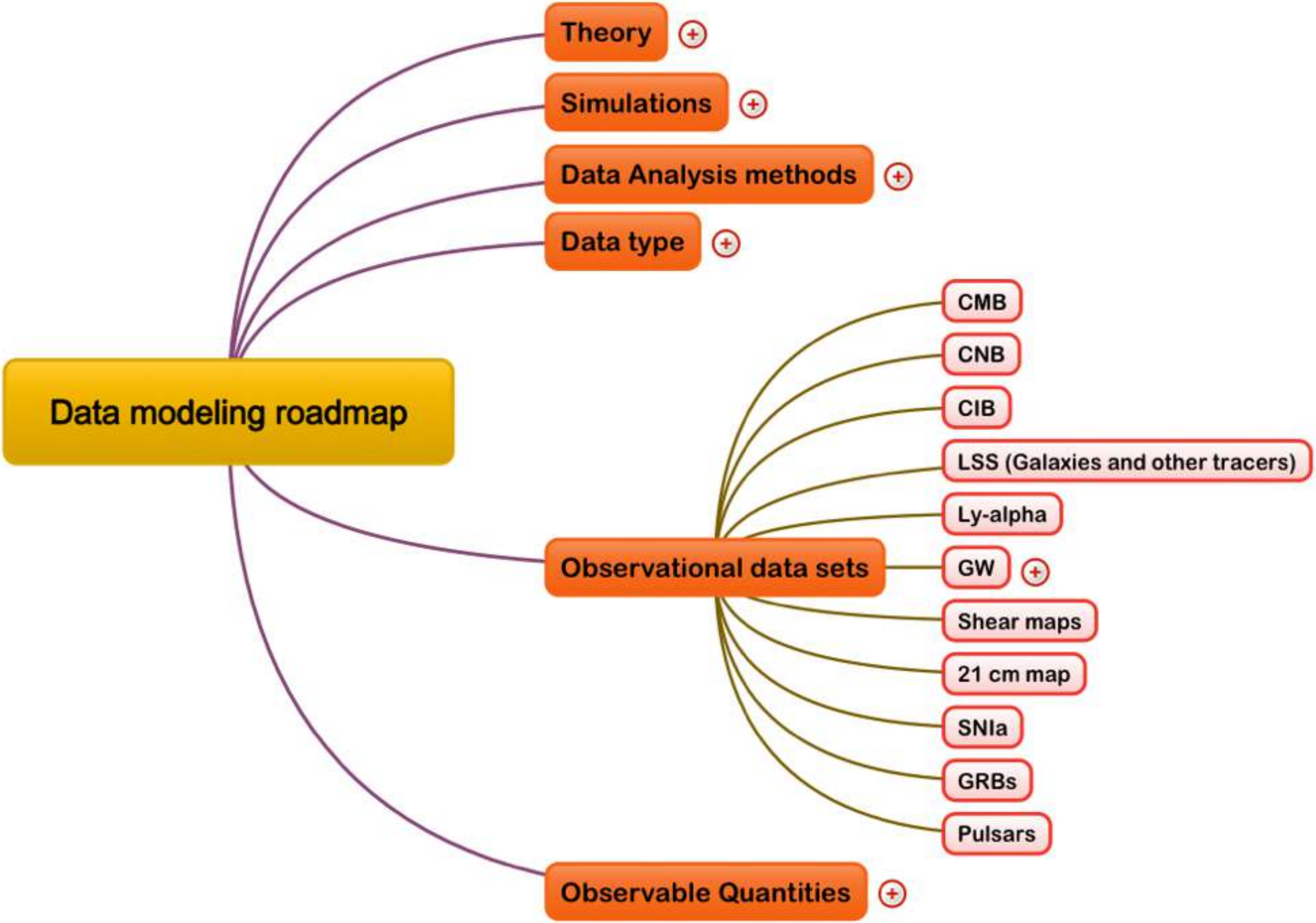
A glance at the roadmap (7)



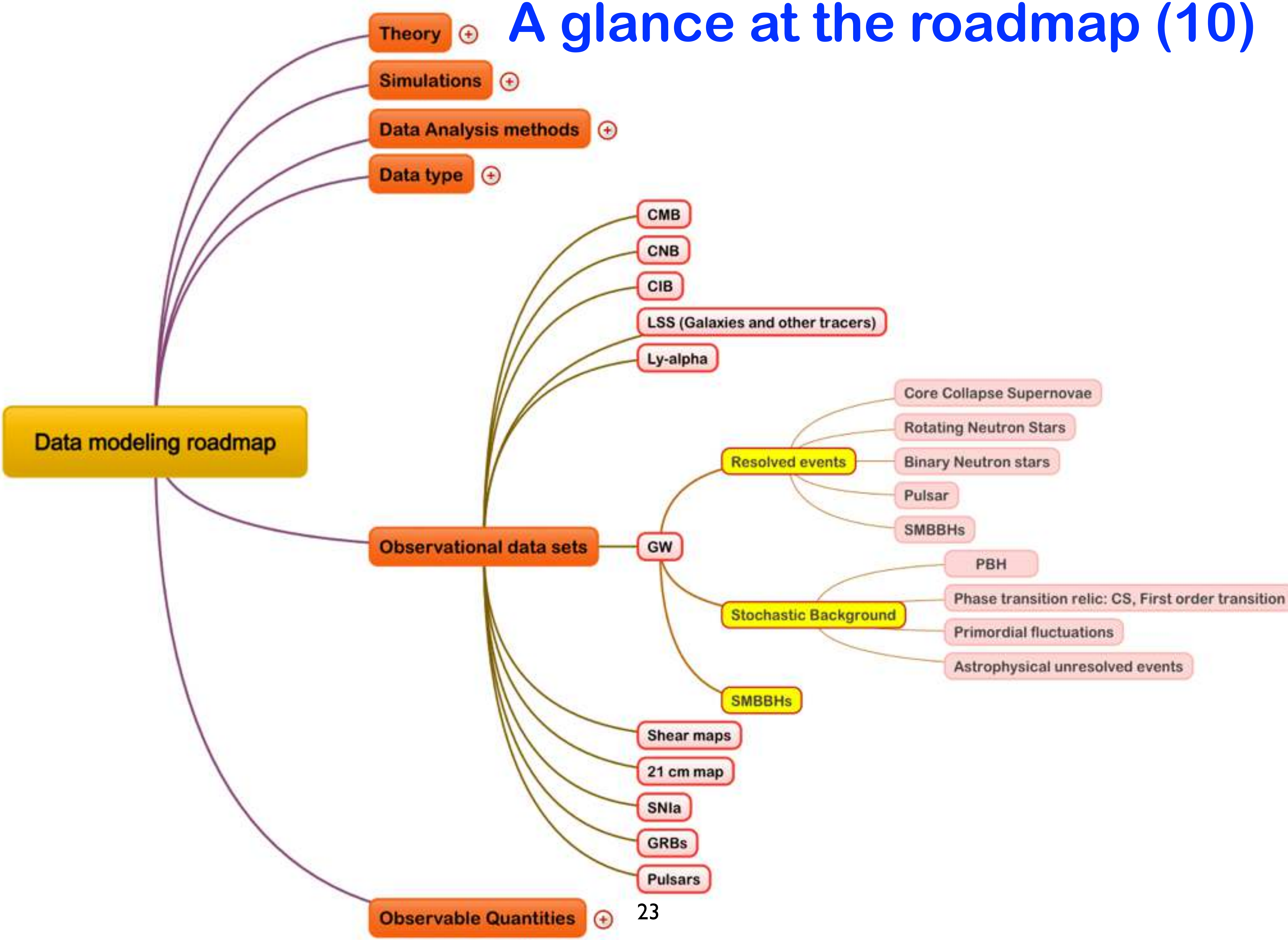
A glance at the roadmap (8)



A glance at the roadmap (9)

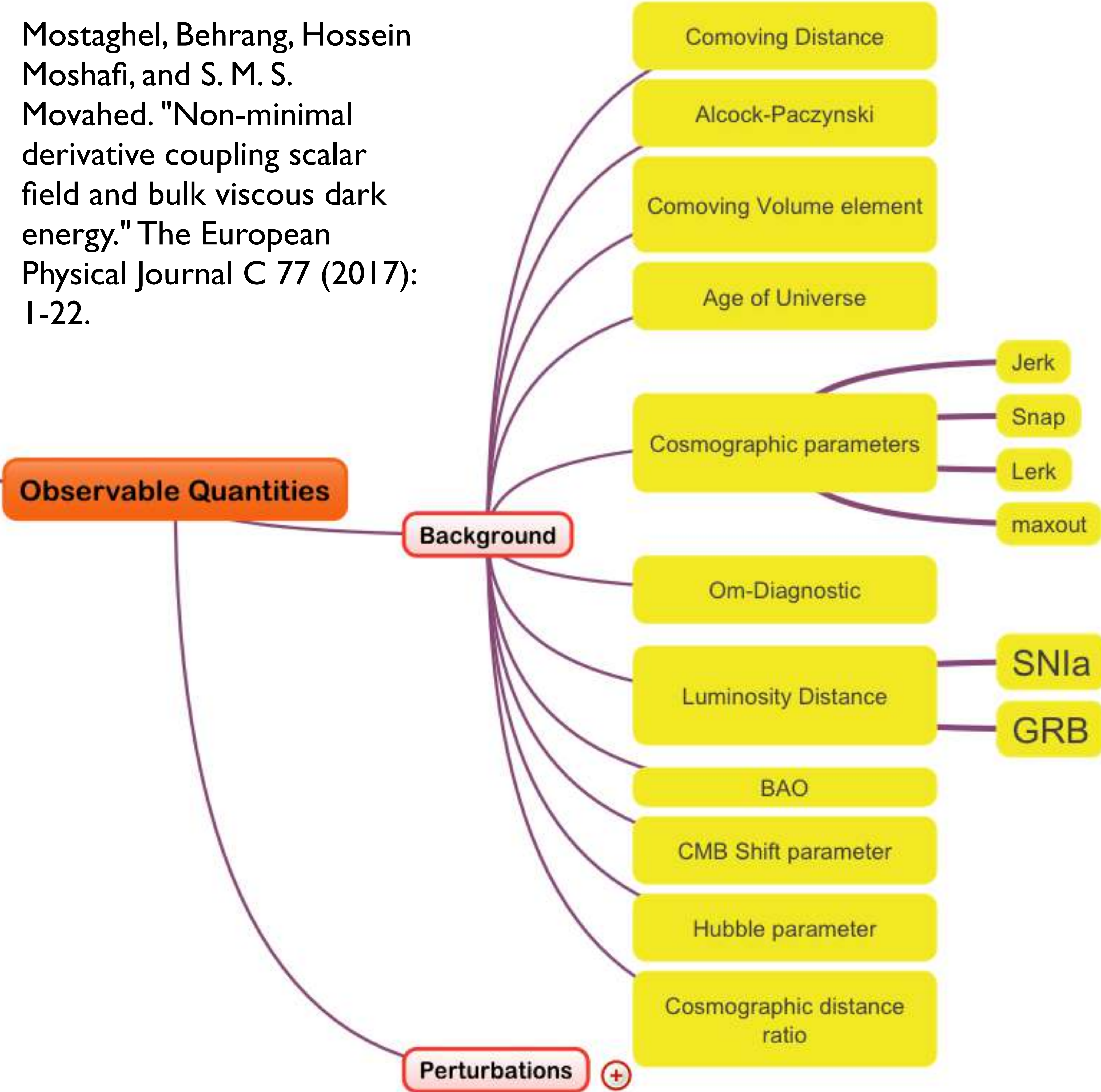


A glance at the roadmap (10)

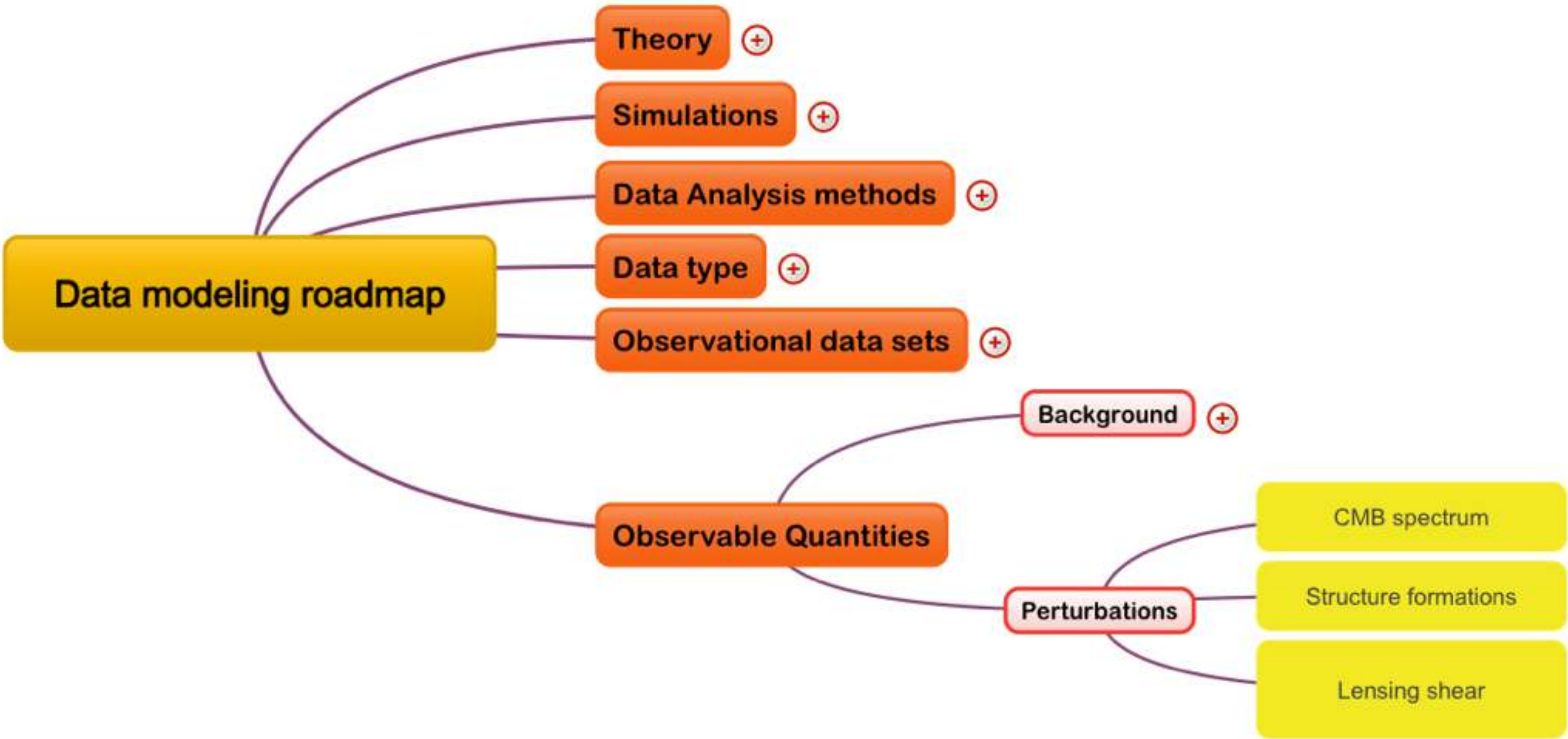


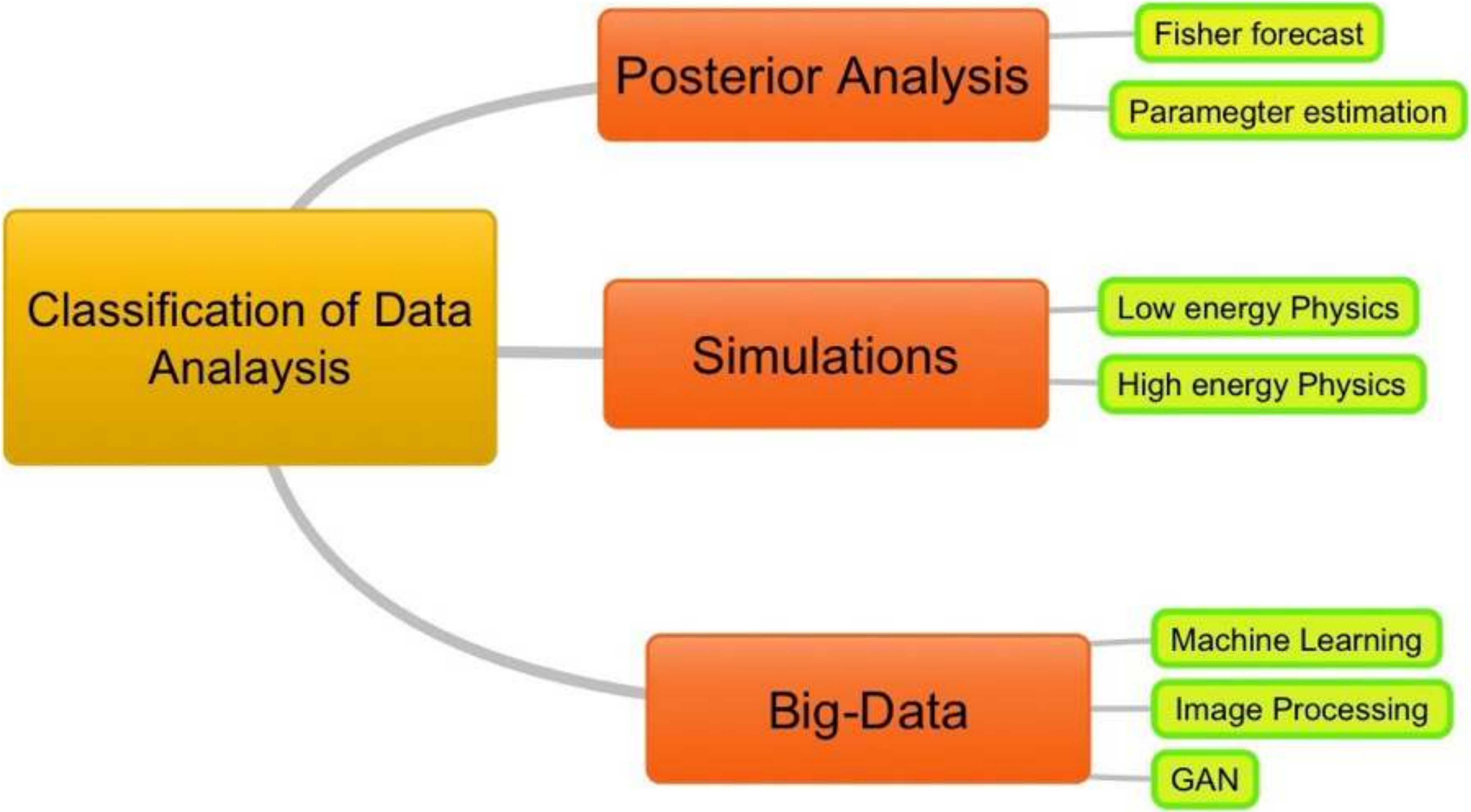
A glance at the roadmap (11)

Mostaghel, Behrang, Hossein Moshafi, and S. M. S. Movahed. "Non-minimal derivative coupling scalar field and bulk viscous dark energy." The European Physical Journal C 77 (2017): 1-22.



A glance at the roadmap (12)

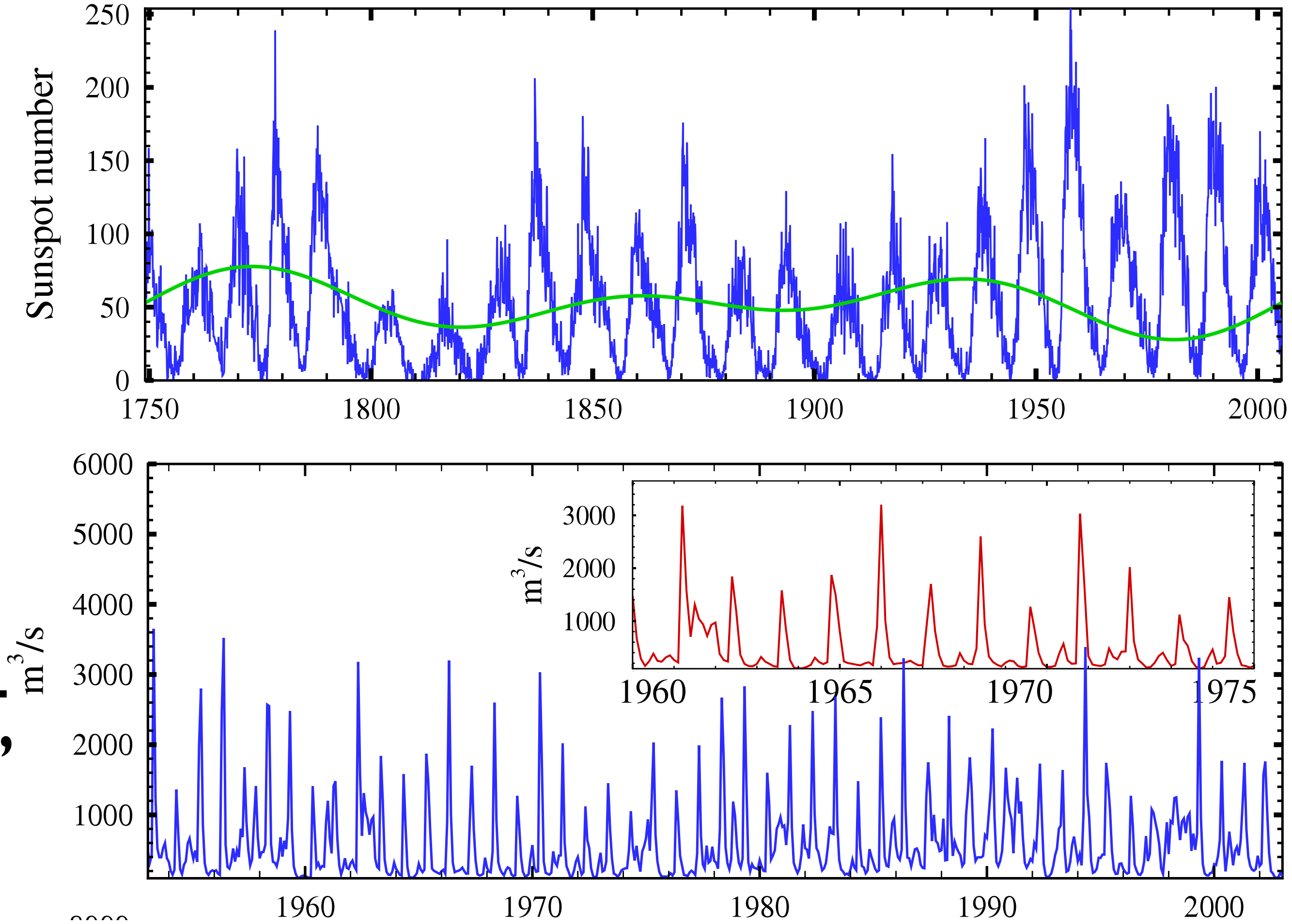



Classification of Data Analaysis
Posterior Analysis
Fisher forecast
Paramegter estimation
Simulations
Low energy Physics
High energy Physics
Big-Data
Machine Learning
Image Processing
GAN

