باسمه تعالی

درس پدیده‌های بحرانی

تمرینات سری اول

زمان تحویل: ۹۷/۷/۲۴

۱- با محاسبه تعداد حالت‌ها در فضای فاز در حضور تبهگنی برای سه نوع ذره کلاسیکی، فرمیونی و بوزونی نشان دهید در دمای بالا داریم:
$\Omega^{FD} = \Omega^{BE} \to \Omega^{MB}$

۲- برای یک سیستم بدون برهمکنش که شامل ذرات تمیزناپذیر است، احتمال یافتن n_i ذره در تراز iام تک‌ذره‌ای، $P_i(n_i, T, \mu)$، متوسط ذرات، $\langle n_i \rangle$ و افت و خیز در عدد اشغال، $\langle (n_i - \langle n_i \rangle)^2 \rangle$، را برای آمارهای ماکسول-بولتزمن، بوز-اینشتین و فرمی-دیراک بیابید و نتایج را تحلیل کنید.

۳- طیف تابش یک جسم دلخواه در d بُعد را با فرض اینکه ضریب جذب به صورت $\omega^2 kT(d+1)$ تغییر می‌کند، محاسبه نموده و وابستگی انرژی کل تابش شده در تمام فرکانس‌ها را به دما و بُعد سیستم تعیین کنید. فرض کنید که شارش توسط عبارت $R = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$ داده شود.

۴- فرض کنید در حدود ۱۰۰ ثانیه پس از انفجار اولیه در عالم معادله حالت گاز به صورت $U = 3PV$ باشد از طرفی با توجه به انتقال انرژی، داریم $U = \sigma V T^4$.

الف : آنتروپی را محاسبه کنید.

ب: با توجه به انبساط کیهان به صورت بی‌دررو، وابستگی دما به فاکتور مقیاس که به صورت $a = \frac{r}{R}$ تعریف می‌شود در همان زمان بدست آورید. (r فاصله اجسام از یکدیگر و R مقداری ثابت می‌باشد)

۵- با کمک قضیه ویریال معادله حالت و انرژی درونی یک سیستم بس-ذره‌ای برهمکنشی با جمله برهمکنش $U\left(\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|\right)$ را محاسبه کنید.

۶- حد ترمودینامیک را برای انرژی الکترواستاتیک ذخیره شده در یک کره با اندرکنشی به صورت $U(r) = \frac{A}{r^\sigma}$ در d بُعد بررسی نمایید.

۷- تمرین ۲ فصل اول کتاب Goldenfeld

موفق باشید

موحد

"تحصیل علم و دانش مایه‌ی تقویت و تأیید عقل آدمی است. "حضرت علی (ع)"

	Microcanonical $\Omega(E,V,N)$	Canonical $Z(T,V,N)$	Grand canonical $\mathcal{Z}(T,V,\mu)$
$\frac{S}{k}$	$\ln\Omega$	$\left(\frac{\partial(T\ln Z)}{\partial T}\right)_{V,N}$	$\left(\frac{\partial(T\ln \mathcal{Z})}{\partial T}\right)_{V,\mu}$
F	$E-kT\ln\Omega$	$-kT\ln Z$	$kT\mu^2\left(\frac{\partial(\mu^{-1}\ln \mathcal{Z})}{\partial \mu}\right)_{T,V}$
U	Fixed $(=E)$	$kT^2\left(\frac{\partial(\ln Z)}{\partial T}\right)_{V,N}$	$-\left(\frac{\partial(\ln \mathcal{Z})}{\partial \beta}\right)_{\beta\mu,V}$
N	Fixed	Fixed	$kT\left(\frac{\partial(\ln \mathcal{Z})}{\partial \mu}\right)_{T,V}$
kT	$\left(\frac{\partial(\ln\Omega)}{\partial E}\right)^{-1}_{V,N}$	Fixed	Fixed
$\frac{\mu}{kT}$	$-\left(\frac{\partial(\ln\Omega)}{\partial N}\right)_{E,V}$	$-\left(\frac{\partial(\ln Z)}{\partial N}\right)_{T,V}$	Fixed
P	$kT\left(\frac{\partial(\ln\Omega)}{\partial V}\right)_{E,N}$	$kT\left(\frac{\partial(\ln Z)}{\partial V}\right)_{T,N}$	$\frac{kT}{V}\ln\mathcal{Z}$
$\frac{C_V}{k}$	$-\beta^2\left(\frac{\partial^2(\ln\Omega)}{\partial E^2}\right)^{-1}_{V,N}$	$\beta^2\left(\frac{\partial^2(\ln Z)}{\partial \beta^2}\right)_{V,N}$	$T\left(\frac{\partial^2(T\ln \mathcal{Z})}{\partial T^2}\right)_{V,\mu}$
$(\Delta N)^2$	0	0	$\left(\frac{\partial^2(\ln \mathcal{Z})}{\partial (\beta\mu)^2}\right)_{\beta,V}$
$(\Delta E)^2$	0	$\left(\frac{\partial^2(\ln Z)}{\partial \beta^2}\right)_{V,N}$	$\left(\frac{\partial^2(\ln \mathcal{Z})}{\partial \beta^2}\right)_{\beta\mu,V}$

$\int_0^\infty dx\, x^n\, e^{-\alpha x} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ $\quad\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-ikx - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right] = \sqrt{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right]$ $\quad\quad$ $\lim_{N\to\infty} \ln N! = N\ln N - N$

$\left\langle e^{-ikx}\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!}\langle x^n\rangle$ $\quad\quad$ $\ln\left\langle e^{-ikx}\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!}\langle x^n\rangle_c$

$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ $\quad\quad$ $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$

Surface area of a unit sphere in d dimensions $\quad\quad$ $S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{(d/2-1)!}$

$$\sum_k \to \frac{l^d}{(2\pi)^d}\int d^d k \to \int g(\varepsilon)d\varepsilon$$

$$V_d = \frac{R^d \pi^{d/2}}{\frac{d}{2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \quad B_j(y) = \left(1+\frac{1}{2j}\right)\coth\left(\left[1+\frac{1}{2j}\right]y\right) - \frac{1}{2j}\coth\left(\frac{y}{2j}\right)$$

$$for\ y\to 0 \quad B_j(y) \sim \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{j}\right)y$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} dx x^{t-1} e^{-x} = (t-1)\Gamma(t-1)$$

$$\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t} \quad ,\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$