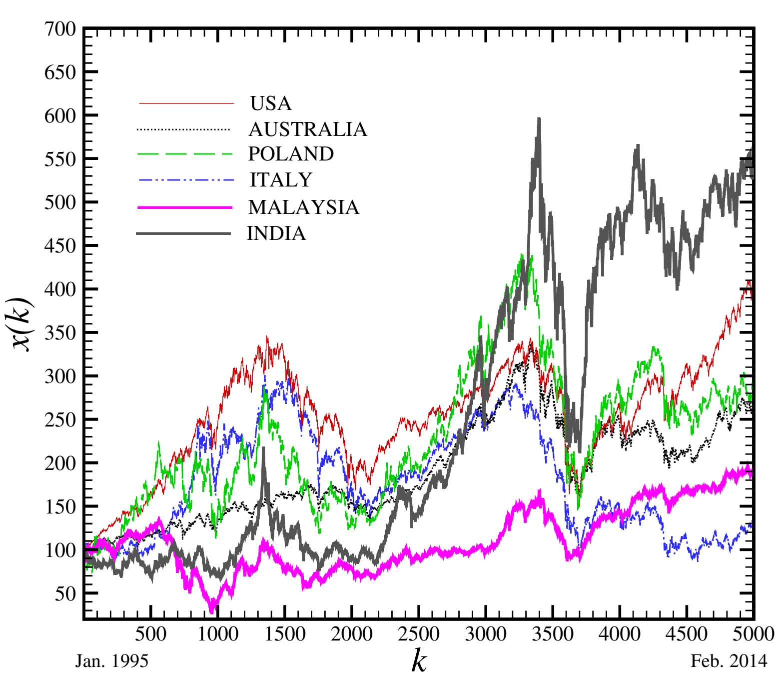
دسته بندی داده ها از منظر مدل سازی

Examples in 1+1D

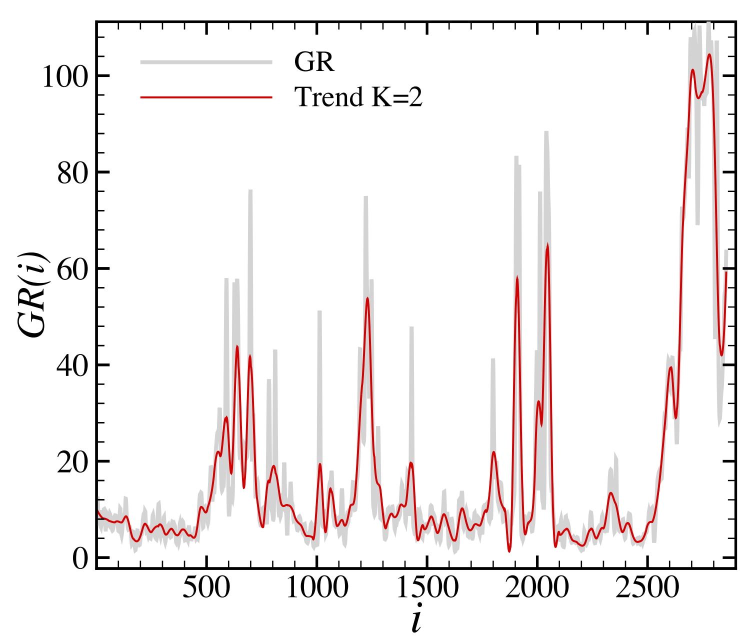
- Climates indices
- Disease: Epilepsy, Heartbeat,
- Stock index
- Petrophysical quantities: GR, STT, NP



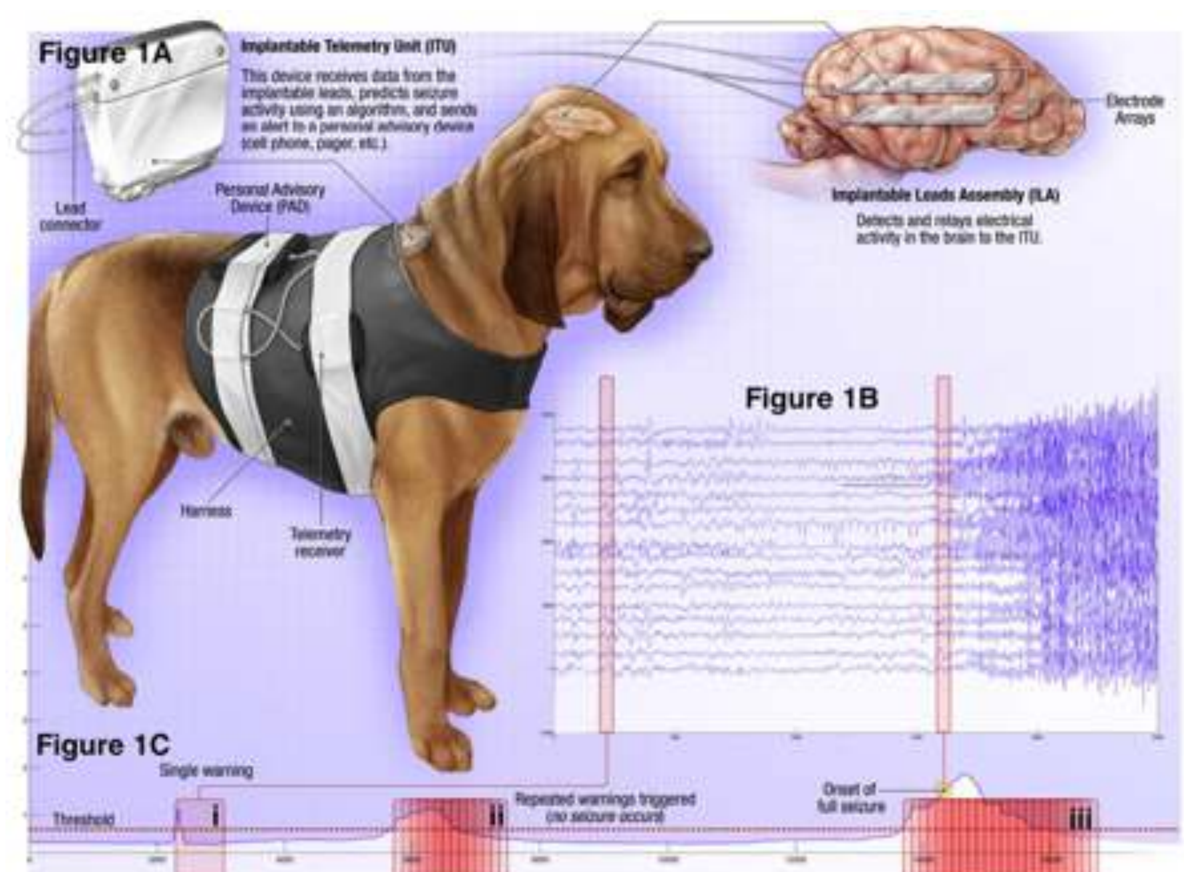
S. Hajian, S.M.S,M 2010



Paulo Ferreira, Andreia Dionsio, S.M.S.M
Physics A, 2017



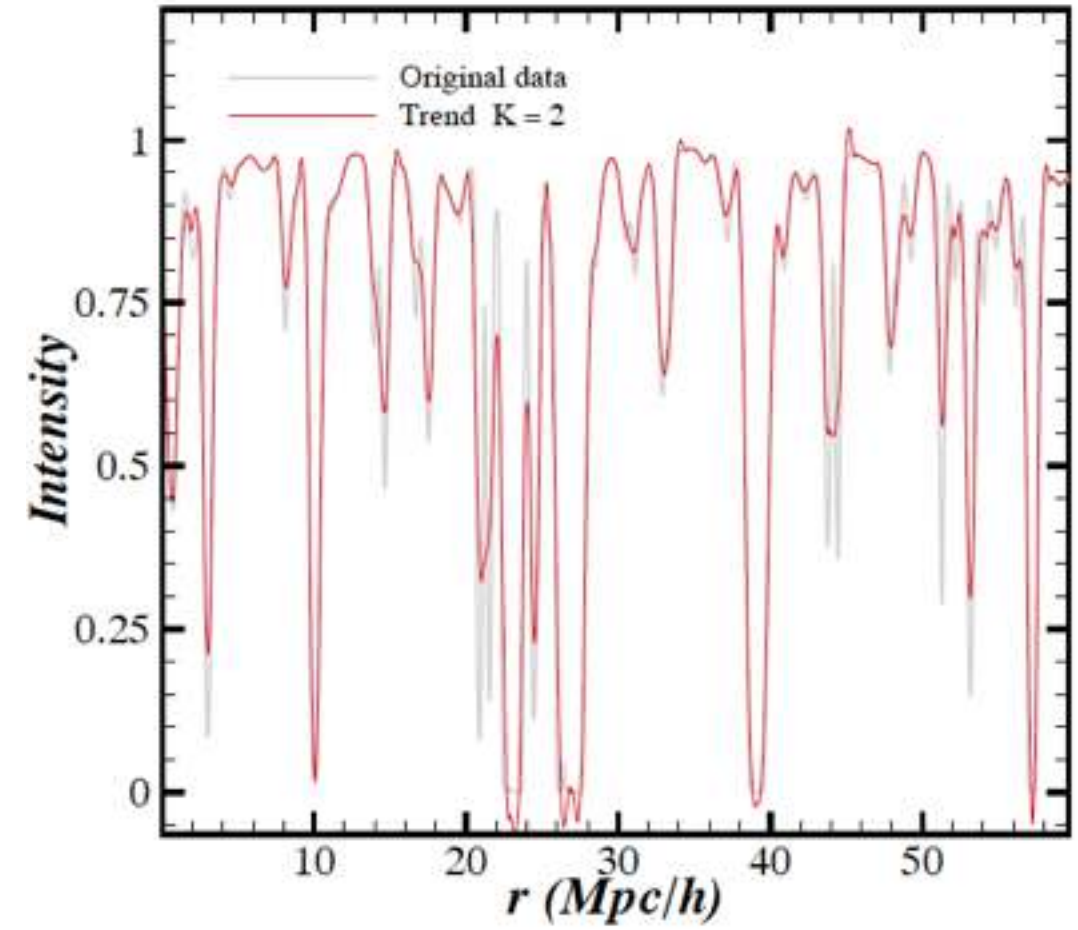
Z. Koohi, S.M.S.M., G. Jafari, arXiv:1507.07445



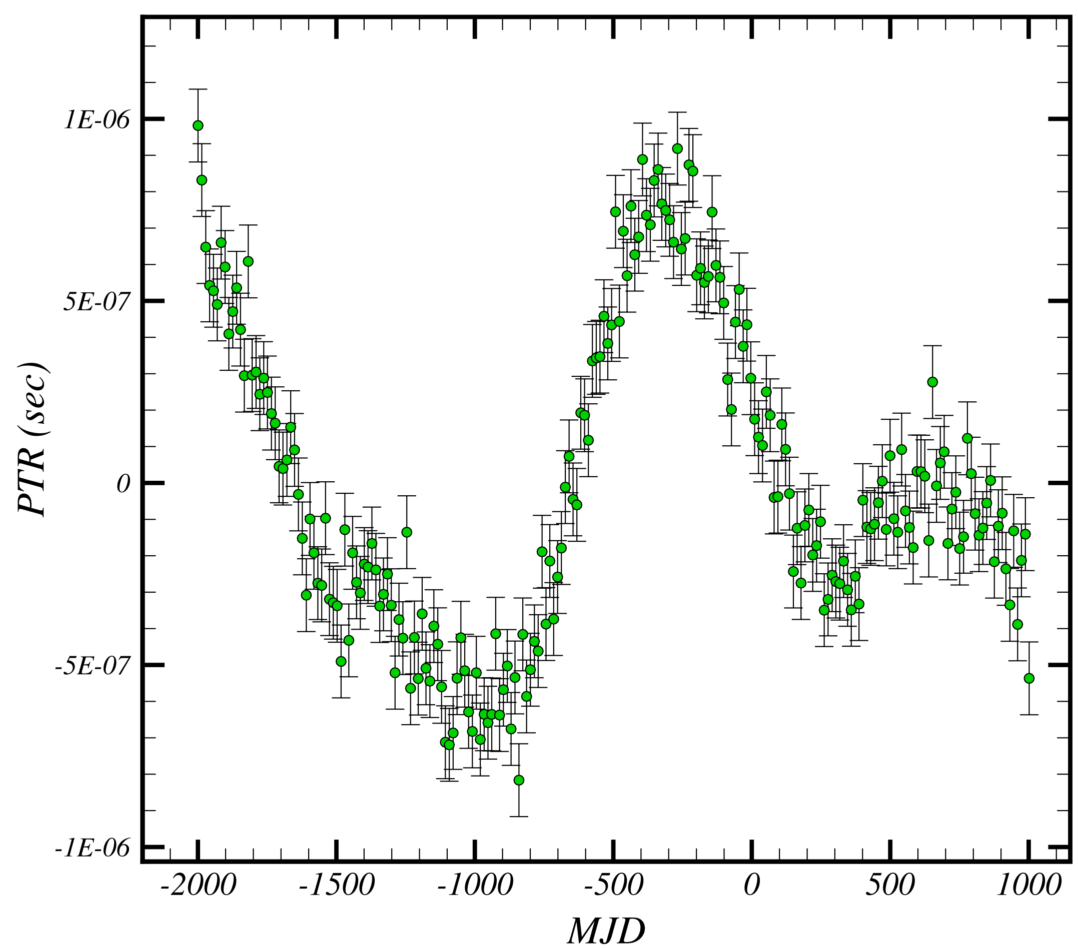
https://www.kaggle.com/c/seizure-prediction

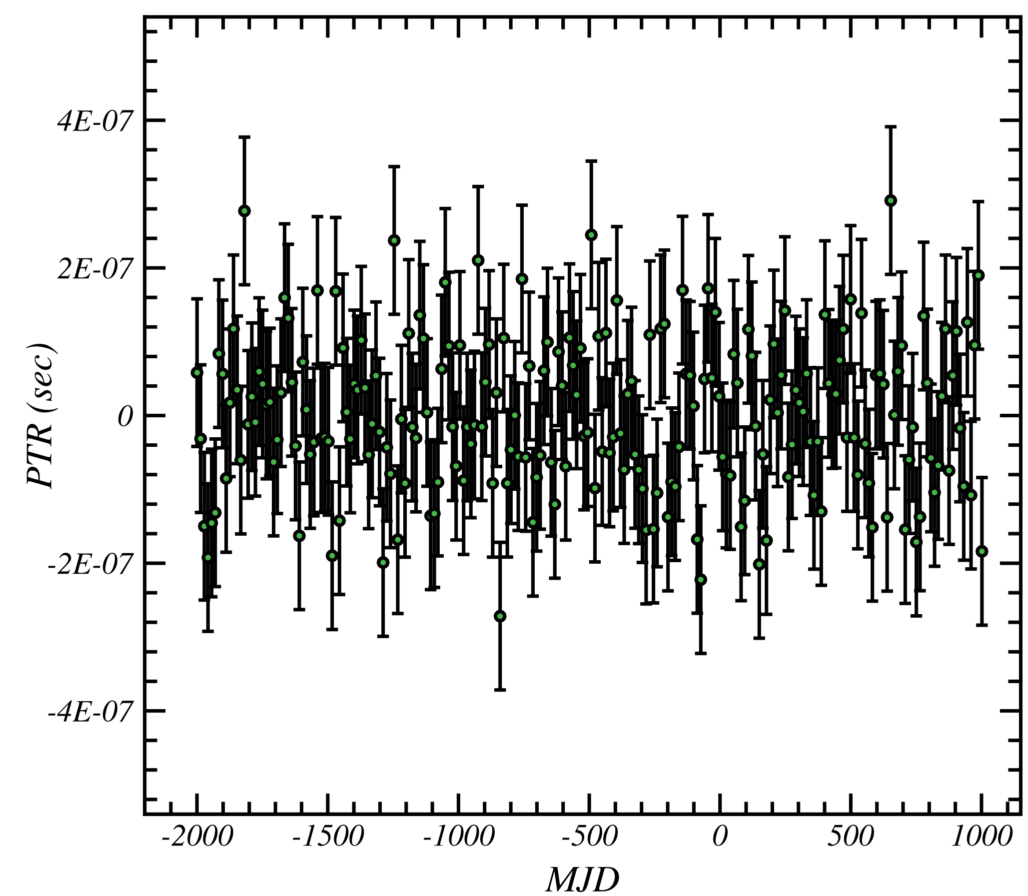
Astronomy

- Solar irradiance data sets
- Lyman-alpha Forest
- Pulsar Timing residuals (Irregular)
- Quasar absorption line spectra
- Cosmic rays
- Gravitational waves



Credit by: Vid Irsic

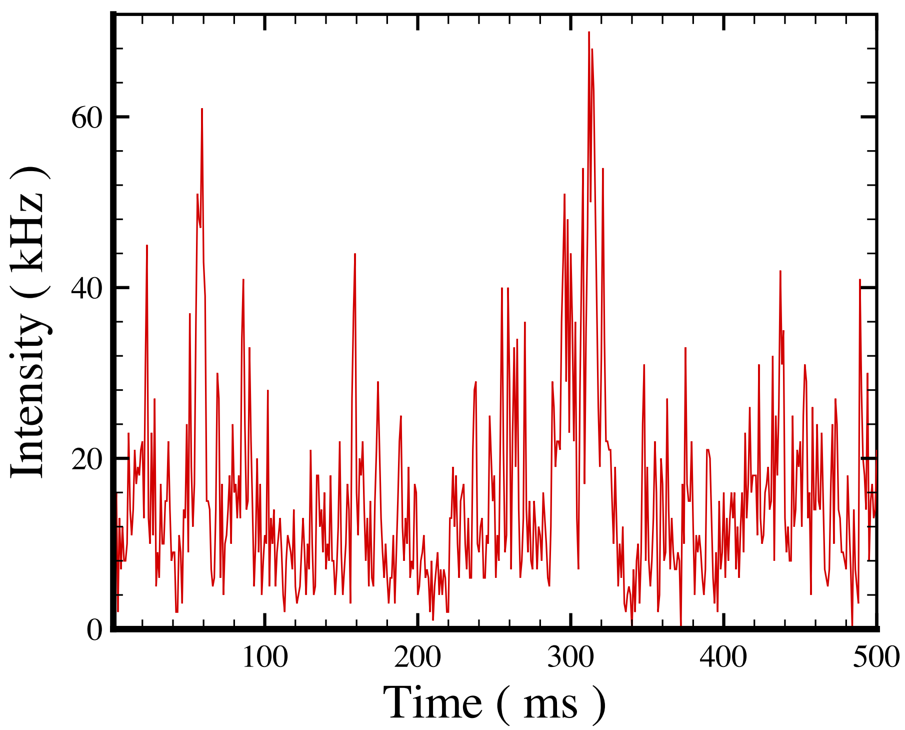




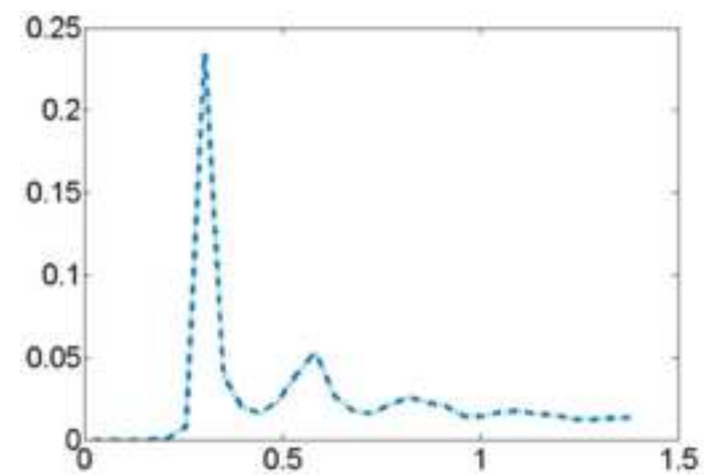
I. Eghdami, H. Panahi and S.M.S.M, APJ, 2018

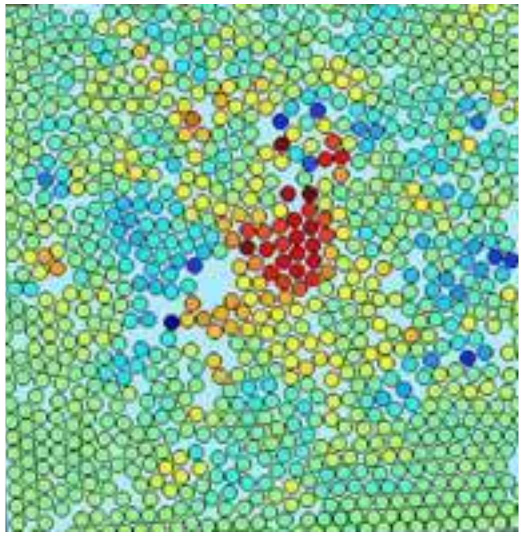
Soft-condensed matter

- Sol-Gel transition
- Granular materials (Thermodynamical properties)
- Microfluidics and nanofluids

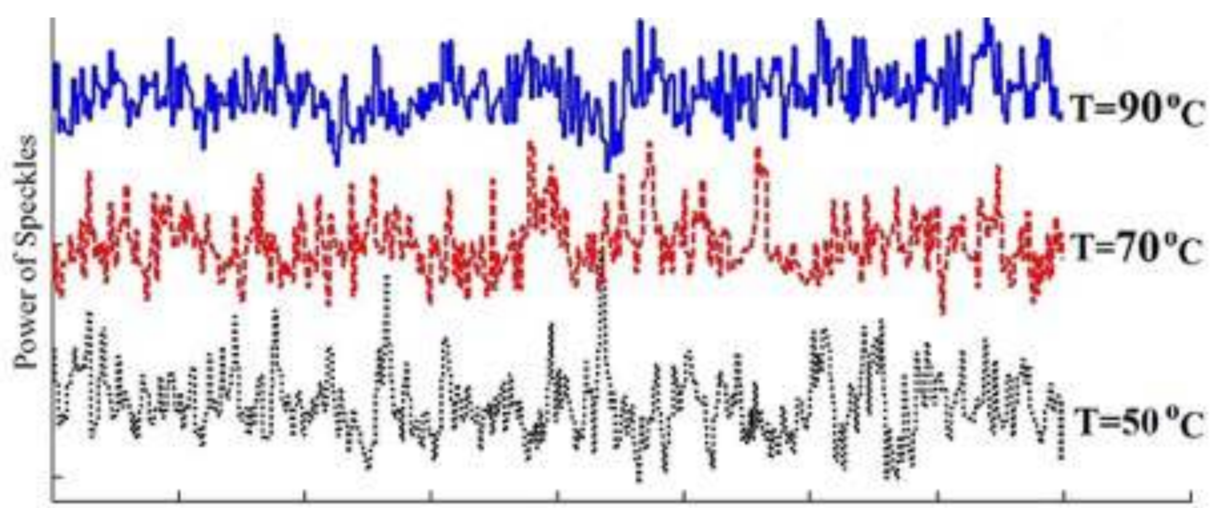


F. Shayeganfar, S.M.S.M, et.al., PRE, 2009, 2010, Chem Phys. 2013



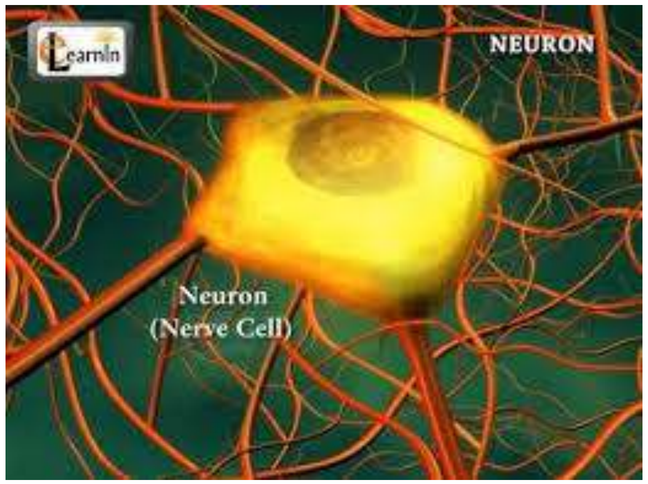


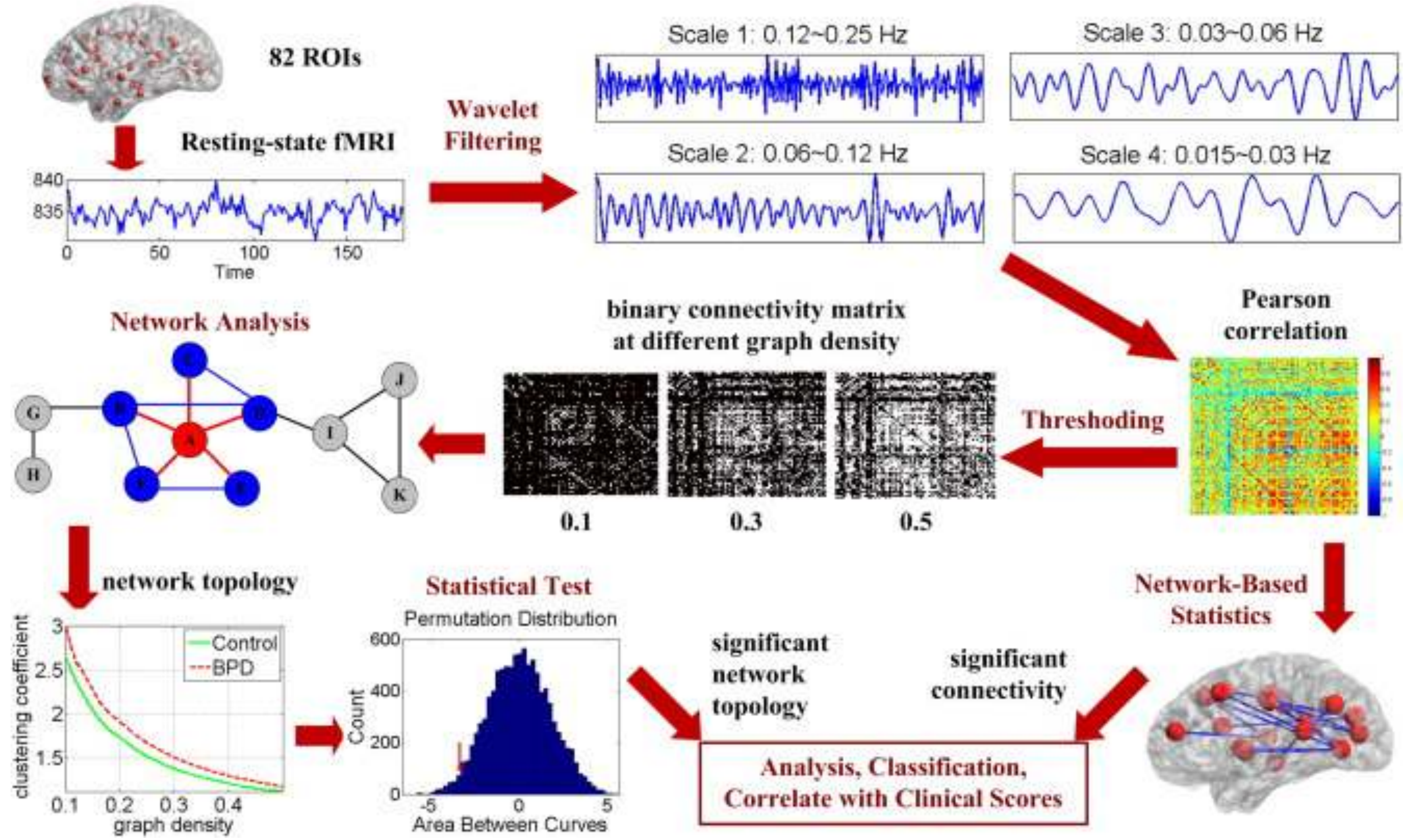
Y. Rahmani, S.M.S.M, in progress



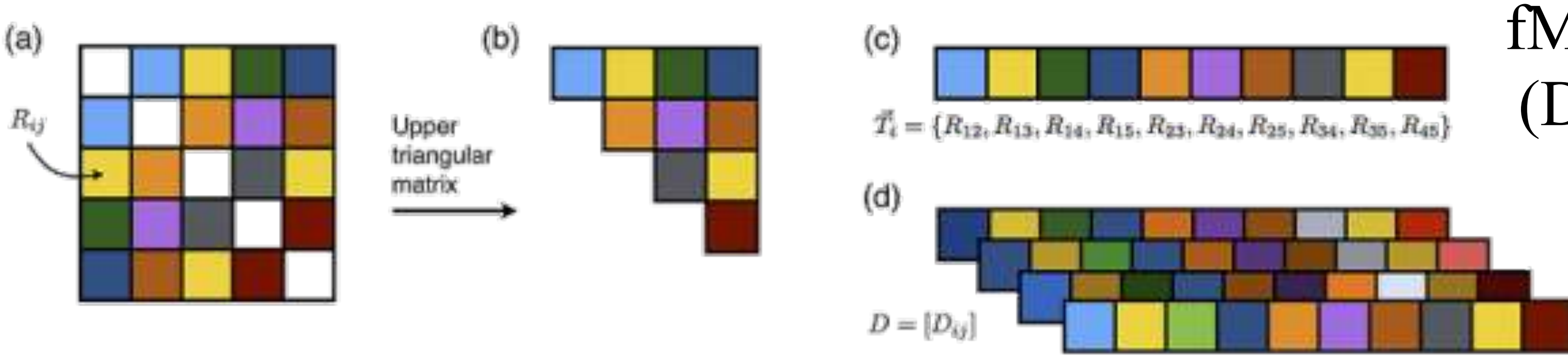
M. Arshadi Pirlar, S.M.S. M., D. Razzaghi, R. Karimzadeh, JOSAA, 2017

What governs the neuron's behavior: Network





Diagnosis of patients with ADHD



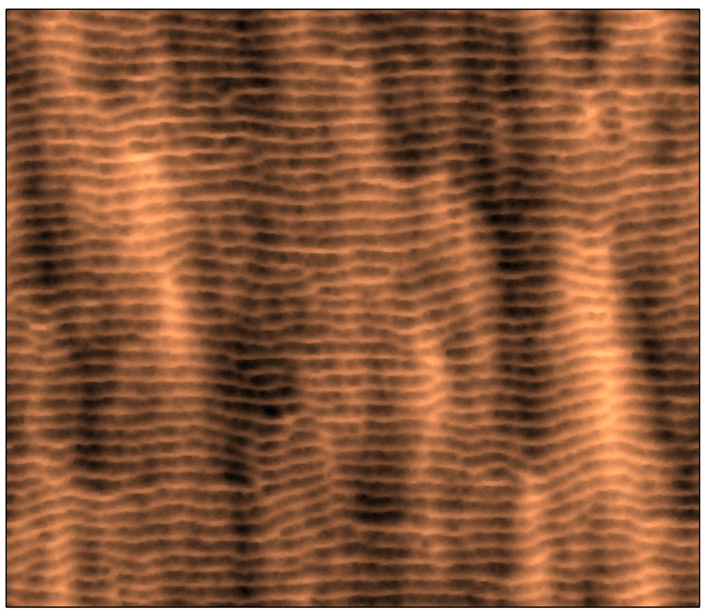
fMRI :functional brain connectivity (Diagnosis of personality disorder)

Credit by: M. MozafariLegha

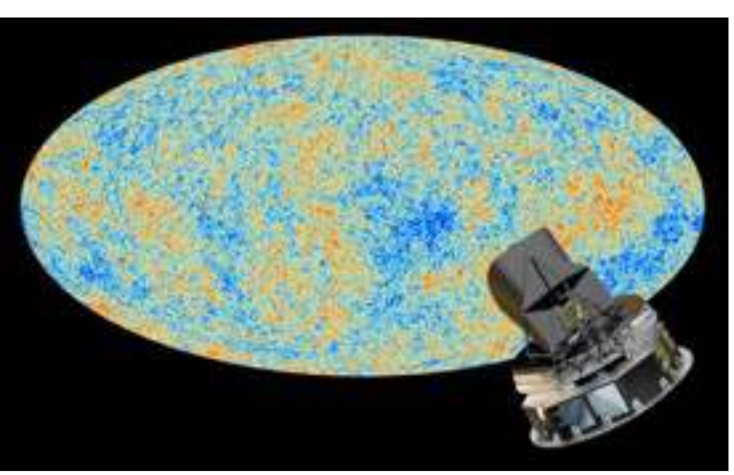
- 2D (2+1D) fields (CMB, Rough surfaces, …)

Gaussian stochastic field
primordial quantum fluctuations

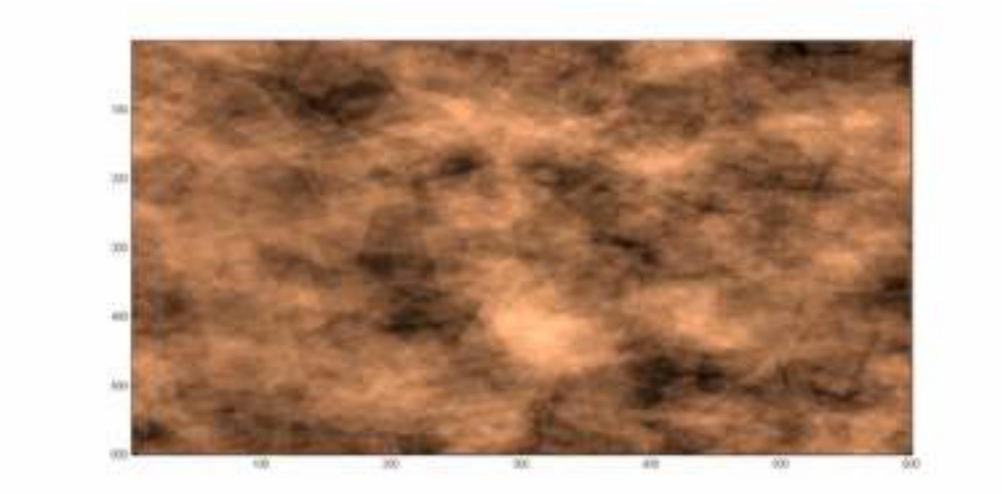
Anisotropic surface

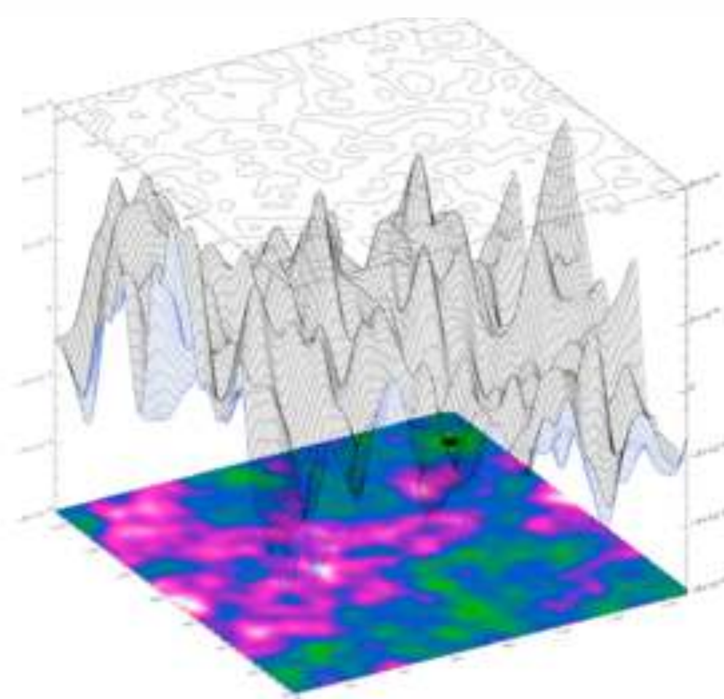


M. Ghaseminezad, S.M.S.M, et al., JAP, 2017



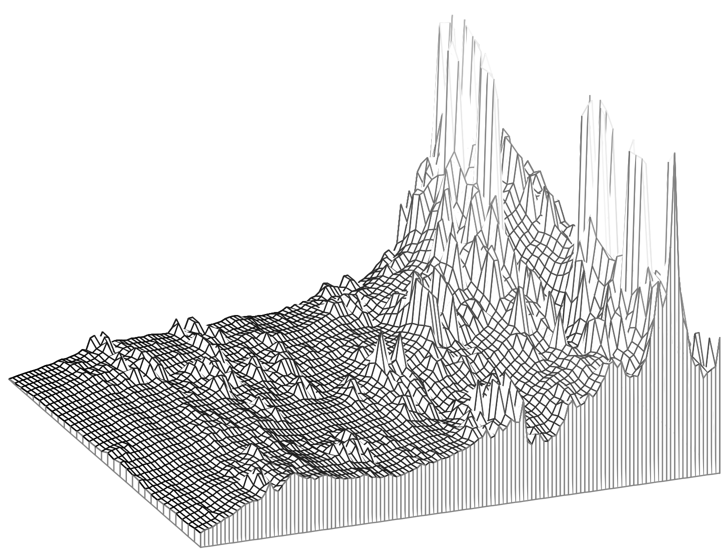
Planck Satellite results (2013)

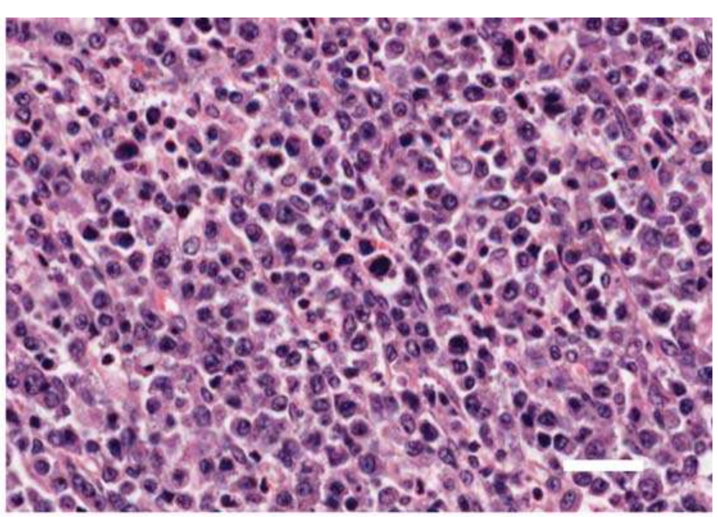




S.M.S. Movahed et. al., MNRAS 2013, 2017
S.M.S. Movahed et. al., JCAP 2011

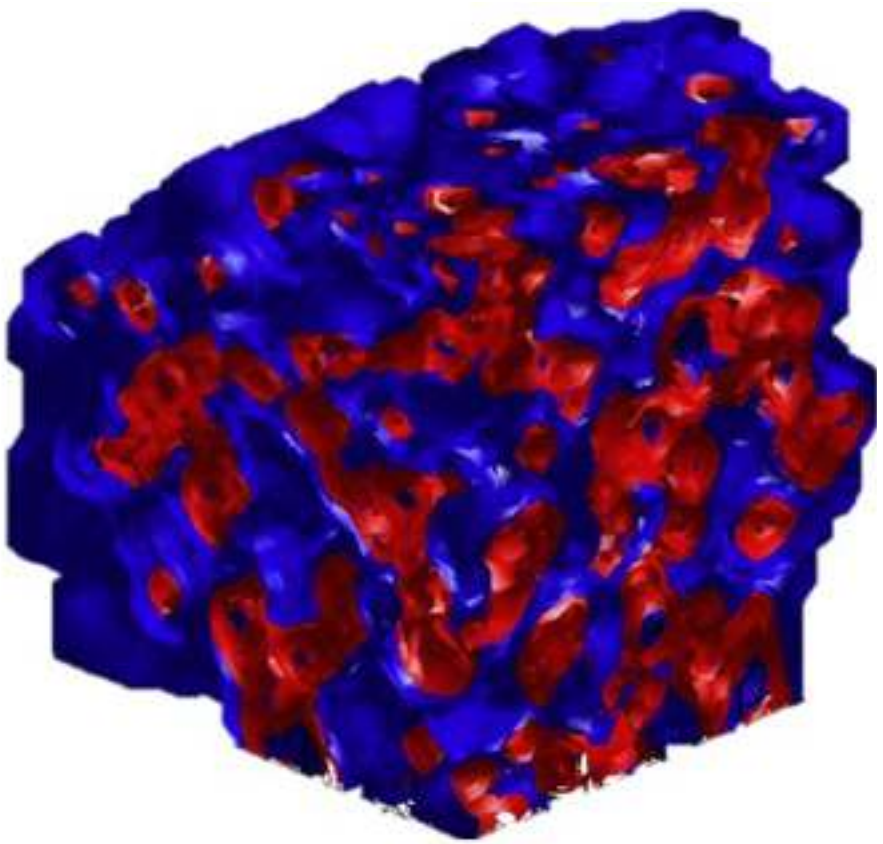
Multifractal singular and smoothed surfaces



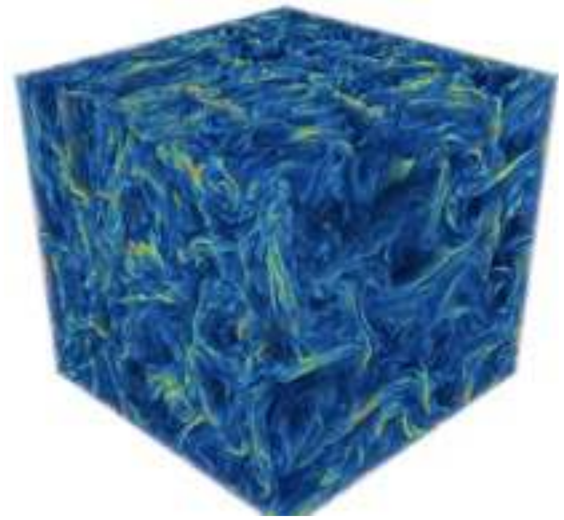


Magnetic Resonance in Medicine 71:402–410 (2014)

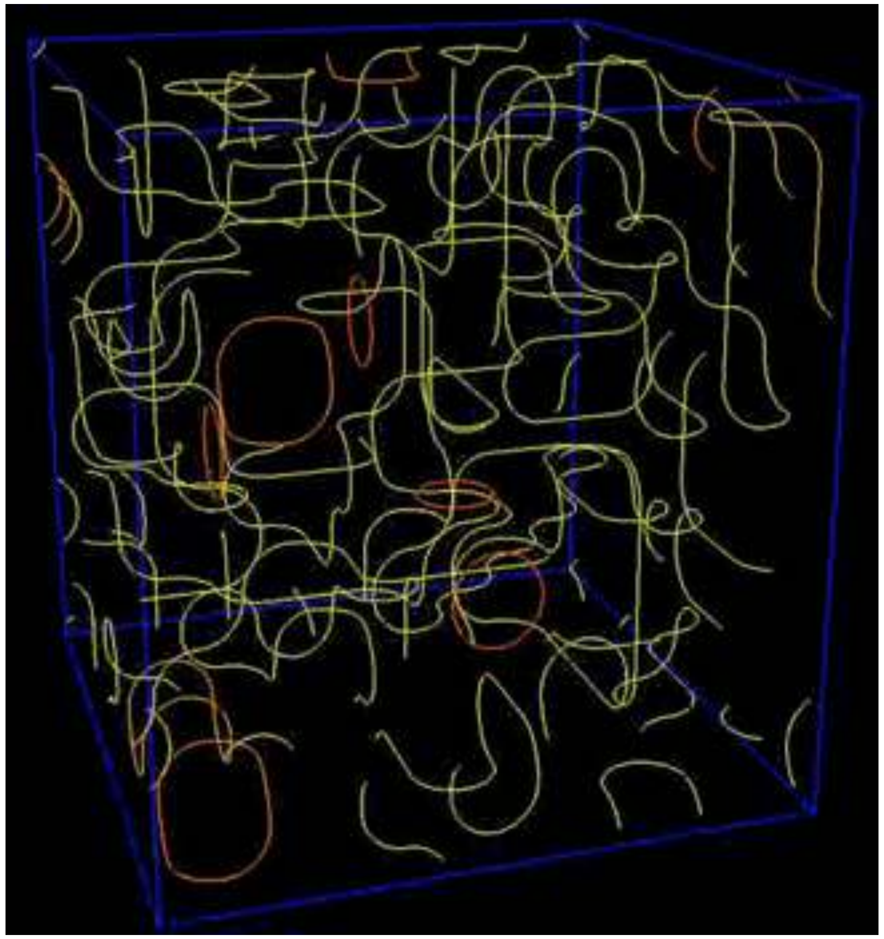
EXAMPLES IN 3+1 D



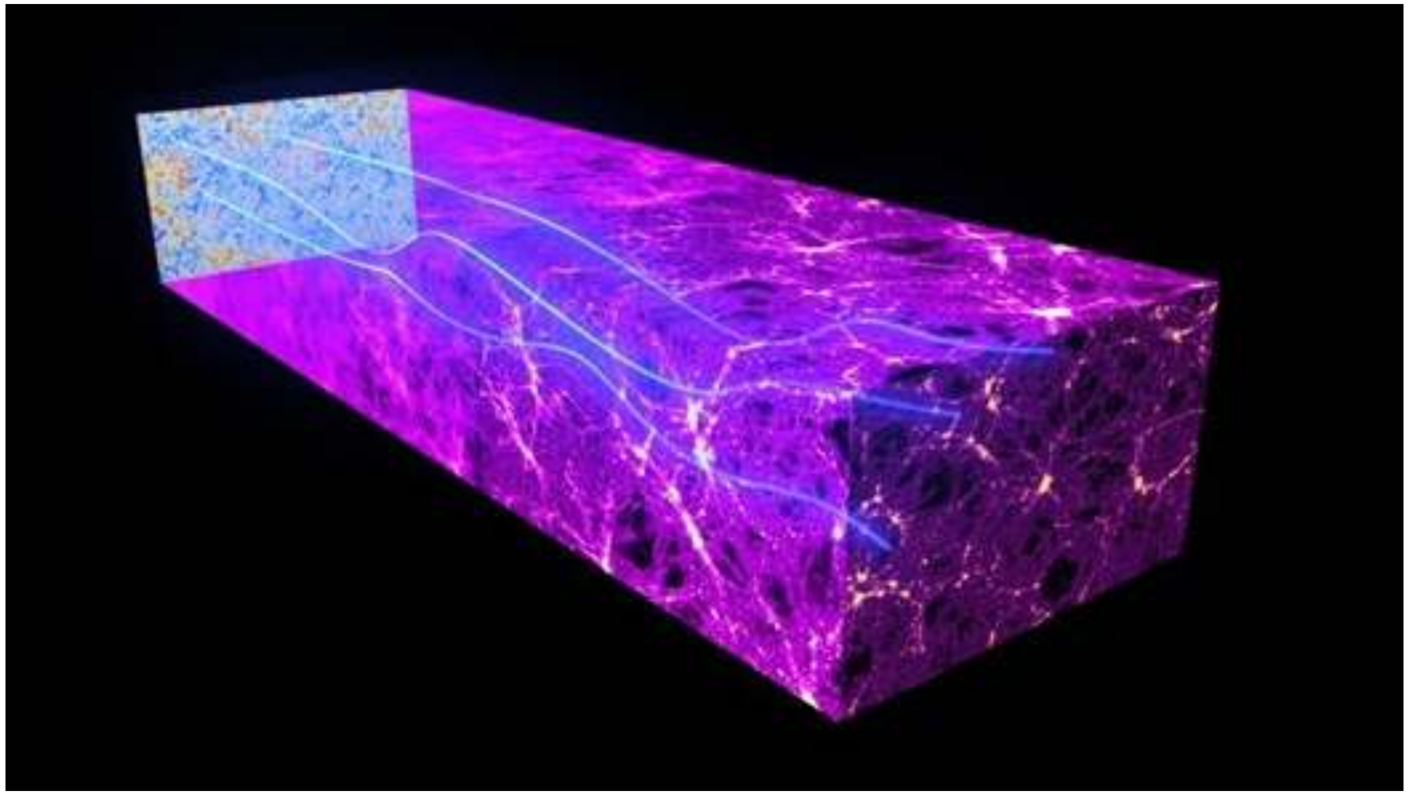
our local cosmic texture
$0.4<z<0.7$



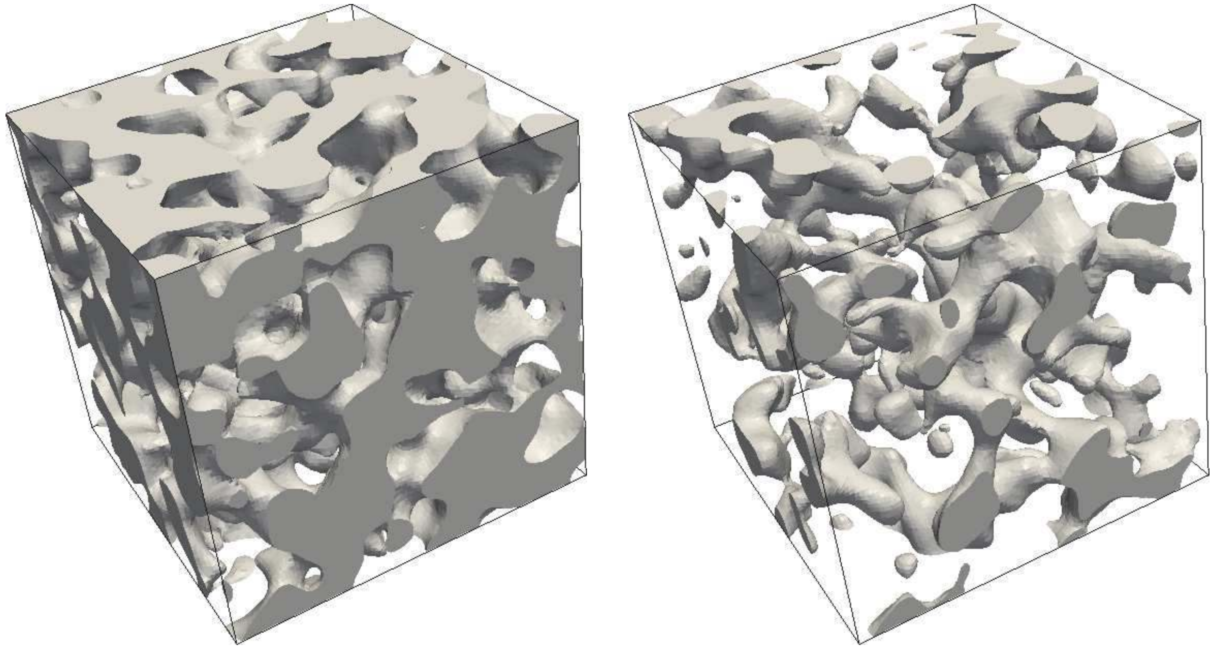
Turbulence flow
Los-Alamos lab



Martins & E. P. Shellard

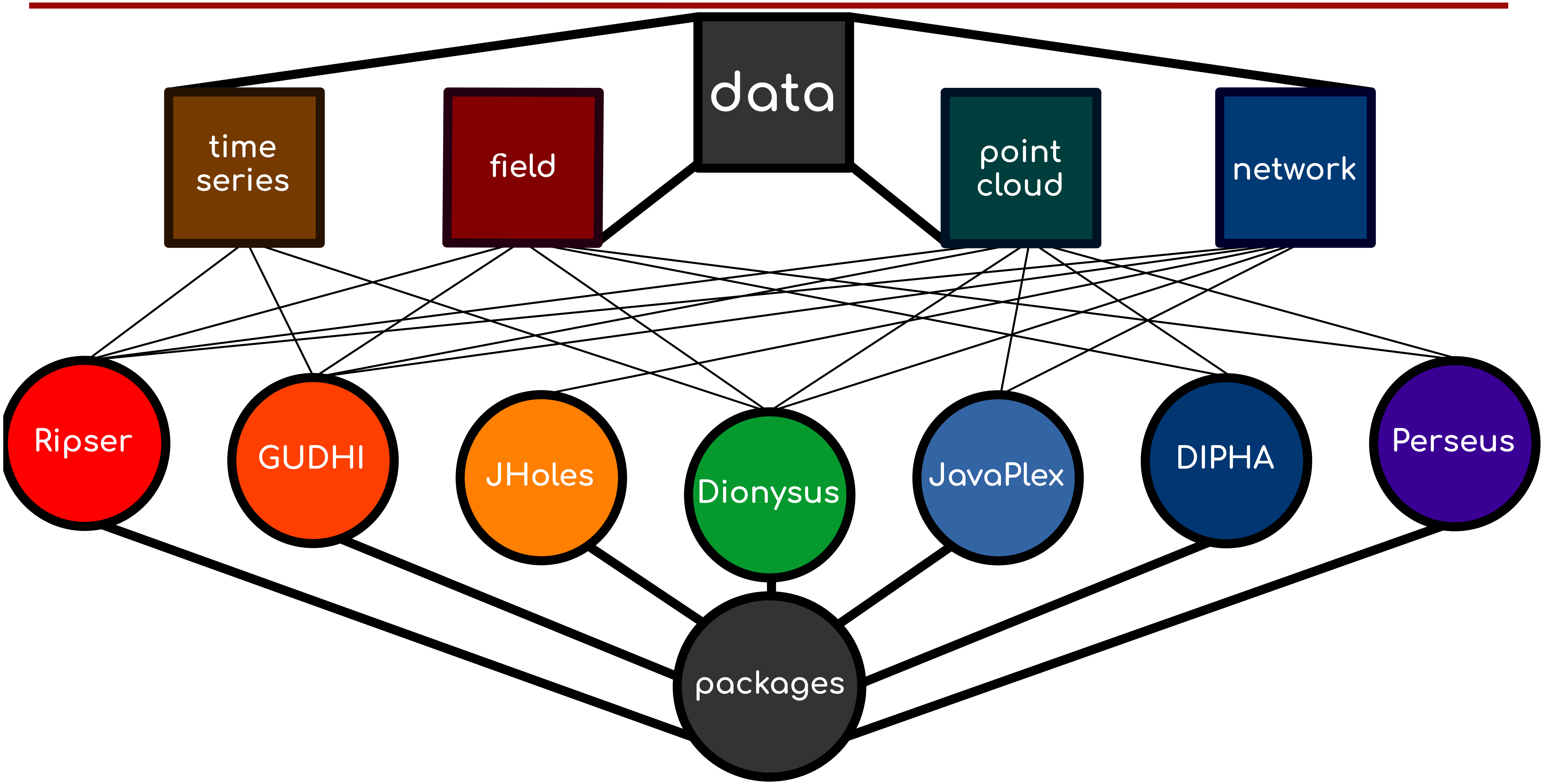


www.esa.int



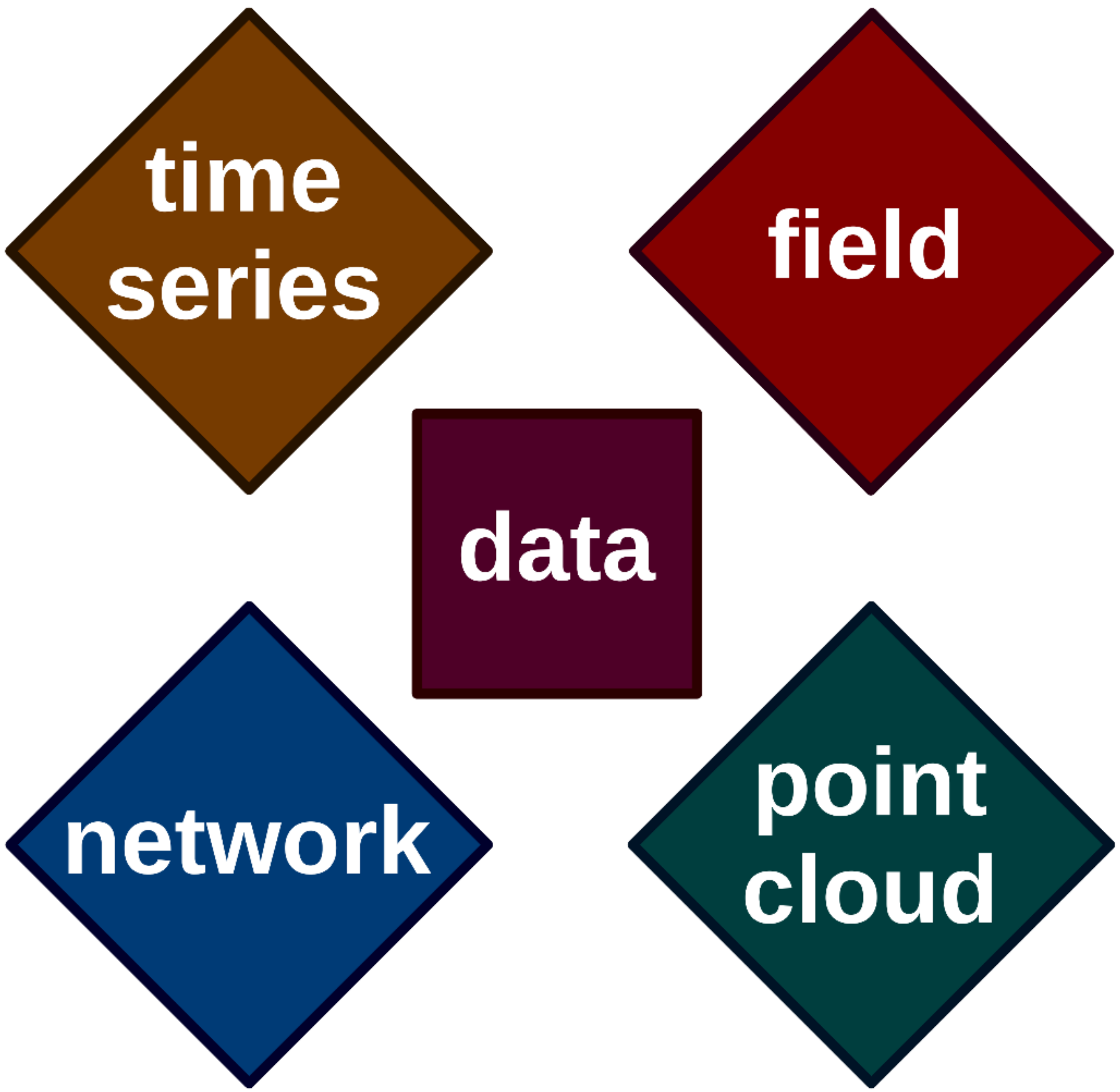
Emmanuel Roubin Thesis, 2013

PH Packages



http://ccg.sbu.ac.ir/tdaw/

Various data types



$$\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty)$$

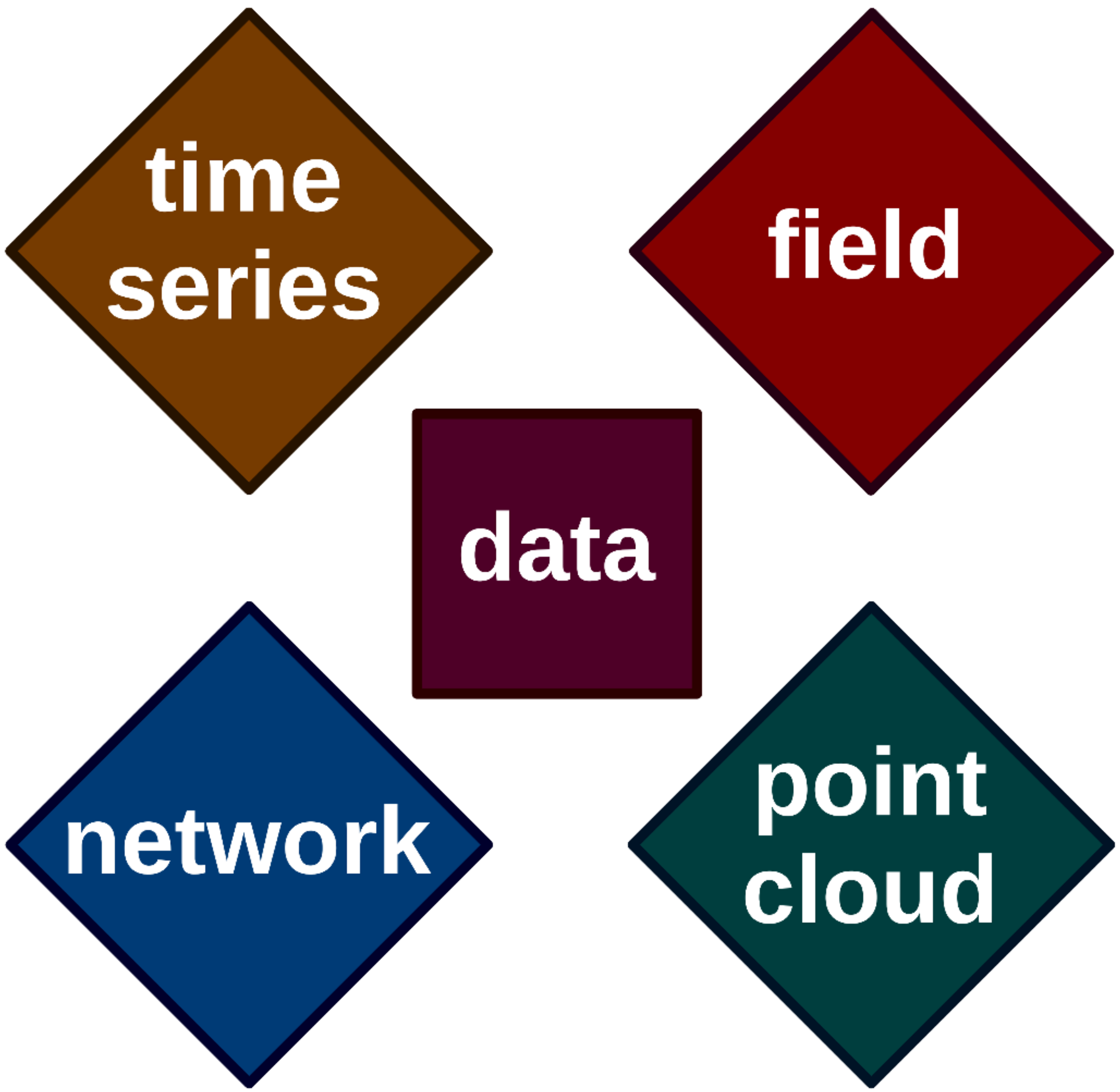
$$\mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty)$$

$$\vec{x} \equiv \Big(x(t_i)\Big)_{i=1}^{T}$$

$$\mathcal{F} = \Big\{ (t_i, x_i) \,\Big|\, t_i \in \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^+ \,,\, x_i \in X \subseteq \mathbb{R} \Big\}_{i=1}^{T} \subseteq \mathbb{R}^2$$

credit: Hossein Maasoumi, M.Sc. Thesis

Various data types



$$\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty)$$

$$\mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty)$$

$$\vec{x} \equiv \Big(x(t_i) \Big)_{i=1}^{T}$$

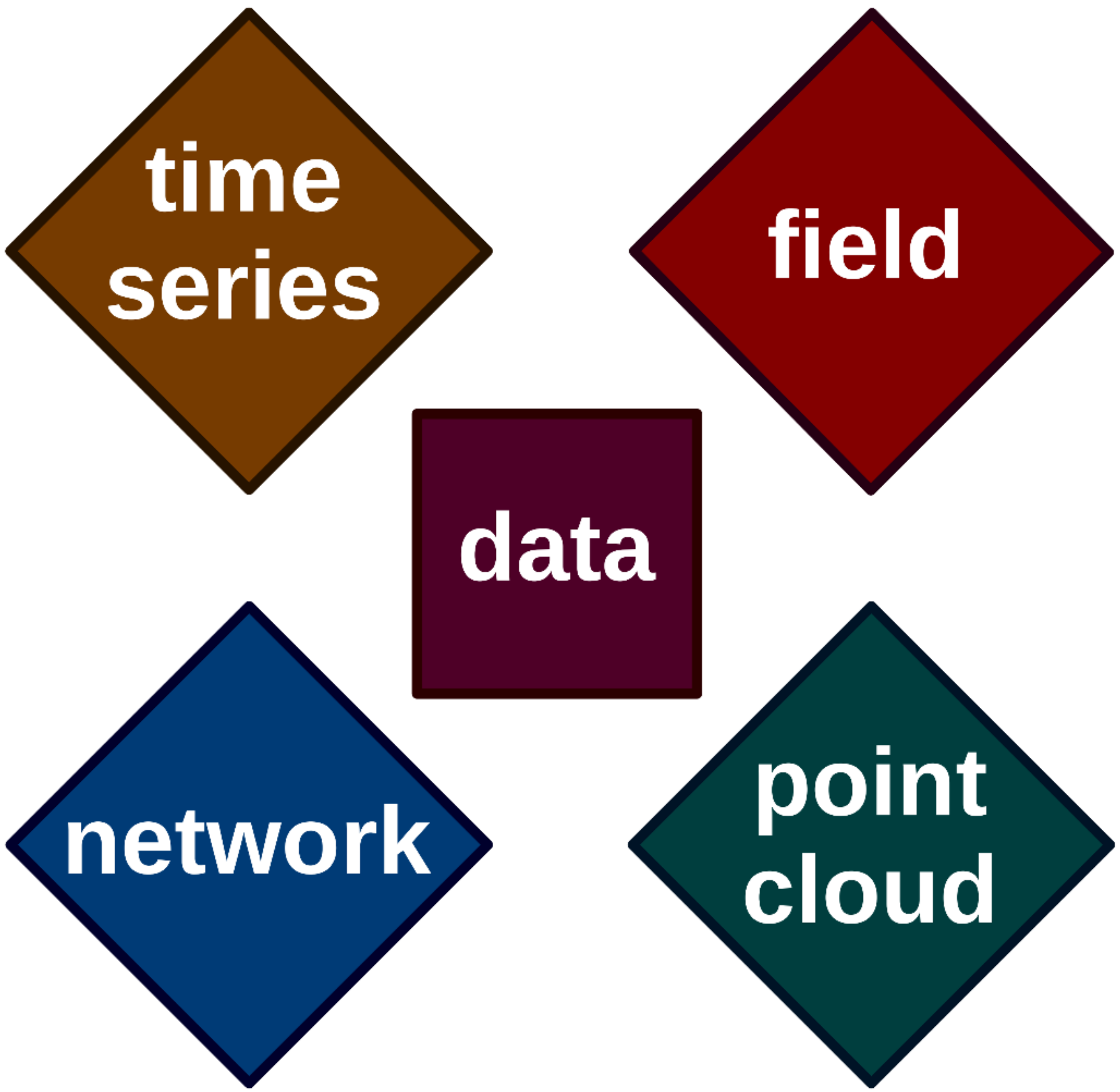
$$\mathcal{F} = \Big\{ (t_i, x_i) \,\Big|\, t_i \in \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^+ \,,\; x_i \in X \subseteq \mathbb{R} \Big\}_{i=1}^{T} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{F} : \Pi \to \mathbb{R}$$

$$\mathfrak{F} = \Big\{ \mathcal{F}_i \,\Big|\, \mathcal{F}_i : \Pi_i \to \mathbb{R} \,,\; \Pi_i \subseteq \mathbb{R}^D \Big\}_{i=1}^{N}$$

credit: Hossein Maasoumi, M.Sc. Thesis

Various data types



$$\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^{+} \equiv [0, +\infty)$$

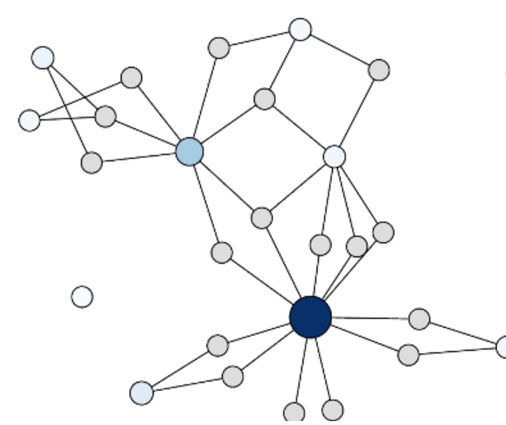
$$\mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty)$$

$$\vec{x} \equiv \Big(x(t_i)\Big)_{i=1}^{T}$$

$$\mathcal{F} = \Big\{(t_i, x_i) \,\Big|\, t_i \in \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^{+}\,,\; x_i \in X \subseteq \mathbb{R}\Big\}_{i=1}^{T} \subseteq \mathbb{R}^{2}$$

$$\mathcal{F} : \Pi \to \mathbb{R}$$

$$\mathfrak{F} = \Big\{\mathcal{F}_i \,\Big|\, \mathcal{F}_i : \Pi_i \to \mathbb{R}\,,\; \Pi_i \subseteq \mathbb{R}^{D}\Big\}_{i=1}^{N}$$



$$G = (V, E, w)$$

$$V = \Big\{v_i\Big\}_{i=1}^{N}$$

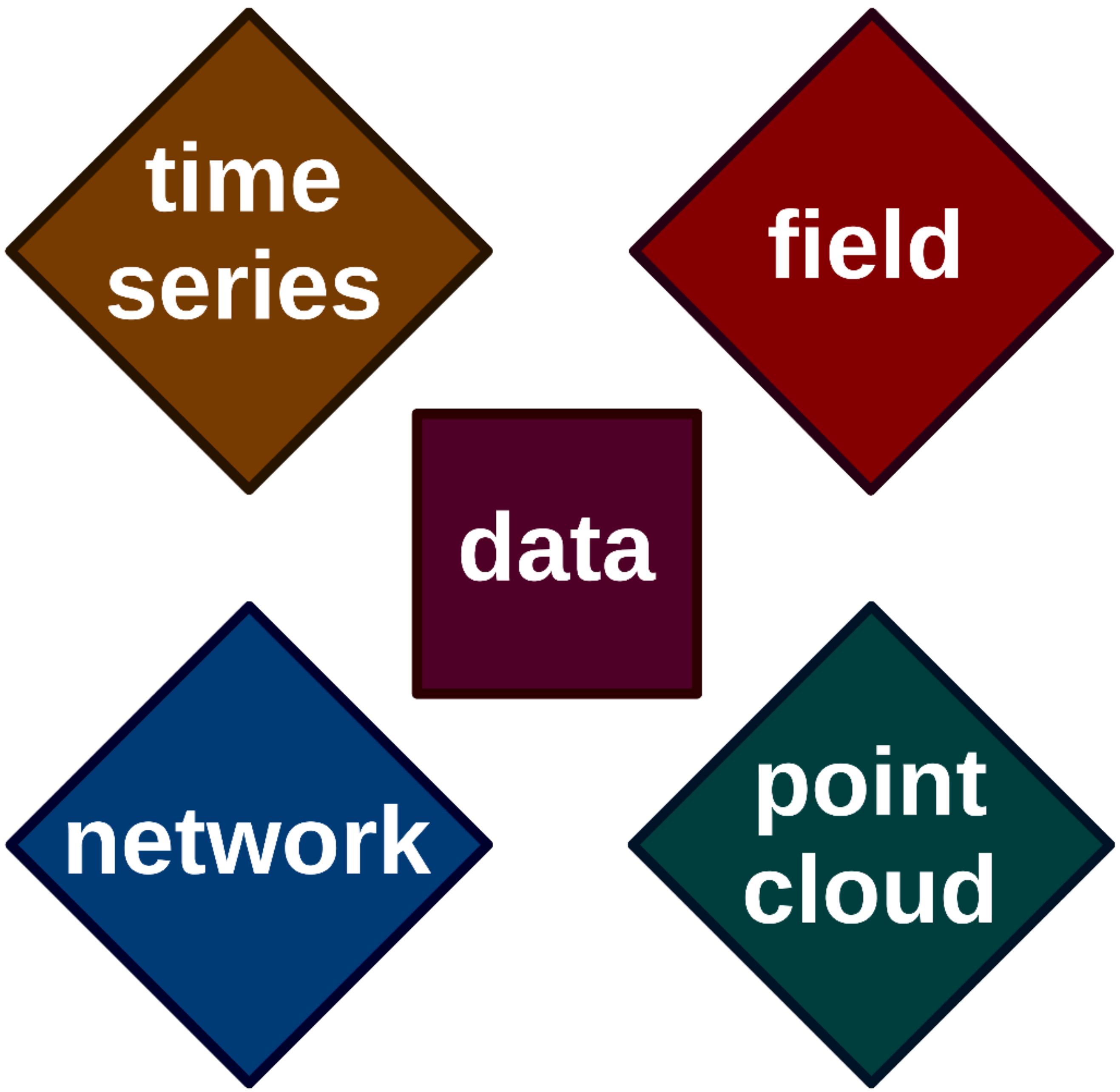
$$E = V \times V$$

$$w : E \to \mathbb{R}$$

$$w(e_{ij}) \equiv w((v_i, v_j)) = w_{ij}$$

credit: Hossein Maasoumi, M.Sc. Thesis

Various data types



$$\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty)$$

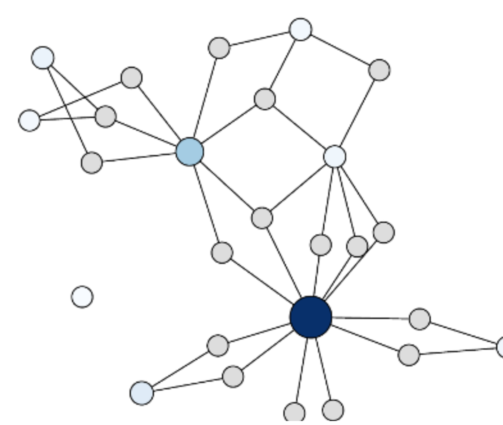
$$\mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty)$$

$$\vec{x} \equiv \Big(x(t_i)\Big)_{i=1}^{T}$$

$$\mathcal{F} = \Big\{ (t_i, x_i) \,\Big|\, t_i \in \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^+ \,,\, x_i \in X \subseteq \mathbb{R} \Big\}_{i=1}^{T} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{F} : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathfrak{F} = \Big\{ \mathcal{F}_i \,\Big|\, \mathcal{F}_i : \Pi_i \rightarrow \mathbb{R} \,,\, \Pi_i \subseteq \mathbb{R}^D \Big\}_{i=1}^{N}$$



$$G = (V, E, w)$$

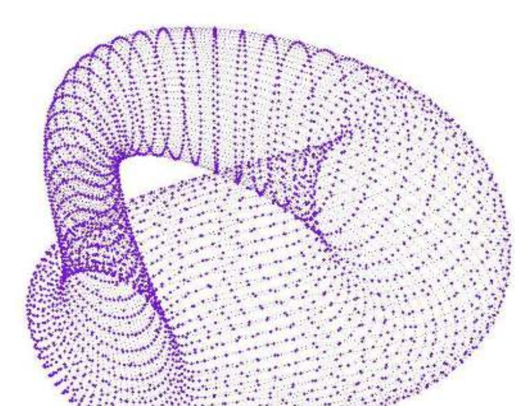
$$V = \Big\{ v_i \Big\}_{i=1}^{N}$$

$$E = V \times V$$

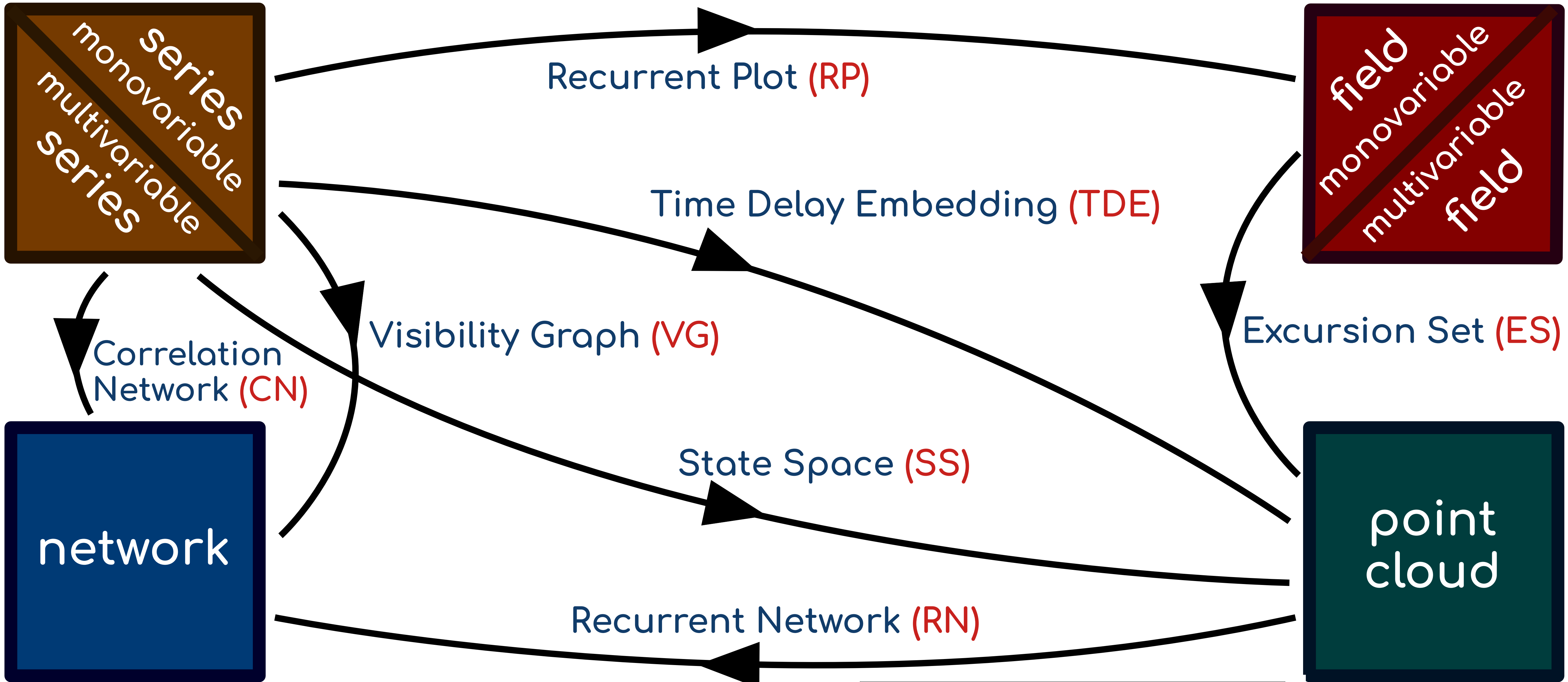
$$w : E \rightarrow \mathbb{R}$$

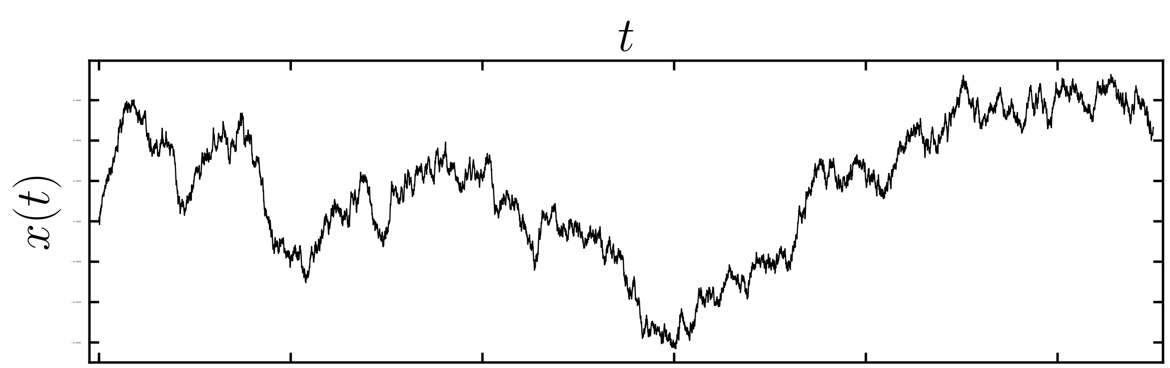
$$w(e_{ij}) \equiv w((v_i, v_j)) = w_{ij}$$

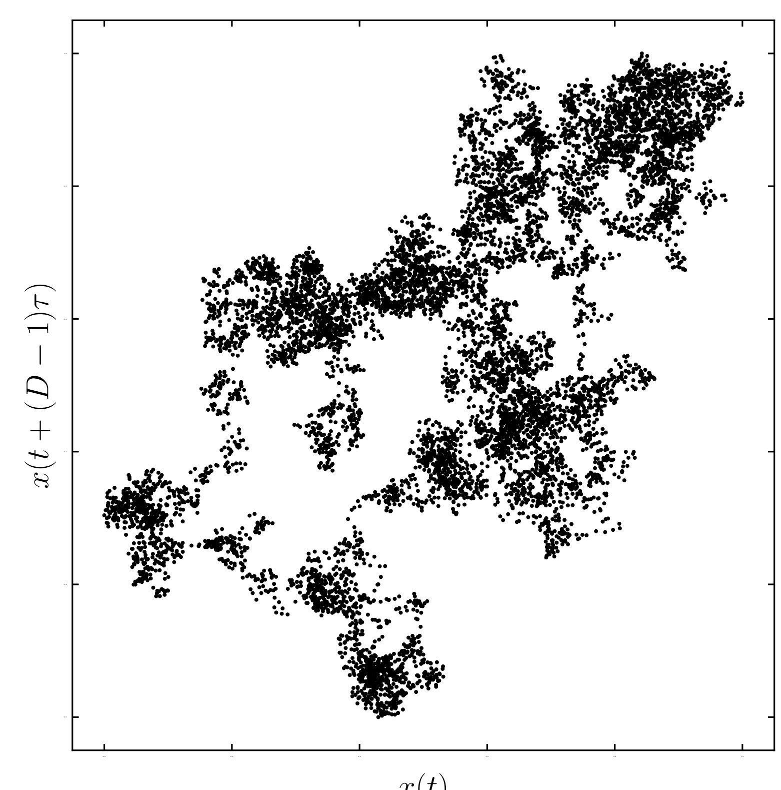
$$\mathbb{X} = \Big\{ x_i \,\Big|\, x_i \equiv (x_i^{(d)})_{d=1}^{D} \,,\, x_i^{(d)} \in \mathbb{R} \Big\}_{i=1}^{N \neq \infty}$$



Conversion methods







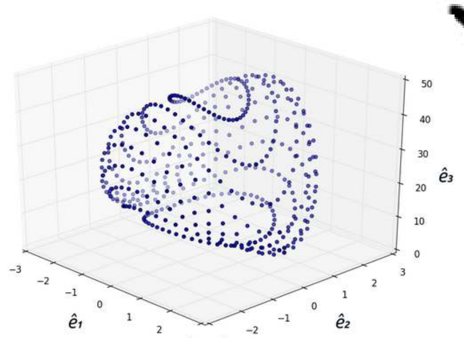
credit: Hossein Maasoumi, M.Sc. Thesis

http://ccg.sbu.ac.ir/tdaw/

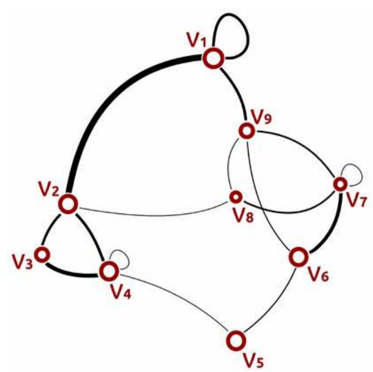
Persistent Homology (PH)

data $\mathfrak{D}$

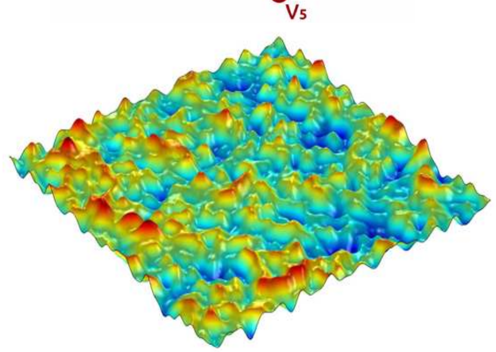
point cloud data (PCD)



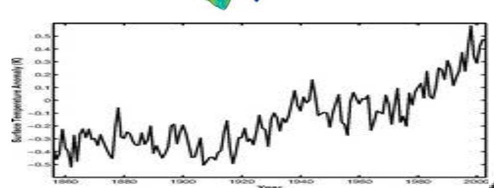
network (graph)



[random] scalar field



time series



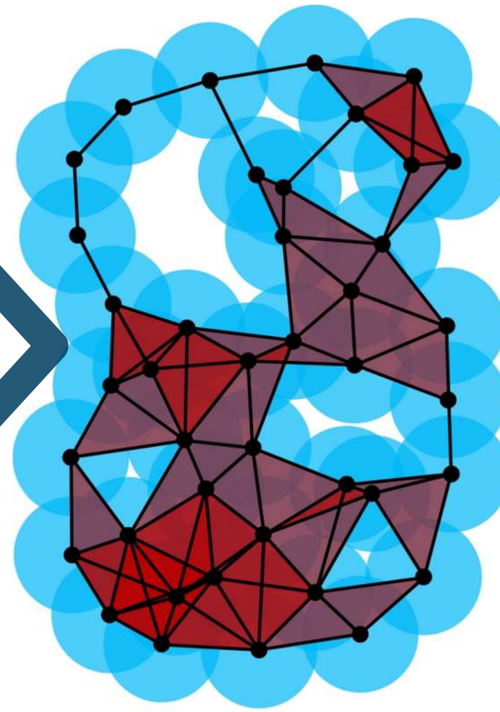
$(\psi(\mathbb{X}), f)$

triangulation

$\psi^{\mathfrak{D}}(\theta)$

weighted complex

topological approximation for topological space of data



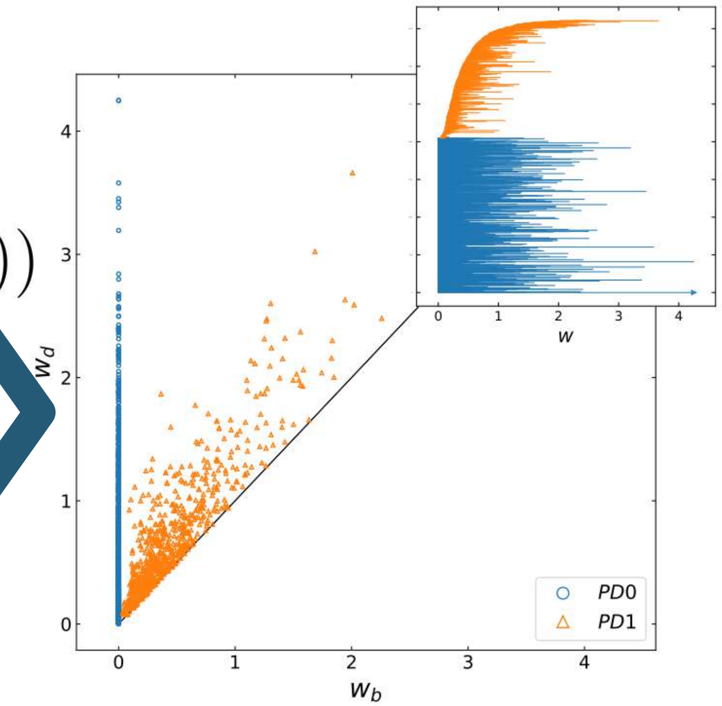
$\Phi(\psi^{\mathfrak{D}}(\theta))$

filtration

$PD_k(\psi^{\mathfrak{D}})$

persistent diagram

representation for topological evolution of data



persistence pairs (PPs) in kth persistent diagrams (PDs) indicate k-homology generators (**k-holes**) in filtration process.

credit: Hossein Maasoumi, M.Sc. Thesis

بخش دوم: خطاها و اقسام آن

مقادیر کمیت ها

در آزمایشها و البته شبیه سازی ها اصلاً انتظار نداریم که مقادیر واقعی کمیت های مورد علاقه را به دست آوریم. چرا؟؟؟؟؟

زیرا:

- محدودیت در وسایل اندازه گیری
- محدودیت در آزمایش گر
- محدودیت های ذاتی

پس مقدار واقعی غالباً مخفی است

حال چه باید کرد؟

- اولین قدم این است که بیاییم و انواع خطاها را بررسی کنیم
- روش تخمین خطاها
- روش گزارش خطاها (مفاهیم احتمال و بازه تطابق)

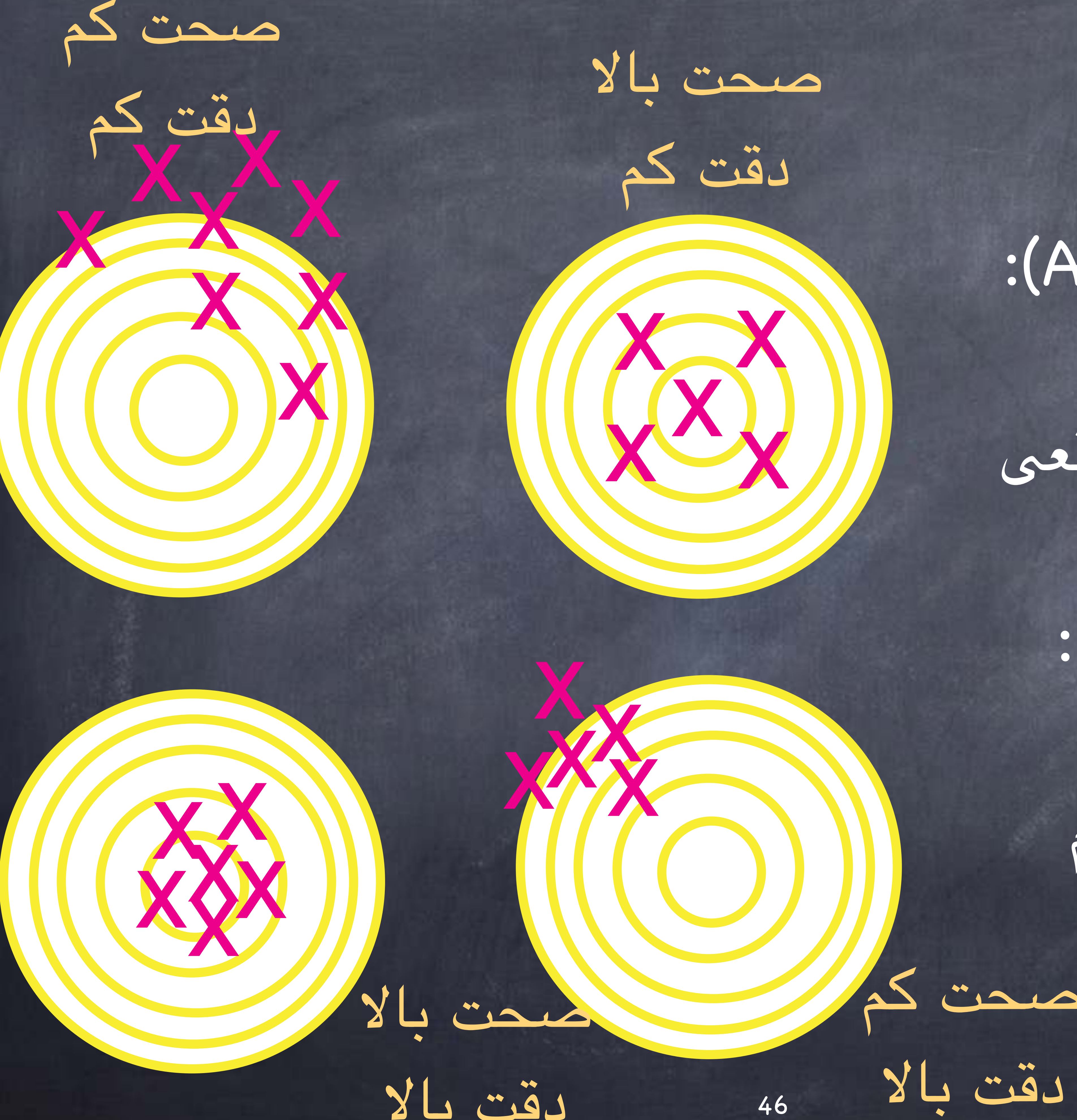
قبل از ورود به انجام موارد مذکور ابتدا چند مفهوم مهم را بررسی می کنیم

۱) صحت (Accuracy): معیاری برای بررسی تفاوت بین نتایج به دست آمده در آزمایشگاه و مقدار قابل قبول
۲) دقت (Precision): معیاری از تکرارپذیری نتایج را نشان می دهد.
۳) قابل اعتماد بودن (پایایی) (Reliability):
* وبسایتهای علمی قابل اعتماد تر هستند نسبت به سایر وبسایتها برای انتشار دستاوردهای علمی
* چقدر به روش تحقیق و نتایج آن اعتماد داریم؟
- بررسی به ازای حالت های حدی
- بررسی به ازای حالتهایی که قبلاً بررسی شده اند
- مطالعه مستقل از ابزار (درصورت مربوط بودن)
- بکار بردن آزمونهای همگرایی (در صورت مربوط بودن)
- استفاده از شبیه سازی (در صورت امکان)
- ارزیابی خطا
۴) معتبر بودن (روایی) (Validity):
اعتبار روش تحقیق و نتایج حاصل از آنها چقدر است؟ چارچوب نظری و محاسباتی و تجربی که در پیش گرفته ایم تا چه حد ما را به پاسخ فرضیه هایمان نزدیک می کند؟
- مطالعه و اشراف کامل نسبت به موضوع
- مناظره با صاحب نظران
- ارایه گزارشهای مدون در خصوص مراحل کار با سایر پژوهشگران

دو مفهوم مهم

صحت (Accuracy):
چقدر دسته اندازه گیری به مقدار واقعی نزدیک تر است

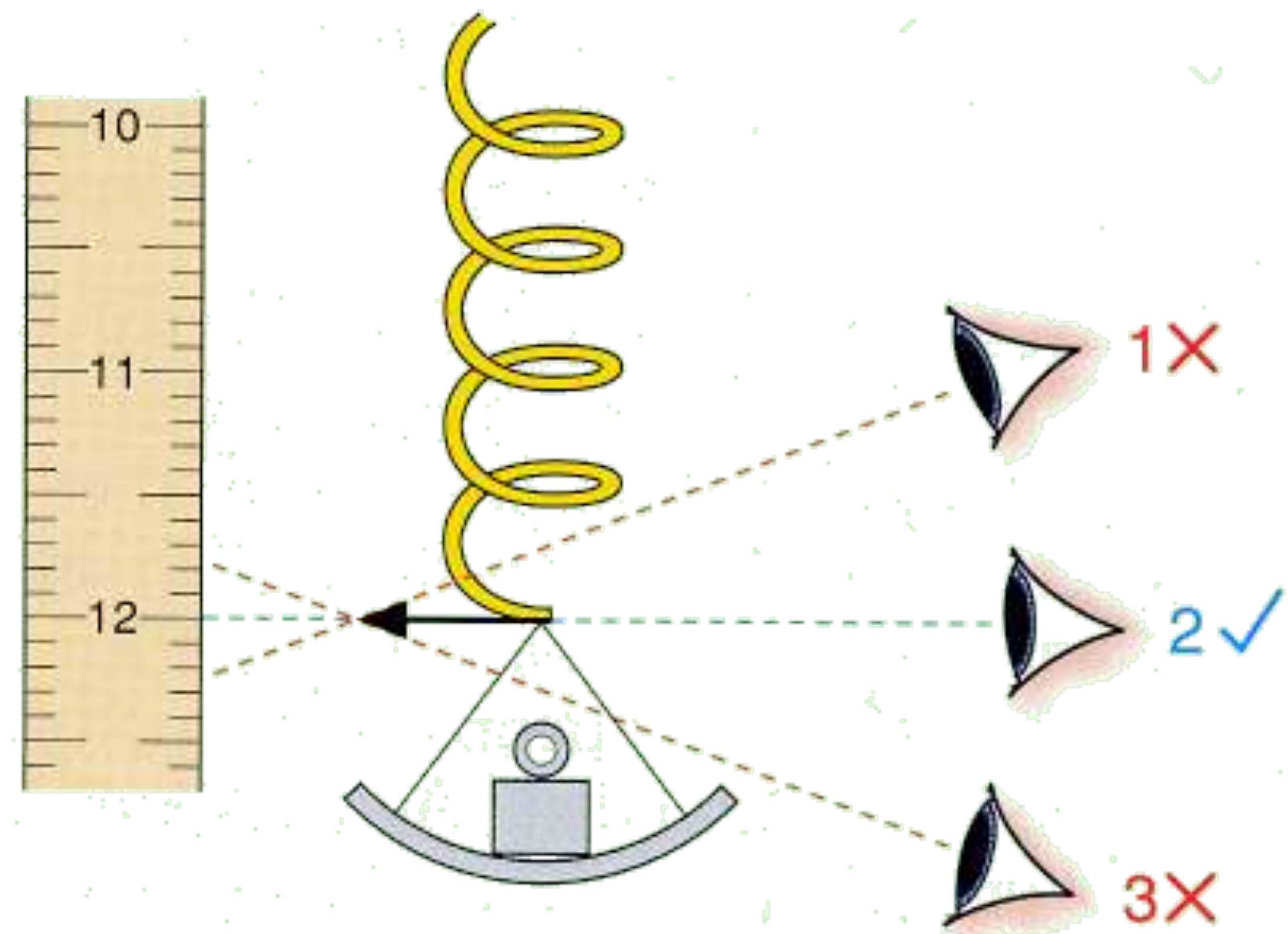
دقت (Precision):
چقدر دسته اندازه گیری نسبت به هم پراکندگی دارند



دسته بندی انواع خطاها

۱) خطاهای سیستماتیک
Systematic errors
۲) خطاهای کاتوره ای
Random errors
۳) خطاهای لپی
Blunder errors

نمونه هایی از خطاهای سیستماتیک



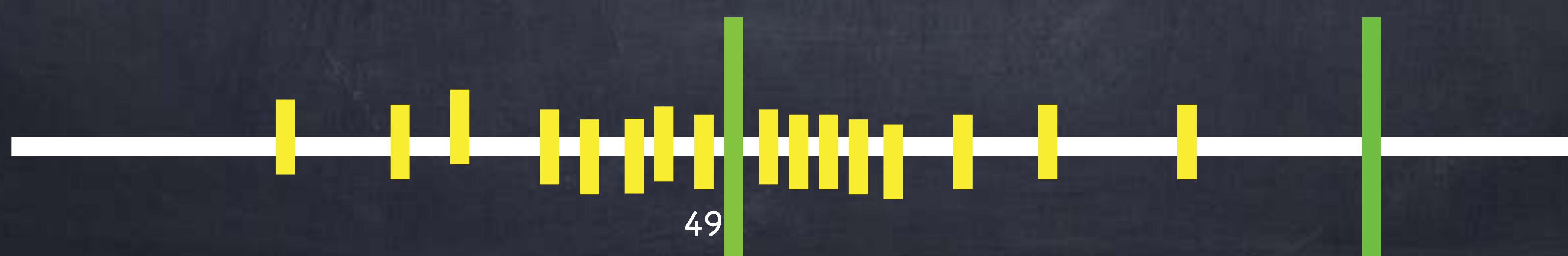
www.physics4u.co.uk

اندازه گیری بدون وجود خطای سیستماتیک

مقدار واقعی

اندازه گیری با وجود خطای سیستماتیک

مقدار واقعی



انواع خطاها در شبیه سازی

۱) خطای سراسری (Global)

۲) خطای گرد کردن (Rounding)

۳) خطای ناشی از مدل بکار گرفته شده

Global error

خطای موضعی

$$f(x) = f(x_0) + \Delta x f'(x = x_0) + \mathrm{O}(\Delta x^2)$$

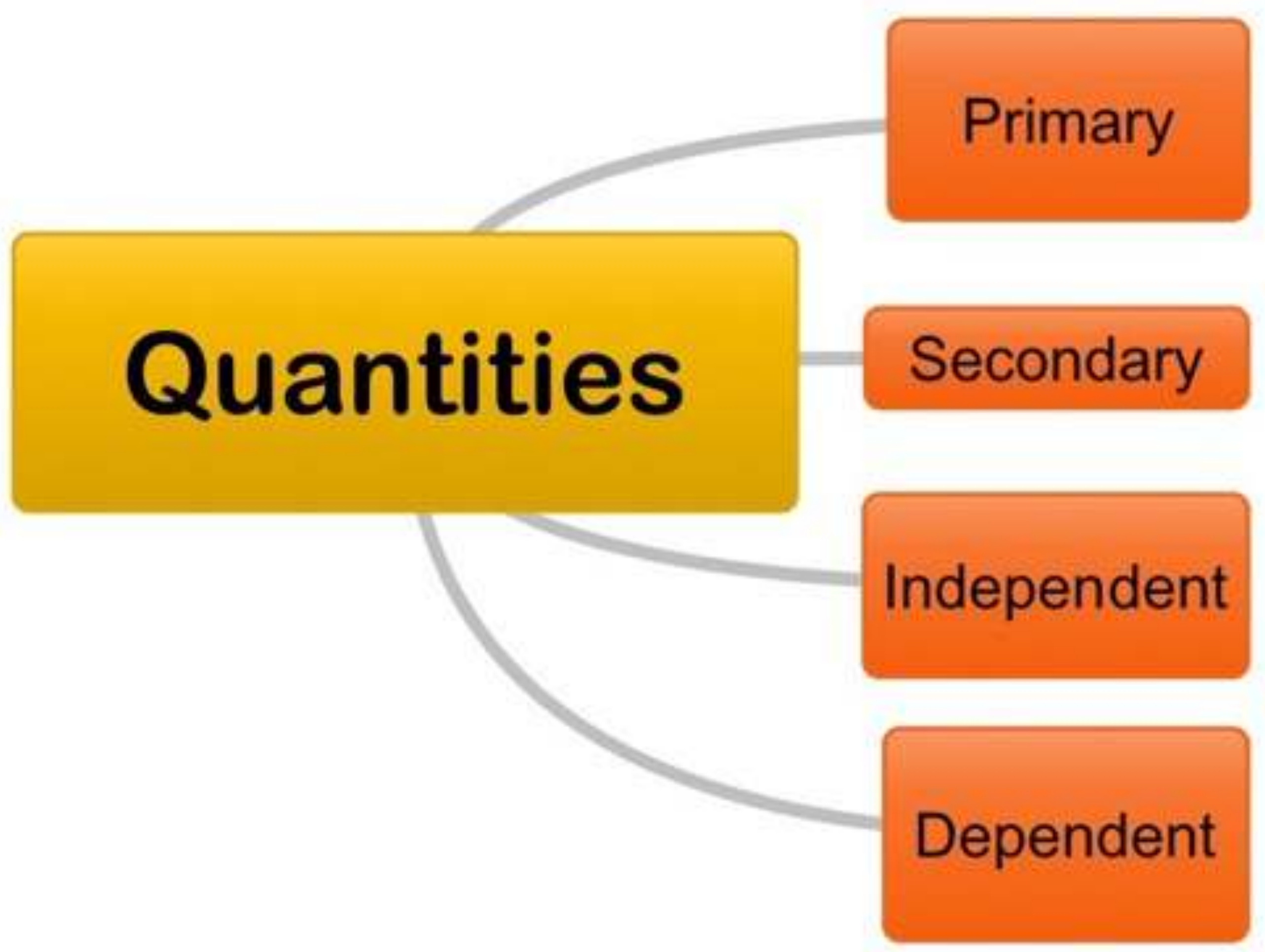
$$\Delta x = \frac{x_{final} - x_{initial}}{N} \longrightarrow N \sim \mathrm{O}(\Delta x^{-1})$$

$$N \times \mathrm{O}(\Delta x^2) = \mathrm{O}(\Delta x)$$

خطای سراسری

تا اینجا وجه های مختلف خطاها را شناختیم اکنون آماده ایم تا ساختار ریاضی مرتبط با آنها را بررسی کنیم

اقسام کمیت ها در آزمایش



گزارش خطا

$$\left\{x_1, x_2, \ldots, x_N\right\}$$

$$x = \overline{x} \pm \sigma_m \qquad x = \overline{x}\,^{+\sigma_m^+}_{-\sigma_m^-}$$

تحلیل متقارن

تحلیل نامتقارن

به سبب وابستگی غیر خطی

the 68% central confidence level interval

محاسبه خطا ۱

$\{x_{ij}\}$ $\quad i = 1 \dots M$ شماره آزمایش

$\qquad\quad\;\; j = 1 \dots N$ عضو در هر دسته اندازه‌گیری

$$\underbrace{e_{ij} = x_{ij} - X}$$ ← مقدار واقعی کمیت

خطا در j امین اندازه‌گیری

از i امین دسته اندازه‌گیری

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_{ij} - X)^2 \equiv e_i^2$$ اندازه بردار خطا در دسته i ام

Standard deviation: خطا در یک اندازه‌گیری → $\sigma^2 = \langle e_{ij}^2 \rangle_{ij}$

$$x_{ij} \longrightarrow x_{ij} \pm \sigma_i$$

محاسبه خطا ۲

مجموعه‌ای که حاوی مقادیر متوسط هر دسته اندازه‌گیری است

$$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_M\}$$

$$E_i = \bar{x}_i - X = \frac{1}{N}\sum_j (x_{ij} - X) = \frac{1}{N}\sum_j e_{ij}$$

$$E_i = \langle e_{ij} \rangle_j$$

$$E_i^2 = \frac{1}{N^2}\sum_j e_{ij}^2 + \underbrace{\frac{1}{N^2}\sum_j {\sum_k}' e_{ij}\, e_{ik}}$$

می‌توان از این جمله صرف‌نظر کرد در مقایسه با جمله اول

$$E_i^2 = \frac{1}{N}\,\frac{1}{N}\sum_j e_{ij}^2 = \frac{\sigma_i^2}{N}$$

$$\sigma_m^2 \equiv \langle E_i^2 \rangle_i = \frac{\langle \sigma_i^2 \rangle}{N} = \frac{\sigma^2}{N}$$

$$\boxed{\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \longrightarrow \bar{x} \pm \sigma_m$$

دو مشکل مهم

۱) مقدار واقعی معلوم نیست (X)
۲) فقط یک پیکربندی داریم

$$
\begin{aligned}
d_{ij} &\equiv x_{ij} - \bar{x}_i = e_{ij} - E_i \\
e_{ij} &\equiv x_{ij} - X, \qquad E_i \equiv \bar{x}_i - X \\
S_i^2 &\equiv \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} d_{ij}^2 \\
S_i^2 &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e_{ij}^2 - \frac{2E_i}{N}\sum_{j=1}^{N} e_{ij} + E_i^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e_{ij}^2 - E_i^2 \\
&= \sigma_i^2 - E_i^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle S_i^2 \rangle &= \langle \sigma_i^2 \rangle - \langle E_i^2 \rangle \\
&= \sigma^2 - \sigma_m^2 \qquad \sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{N} \\
\sigma^2 &= \frac{N}{N-1}\langle S_i^2 \rangle \qquad \sigma_m^2 = \frac{1}{N-1}\langle S_i^2 \rangle \\
S &\sim \langle S_i^2 \rangle \\
\sigma &\sim \left(\frac{N}{N-1}\right)^{1/2} S \\
\sigma_m &\sim \left(\frac{1}{N-1}\right)^{1/2} S \\
\sigma &\sim \left(\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(x_j - \bar{x})^2\right)^{1/2} \\
\sigma_m &\sim \left(\frac{1}{(N-1)N}\sum_{j=1}^{N}(x_j - \bar{x})^2\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

گزارش خطا

$$\left\{x_1, x_2, \ldots, x_N\right\}$$

$$x = \bar{x} \pm \sigma_m$$

$$\sigma_m^2 = \sigma_{stat.}^2 + \sigma_{sys}^2$$

the 68% central confidence level interval

درصد خطای نسبی

این خطا در واقع بدون بعد است و معیاری از قابل اعتماد بودن اندازه گیری ها است

$$\Delta_x^{(R)}\% \equiv \frac{\sigma_m}{\bar{x}} \times 100$$

> 10 اندازه گیری ها بدون دقت کافی است

< 10 اندازه گیری ها قابل قبول است

$< 1 \sim 2$ اندازه گیری ها خیلی خوب است.
این حالت معمولاً در آزمایشگاه های معمولی
به دست نمی آید

داستانی در مورد ارقام بامعنا
Significance Number

0.001	1
0.01	1
1.0	2
1.00	3
35,000	2

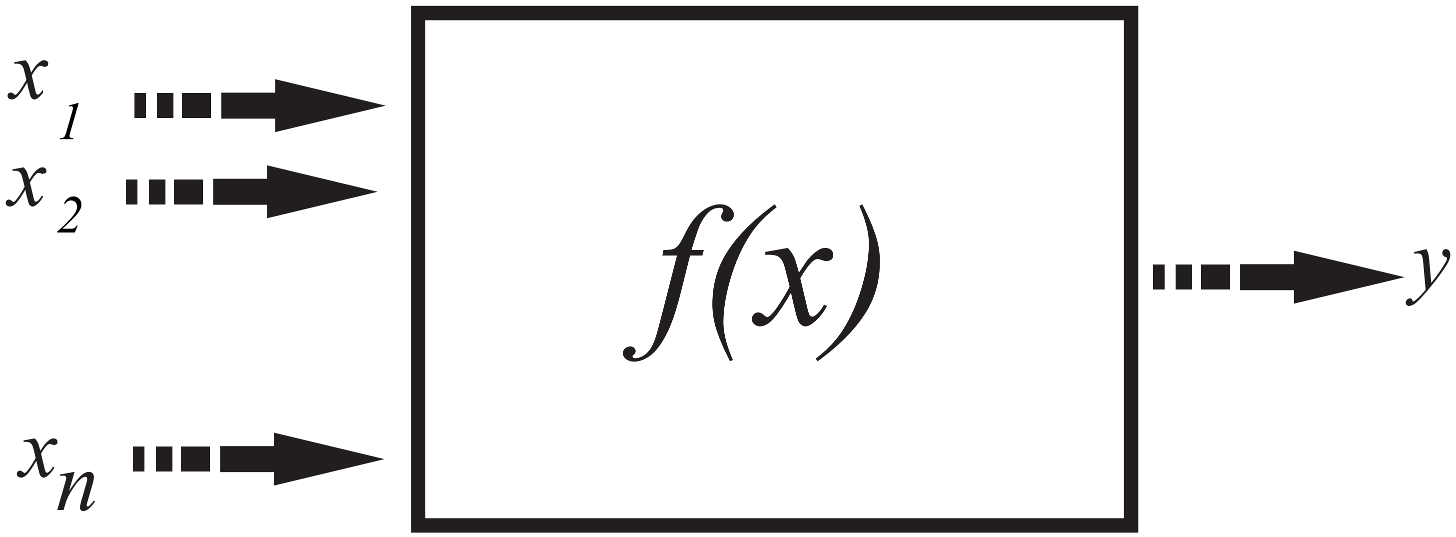
۱) در جمع و تفریق کمترین اعشار

۲) در ضرب و تقسیم کمترین رقم بامعنا

۳) تعداد ارقام بامعنای اعداد خاص که توسط شرایط آزمایشگاه یا شبیه سازی تعیین می شوند بی نهایت است

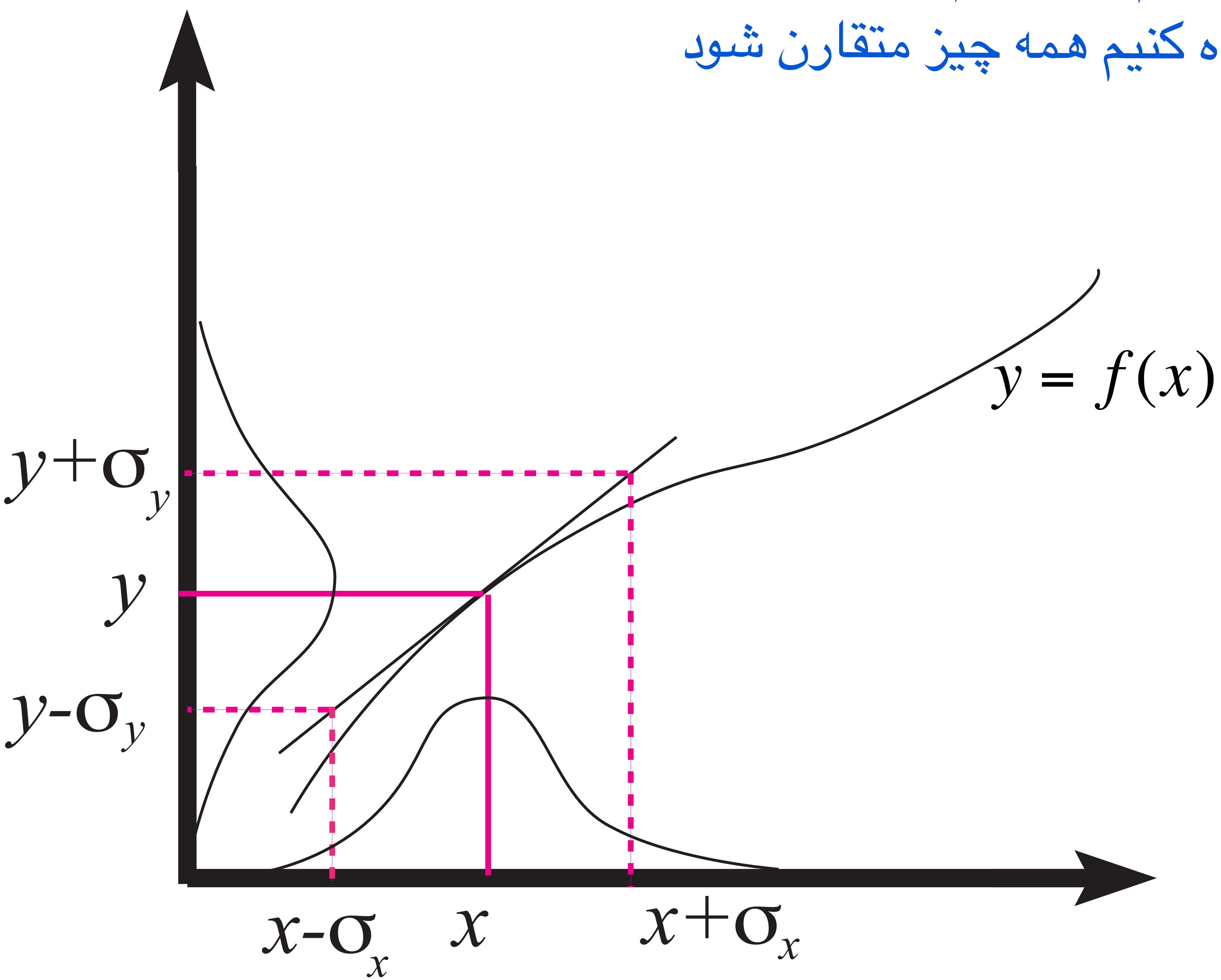
Factor	Name	Symbol	Factor	Name	Symbol
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10-12	pico	p
10^{6}	mega	M	10-15	femto	f
10^{3}	kilo	k	10-18	atto	a
10^{2}	hecto	h	10-21	zepto	z
10^{1}	deka	da	10-24	yocto	y

تا اینجا خطای یک کمیت که مستقیماً اندازه گیری شده است را بررسی کردیم
اما سوال: خطای کمیت های ثانویه چگونه بررسی می شوند؟



انتشارگر خطا

به دنبال این هستیم که نشان دهیم خطای x چگونه به y منتقل میشود. واضح است که اگر از خود تابع استفاده کنیم می بینیم که خطا روی y متقارن نخواهد بود ولی اگر از تابع مماس استفاده کنیم همه چیز متقارن شود



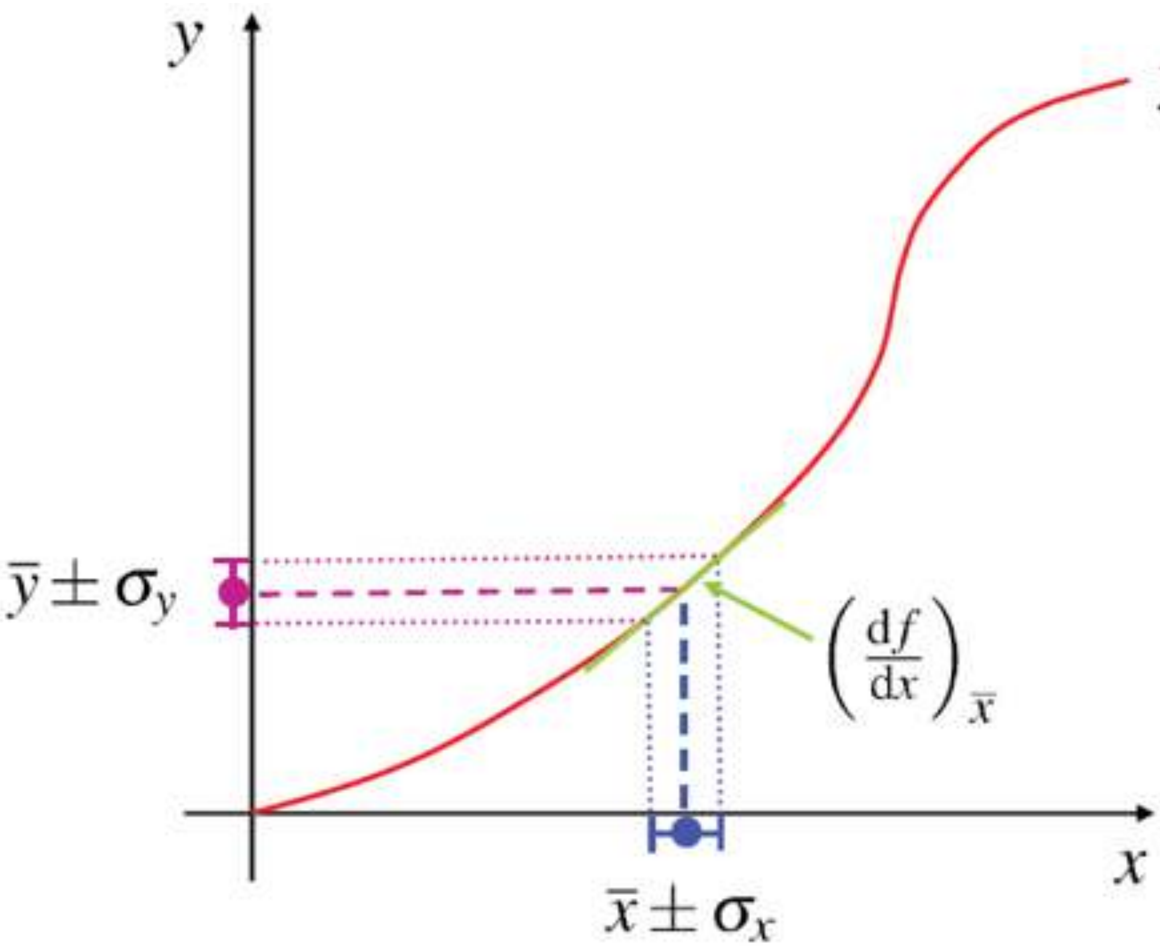
انتشارگر برای تک متغیره

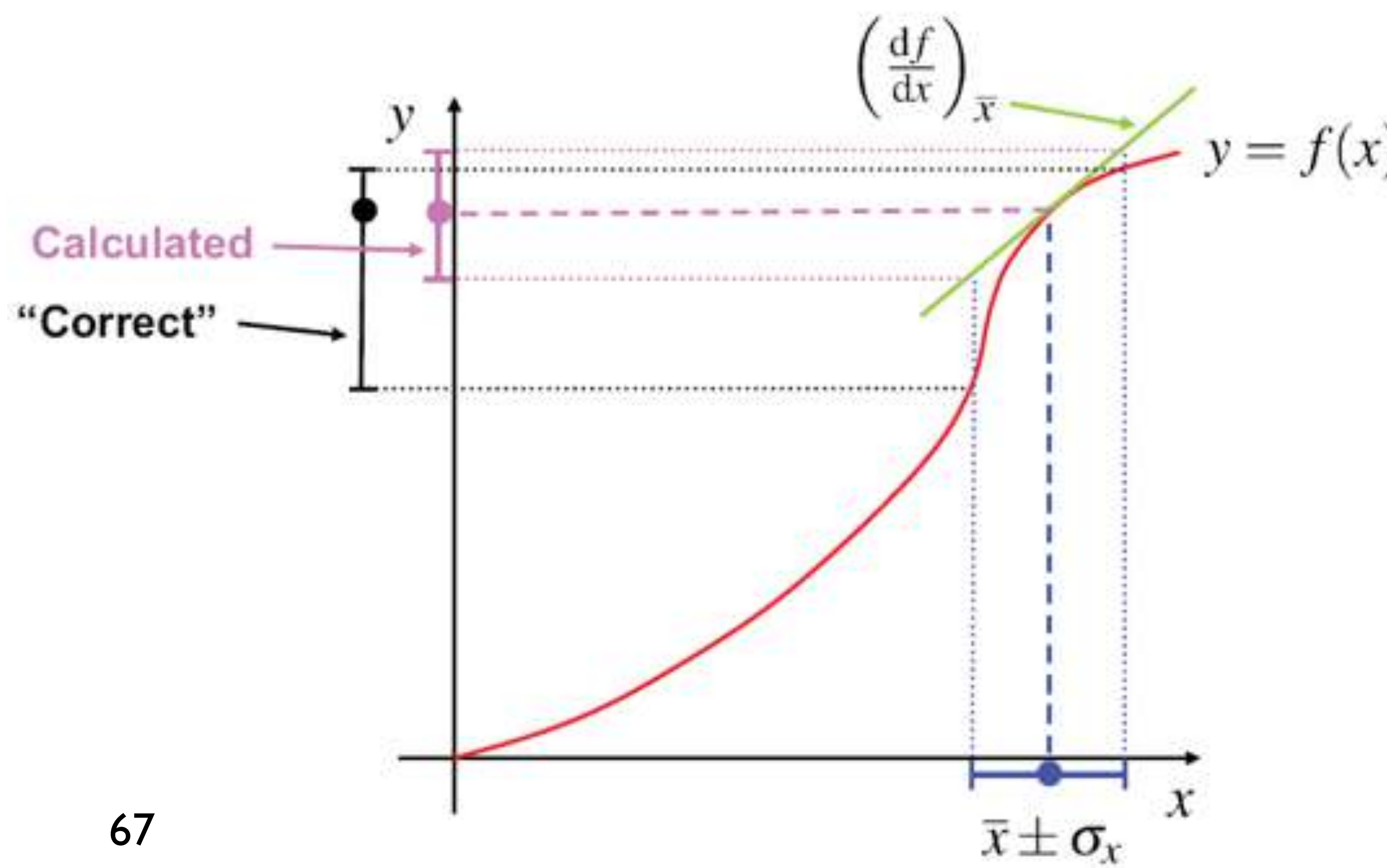
$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right) + \mathrm{O}(\Delta x^2)$$

$$\sigma_{my}^2 \equiv \left\langle \left[f(x) - f(x_0)\right]^2 \right\rangle = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_{mx}\right)^2$$

توجه شود که در این جا فرض کردیم که خطاها به صورت گوسی و متقارن هستند

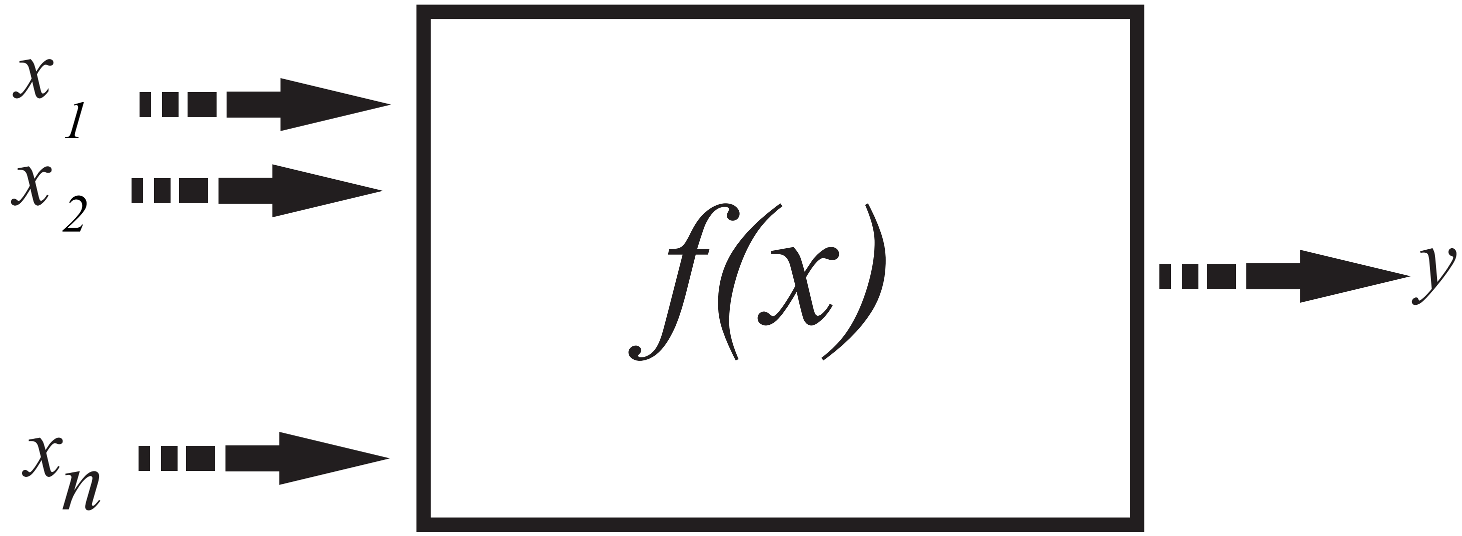
عدم استفاده از خطا در مرتبه دوم بسط





M.A. Thomson

انتشارگر خطا برای چند متغیره



$$f(x_1,\dots,x_n) = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i + O(\Delta^2) = f_0 + \Re\Delta X$$

$$\sigma_{mf}^2 \equiv \left\langle \left[f(x_1,\dots,x_n) - f_0 \right]^2 \right\rangle = \Re C \Re^T = \sum_j^n \sum_i^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\sigma_{mij}^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{mii}^2 + \sum_i^n \sum_{j\neq i}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\sigma_{mij}^2$$

$$COV \to C \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{m11}^2 & \cdots & \sigma_{m1n}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{mn1}^2 & \cdots & \sigma_{mnn}^2 \end{pmatrix} \quad \Re \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$\sigma_{mf}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\sigma_{m11}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\sigma_{m22}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\sigma_{m33}\right)^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\left\langle \left[x_1 - x_{10}\right]\left[x_2 - x_{20}\right]\right\rangle + \dots$$

چند نمونه

$$y = ax \pm bz \quad \rightarrow \quad \sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_z^2 \pm 2ab\sigma_{xz}^2$$

$$y = axz \quad \rightarrow \quad \sigma_y^2 = a^2z^2\sigma_x^2 + a^2x^2\sigma_z^2 + 2a^2xz\sigma_{xz}^2$$

$$y = \pm\frac{ax}{z} \quad \rightarrow \quad \sigma_y^2 = \left[\frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_z^2}{z^2} - 2\frac{\sigma_{xz}^2}{xz}\right]y^2$$

$$y = a\ln(\pm bx) \quad \rightarrow \quad \sigma_y^2 = a^2\frac{\sigma_x^2}{x}$$

متوسط و خطا در اندازه گیری های وزن دار متقارن

در واقع اکنون با این سوال مواجه هستیم که کمیت ثانویه که همان میانگین است بر حسب کمیت های اولیه چگونه به دست می آید؟

احتمال اینکه مقدار متوسط x به دست آید

$$x_1 \pm \sigma_1$$

$$x_2 \pm \sigma_2$$

$$x_3 \pm \sigma_3$$

.

.

.

$$x_n \pm \sigma_n$$

$$P(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma_i^2} \right)$$

$$\frac{dP(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0 \rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i} \right)^2 \rightarrow \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \right)}$$

۱) فرض شده که اندازه گیری های مختلف مستقل از هم باشند

۲)تابع توزیع هر اندازه گیری حول مقدار متوسط گوسی باشد(حد مرکزی)

متوسط و خطا در اندازه گیری های وزن دار نامتقارن

$$x(1)^{+\sigma_1^+}_{-\sigma_1^-}$$

$$x(2)^{+\sigma_2^+}_{-\sigma_2^-}$$

$$x(3)^{+\sigma_3^+}_{-\sigma_3^-}$$

.

.

.

$$x(n)^{+\sigma_n^+}_{-\sigma_n^-}$$

$$P(\overline{x}) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i;\sigma_i^{(\pm)},\overline{x})$$

$$\frac{dP(\overline{x})}{d\overline{x}} = 0$$

$$\sigma_{\overline{x}}^{(\pm)2} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{(\pm)2}\left(\frac{\partial\overline{x}}{\partial x_i}\right)^2$$

۱) فرض شده که اندازه گیری های مختلف مستقل از هم باشند

۲) تابع توزیع هر اندازه گیری حول مقدار متوسط متقارن نیست. در صورتی که این تابع توزیع معلوم باشد با بیشینه کردن تابع احتمال درست نمایی و استفاده از تابع انتشارگر خطا به نتیجه دست پیدا می کنیم.

مثال: فرض کنید که در یک آزمایش دو کمیت به صورت زیر محاسبه شده اند. می خواهیم مقدار متوسط و انحراف معیار را برای کمیت ثانویه محاسبه کنیم ضمناً تابع توزیع احتمال این کمیت های اولیه گوسی است.

$$z = g(x,y) \qquad \& \qquad x = x_{0}{}^{+\sigma_x^+}_{-\sigma_x^-} \quad , \quad y = y_{0}{}^{+\sigma_y^+}_{-\sigma_y^-}$$

$$z = z_{0}{}^{+\sigma_z^+}_{-\sigma_z^-} \quad , \quad z_0 = ? \quad \sigma_z^+ = ? \quad \sigma_z^- = ?$$

$$\langle z \rangle = \langle g(x,y) \rangle = \int dx\,dy \; g(x,y)\, p(x,y)$$

$$\text{for} \begin{cases} p(x,y) = p(x)\,p(y) \\ p(x) = N(x, x_0, \sigma_x) \\ p(y) = N(y, y_0, \sigma_y) \end{cases}$$

$$\langle z \rangle = \int dx\,dy \; g(x,y)\, N(x, x_0, \sigma_x)\, N(y, y_0, \sigma_y)$$

$$\text{if} \quad g(x,y) = x + y$$

$$\langle z \rangle = x_0 + y_0$$

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \sigma_x \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{\substack{y=y_0 \\ x=x_0}} \sigma_y \right)^2$$

$$\boxed{\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

تابع درست نمایی(Likelihood)

این تابع لزوماً برای کمیت های آزاد به صورت تحلیلی معلوم نیست ولی برای آن مدلهایی پیشنهاد شده است arXiv:physics/0406120

اگر با کمک یک مشاهده به دسته اندازه گیری مشخص رسیدیم و بخواهیم از آن به کمیت ثانویه ای برسیم در این صورت تابع درست نمایی کمیت ثانویه در حالت کلی مستقل از ارتباط بین کمیت های اولیه و ثانویه به صورت زیر خواهد بود:
در این عبارت فقط فرض شده که متغیرهای اولیه مستقل از هم باشند

$$\ell(z) = \prod_{i=1}^{n} \ell_i(x_i) \qquad and \qquad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\ell_i(x_i) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \bar{x}_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

در حالت خاص و با توجه به قضیه حد مرکزی می توان نوشت:

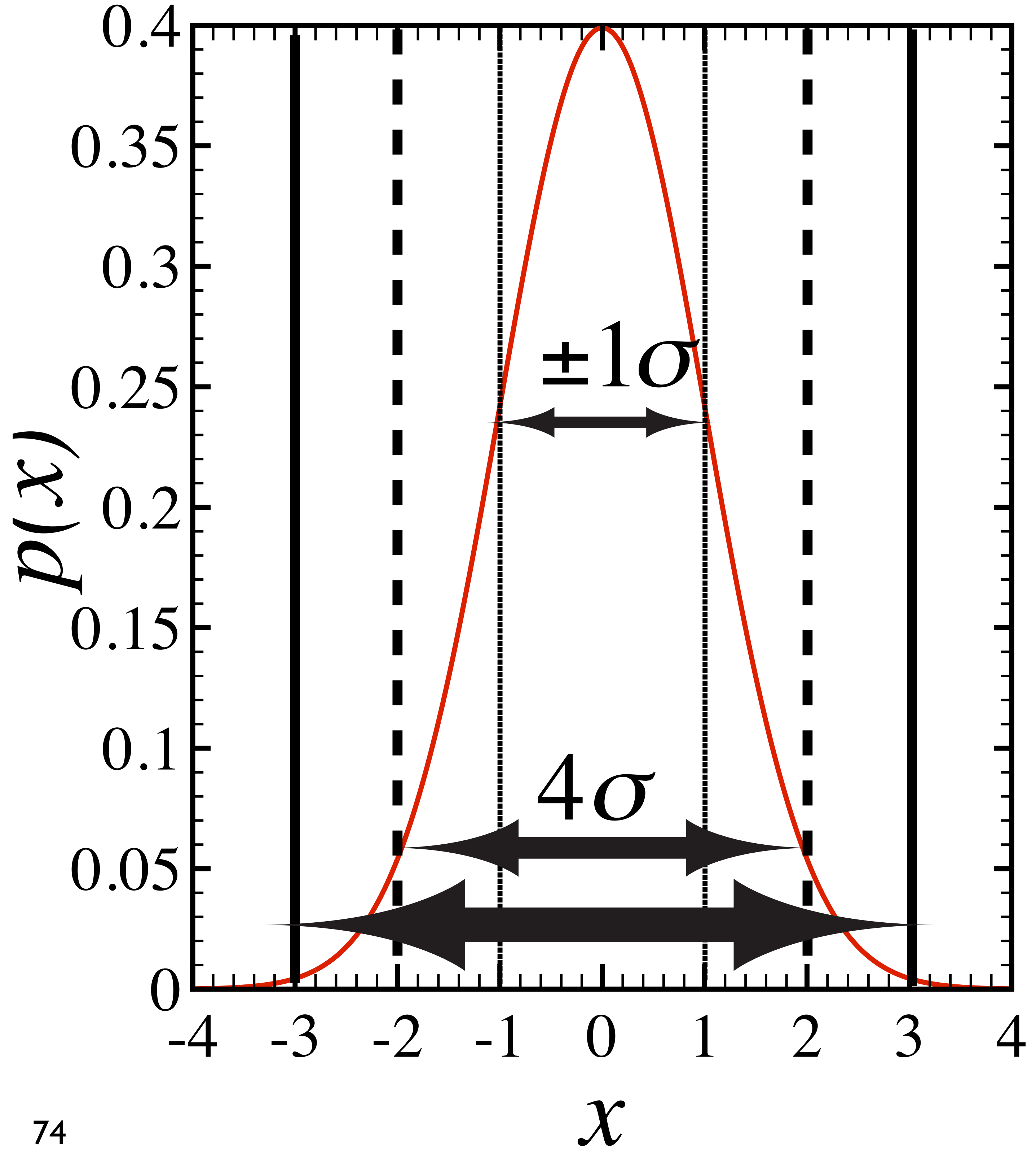
مفهوم انحراف معیار با توجه به تابع توزیع

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

$$68.3\% = \int_{-1\sigma}^{+1\sigma} p(x)dx$$

$$95.45\% = \int_{-2\sigma}^{+2\sigma} p(x)dx$$

$$99.73\% = \int_{-3\sigma}^{+3\sigma} p(x)dx$$



خطای نامتقارن (Asymmetric)

$$\ell \equiv \exp\left(\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right)$$

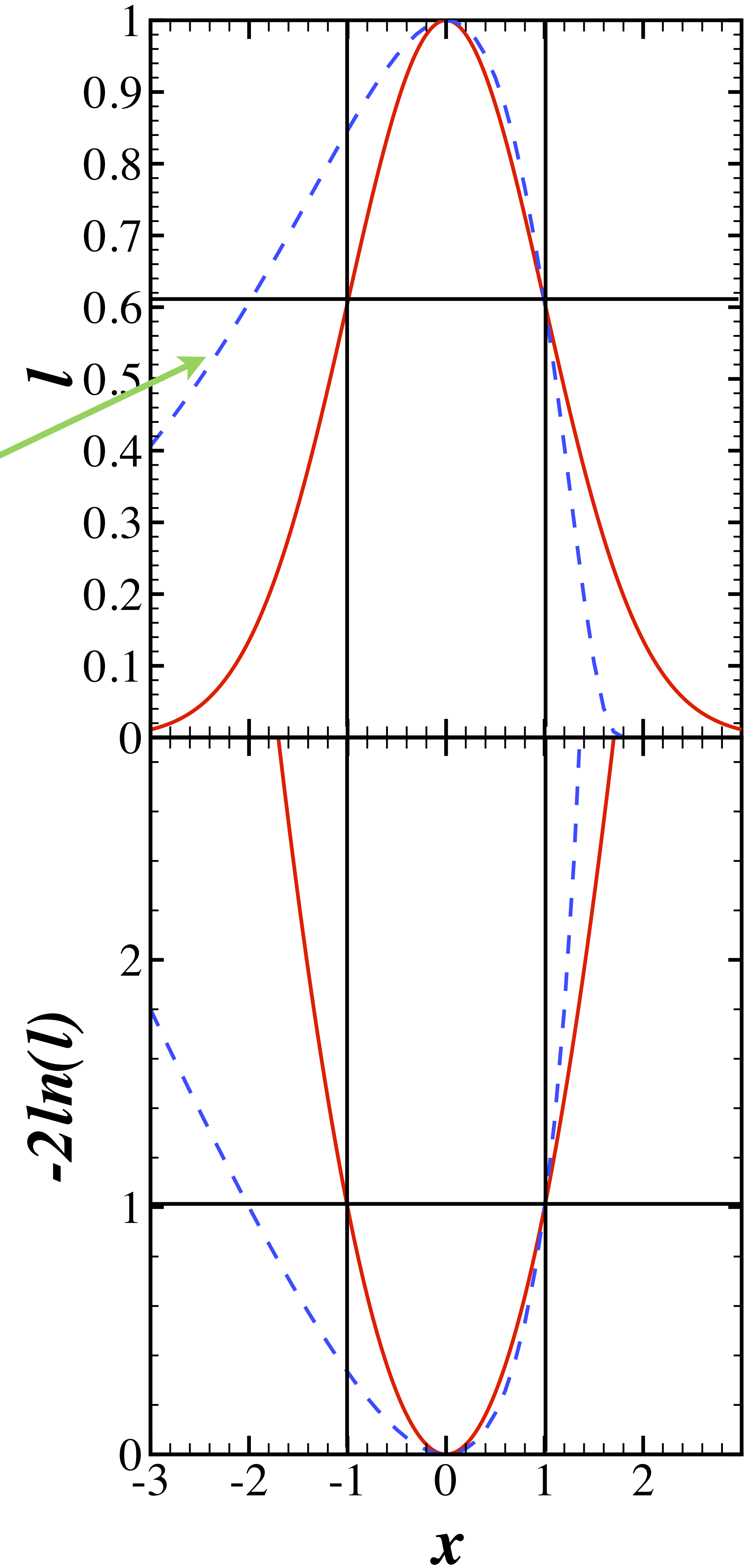
برای حالت متقارن

$$x_{best} = \bar{x}^{+\sigma_1}_{-\sigma_2} \qquad x_{best} = 0^{+1}_{-2}$$

$$-\ln \ell(x) \equiv \frac{1}{2}\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_1\sigma_2 + (\sigma_1-\sigma_2)(x-\bar{x})}$$

$$-\ln \ell(x = +\sigma_1) = \frac{1}{2}$$

$$-\ln \ell(x = -\sigma_2) = \frac{1}{2}$$



محدودیت این نوع پارامتری کردن:
مخرج نباید منفی شود

arXiv:physics/0406120

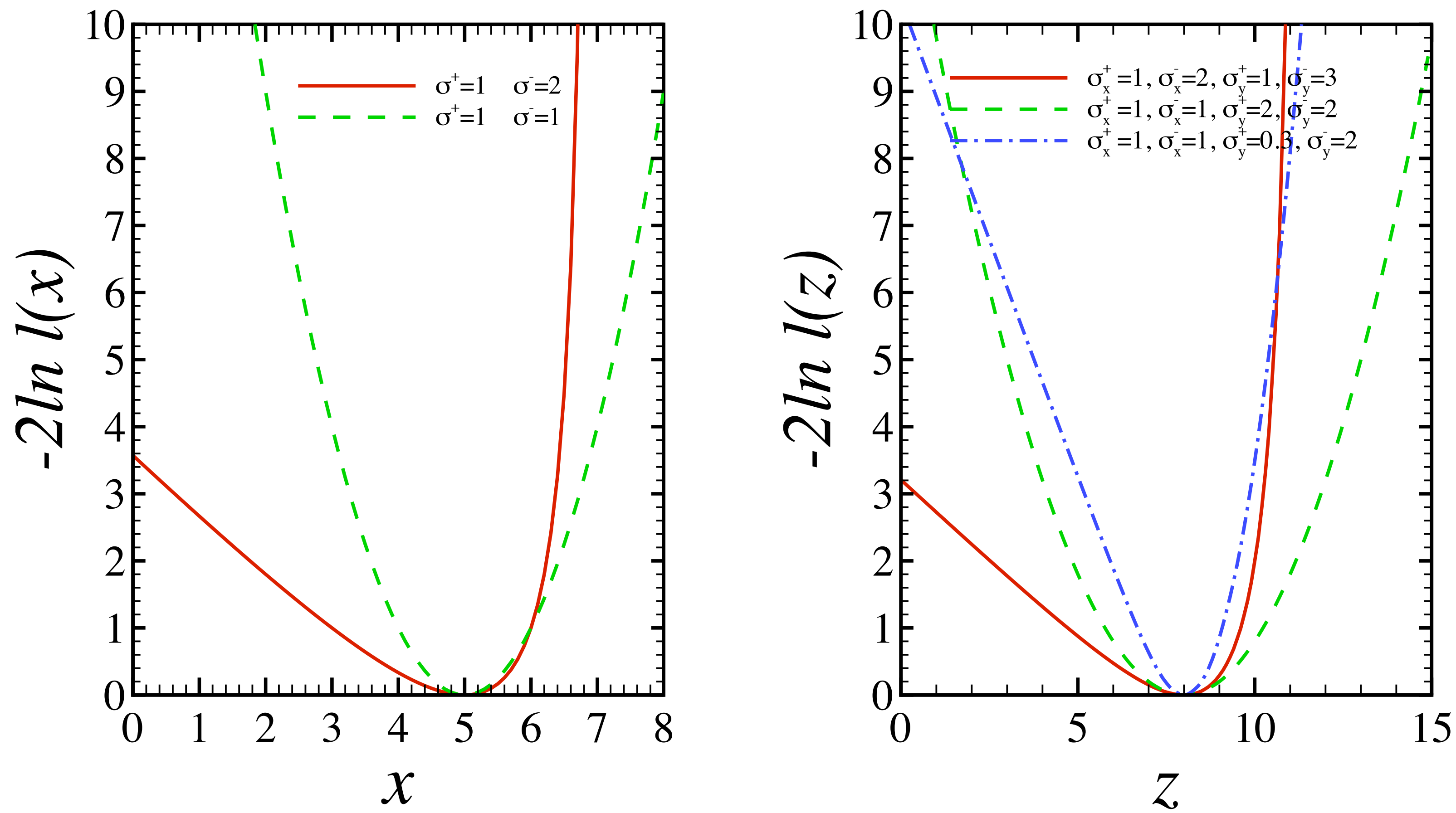
$$z = x + y \qquad x = \bar{x}^{+\sigma_x^+}_{-\sigma_x^-} \qquad y = \bar{y}^{+\sigma_y^+}_{-\sigma_y^-}$$

$$-\ln \ell(x,y) \equiv \frac{1}{2}\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^+\sigma_x^- + (\sigma_x^+ - \sigma_x^-)(x-\bar{x})} + \frac{1}{2}\frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^+\sigma_y^- + (\sigma_y^+ - \sigma_y^-)(y-\bar{y})}$$

$$-\ln \ell(z,x) \equiv \frac{1}{2}\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^+\sigma_x^- + (\sigma_x^+ - \sigma_x^-)(x-\bar{x})} + \frac{1}{2}\frac{(z-x-\bar{y})^2}{\sigma_y^+\sigma_y^- + (\sigma_y^+ - \sigma_y^-)(z-x-\bar{y})}$$

$$-\ln \ell(z) = \int -\ln \ell(z,x)dx = \frac{1}{2}\frac{(z-\bar{z})^2}{\sigma_z^+\sigma_z^- + (\sigma_z^+ - \sigma_z^-)(z-\bar{z})}$$

$$z \longrightarrow \bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$$



خطای مطلق و انحراف معیار

در صورتی که هیچ معیاری و اطلاعی از اینکه چه ارتباطی بین متغیرهای اندازه گیری وجود دارد و اینکه تابع توزیع هر کدام از آنها چیست از تخمین محافظه کارانه جمع قدرمطلق خطاها استفاده می کنیم

برازش با یک تابع دلخواه
Fitting function

برازش تابع با داده ها

$$(x_i, y_i), \quad x_i \pm \sigma_{x_i}, \quad y_i \pm \sigma_{y_i} \tag{1}$$

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - Y_{theo.}(x_i)]^2}{\sigma_{x_i}^2 + \sigma_{y_i}^2}, \quad Y_{theo.}(x) = mx + c \tag{2}$$

$$\chi^2(m = m_{best}, c = c_{best}) = \chi^2_{min} \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial m} = \frac{\partial \chi^2}{\partial c} = 0 \tag{3}$$

$$-2\sum_{i=1}^{N} y_i x_i + 2m\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + 2c\sum_{i=1}^{N} x_i = 0 \tag{4}$$

$$-2\sum_{i=1}^{N} y_i + 2m\sum_{i=1}^{N} x_i + 2c = 0 \tag{5}$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}, \quad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{6}$$

$$c = \bar{y} - m\bar{x}, \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \tag{7}$$

فرض مهم این این است که خطاها را در محاسبات یکسان فرض کرده ام

گزارش خطا

۱) خطای مربوط به(x,y)
که منتشر میشود
۲) خطای ذاتی آماری

$$\sigma_m^2(pro.) = \left(\frac{\partial m}{\partial y_i}\sigma_{y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial x_i}\sigma_{x_i}\right)^2$$

$$\sigma_m^2(total) = \sigma_m^2(pro.) + \sigma_m^2(stat.)$$

$$\sigma_m^2(stat.) = ?$$

$$m = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{N}\xi_i y_i, \quad D \equiv \sum_{i=1}^{N}\xi^2, \quad \xi_i \equiv x_i - \bar{x}, \quad \sum_{i=1}^{N}\xi_i = 0$$

$$y = mx + c \quad \to \quad y_i = m(\xi_i + \bar{x}) + c, \quad b \equiv m\bar{x} + c = \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1} N y_i$$

$$\sigma_m^2(stat.) = \left(\frac{\partial m}{\partial y_i}\sigma_{y_i}\right)^2 = \frac{\xi_1^2}{D^2}\sigma_{y_1}^2 + \frac{\xi_2^2}{D^2}\sigma_{y_2}^2 + \ldots, \quad \sigma_{y_i}^{\equiv}\sigma^2(stat.)$$

$$\sigma_m^2(stat.) = \frac{\sum \xi_i^2}{D^2}\sigma^2(stat.) = \frac{D}{D^2}\sigma^2(stat.) = \frac{\sigma^2(stat.)}{D}$$

$$\sigma_b^2(stat.) = \frac{\sigma^2(stat.)}{N}, \quad \sigma_c^2(stat.) = \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{D}\right)\sigma^2(stat.)$$

گزارش خطا

$$\sigma^2(stat.) = \frac{N}{N-2}\langle S^2\rangle$$

$$S^2 \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i^2, \qquad d_i \equiv y_i - (m\xi_i + b)$$

$$\sigma_m^2(stat.) = \frac{1}{D}\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N} d_i^2$$

$$\sigma_c^2(stat.) = \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{D}\right)\frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N-2}$$

گزارش خطا در برازش خطی

$$(x_i, y_i), \quad y = mx + c$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}, \quad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

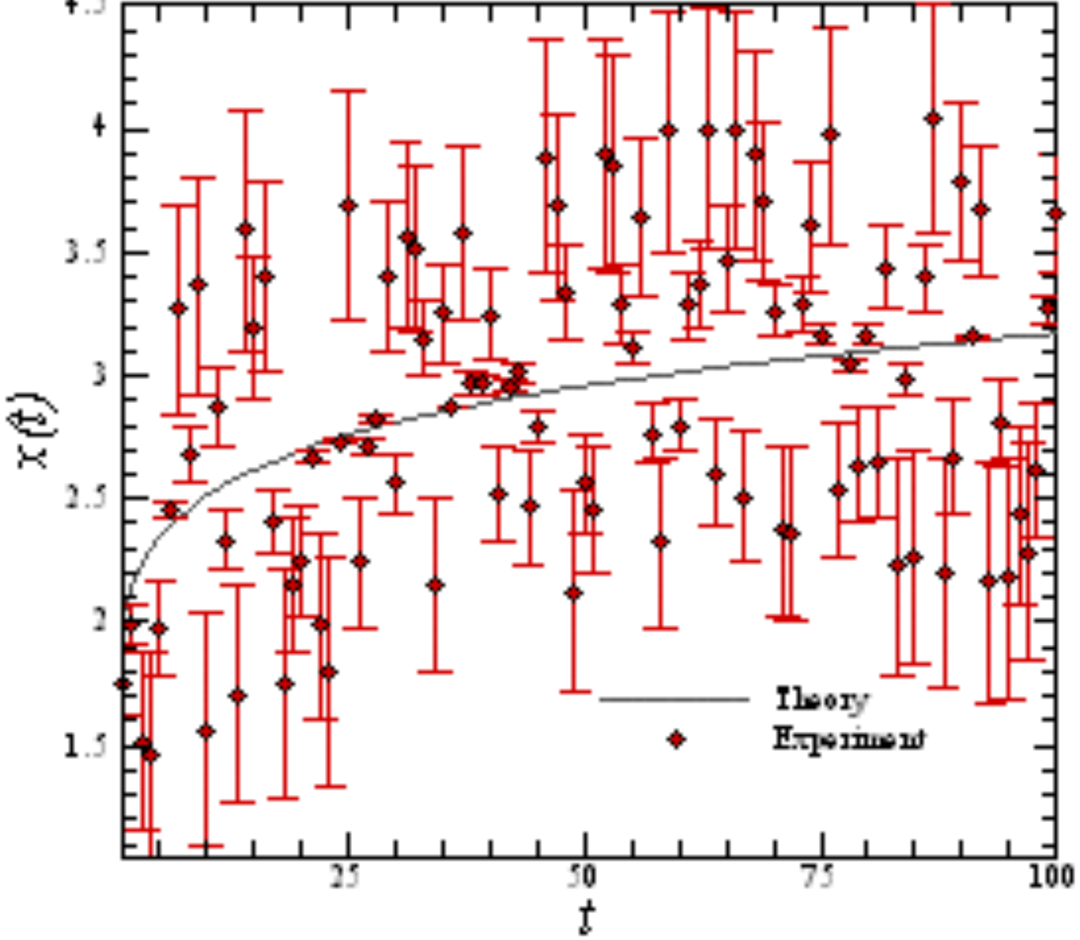
$$c = \bar{y} - m\bar{x}, \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

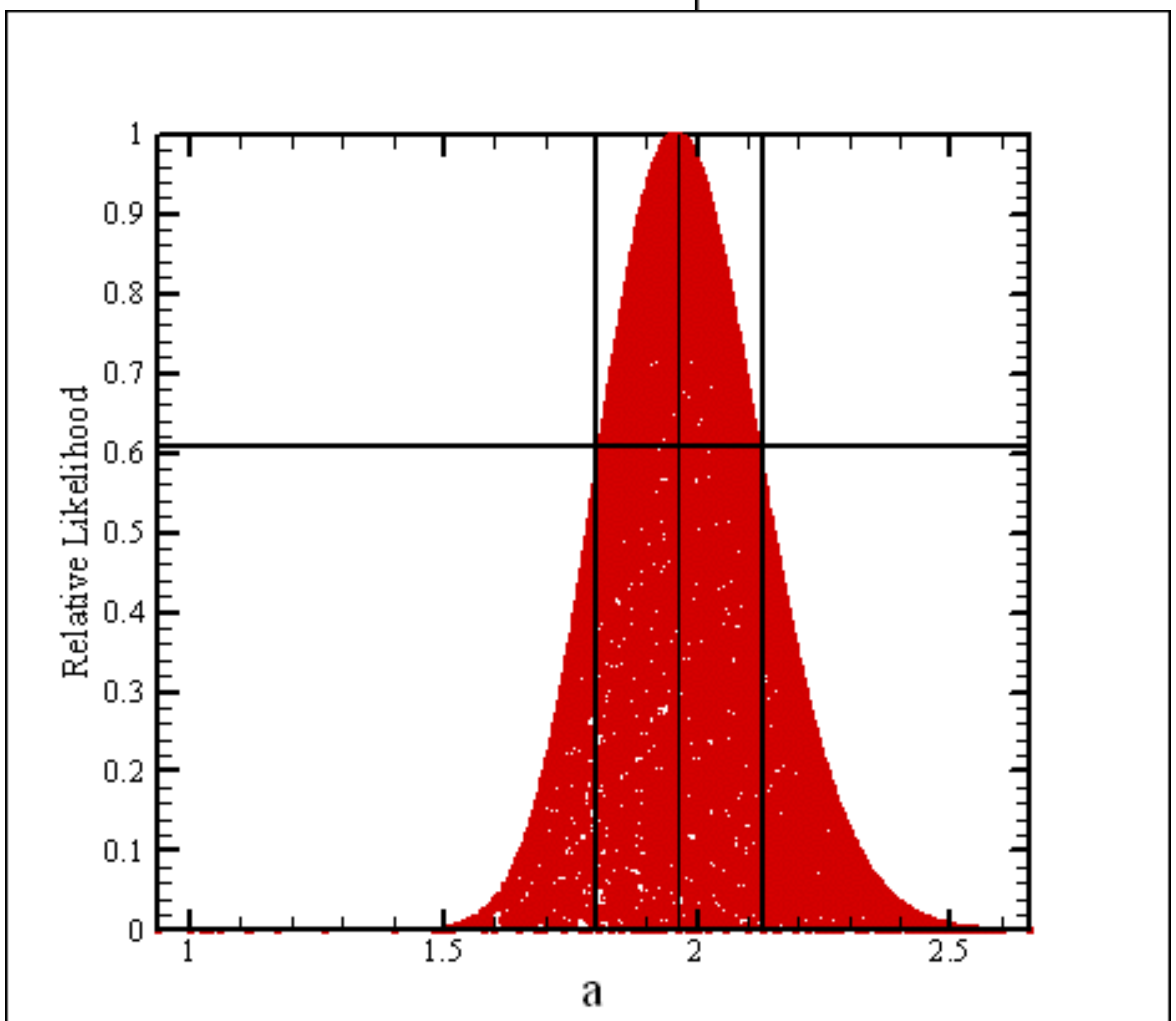
$$\sigma_m^2(stat.) = \frac{1}{D}\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N} d_i^2$$

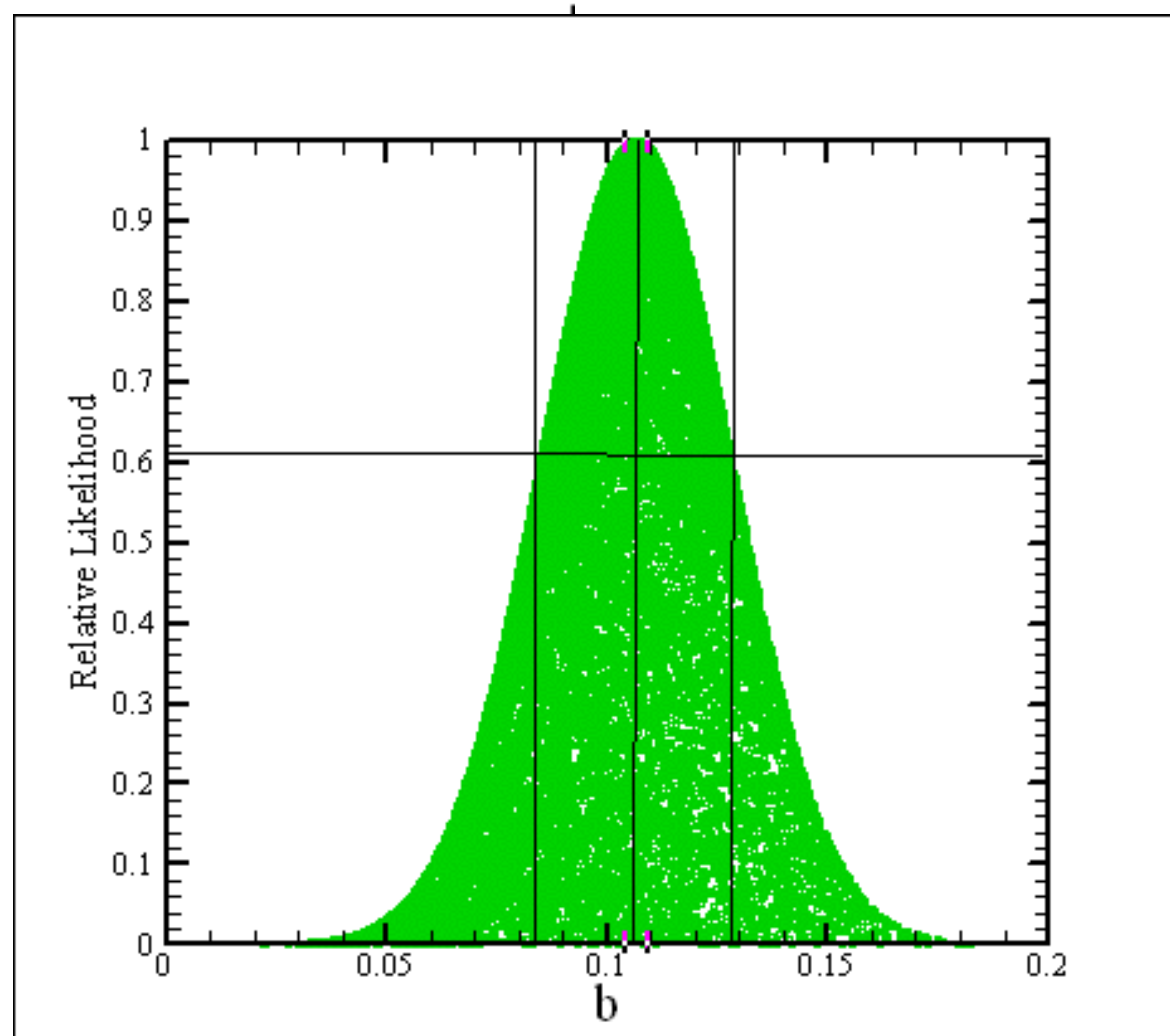
$$\sigma_c^2(stat.) = \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{D}\right)\frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N-2}$$

تمرین

برای اطلاعات بیشتر به سایر سخنرانی هایم و مراجع مراجعه کنید







جمع بندی

۱) فرآیندهای فیزیکی و دسته بندی آنها
۲) خطا ها
۳) انحراف معیار و انحراف معیار میانگین
۴) انتشارگر خطا
۵) خطاهای نامتقارن و مدل پیشنهادی

از توجه شما سپاسگزارم