بسم الله الرحمن الرحیم

Transformation (Data analysis)

سیدمحمدصادق موحد

دانشکده فیزیک دانشگاه شهید بهشتی

گروه کیهانشناسی محاسباتی و آزمایشگاه میان رشته ای ابن سینا

Computational Cosmology Group Of Shahid Beheshti University

COMPLEXLAB SHAHID BEHESHTI UNIVERSITY

Outlook:

Transformation: General definition
Fourier Transformation (FT)
General properties of FT
Some subroutines
Nyquist Phenomenon
Phase randomizing (surrogate)
Discrete Fourier Transform
Making filter, Trend and Noise
Detrending and denoising
Beam effect
Singular Value decomposition (SVD)
Intrinsic mode decomposition (IMD)
Principle component Analysis

References:

[1] Nussbaumer, Henri J., and Henri J. Nussbaumer. The fast Fourier transform. Springer Berlin Heidelberg, 1982.

[2] Chun-Lin, Liu. "A tutorial of the wavelet transform." NTUEE, Taiwan 21.22 (2010): 2.

[3] Heckbert, Paul. "Fourier transforms and the fast Fourier transform (FFT) algorithm." Computer Graphics 2.1995 (1995): 15-463.

[4] Walnut, David F. An introduction to wavelet analysis. Springer Science & Business Media, 2013.

[5] Misiti, Michel, et al. "Wavelet toolbox." The MathWorks Inc., Natick, MA 15 (1996): 21.

[6]https://www.geeksforgeeks.org

Part 1: General notes & Motivations

What and Why: 1

به طور کلی به دنبال یافتن اجزا و پایه های تشکیل دهنده سری است

$\{x\}$

Time Series $\{x\} : \{x(t)\}$ $\boxed{\text{سری زمانی پیوسته است}}$

$\{x\} : \{x_1, x_2, \dots x_N\}$ سری زمانی گسسته است

$\begin{cases} \Delta t_j = t_{j+1} - t_j \\ \Delta t_i = t_{i+1} - t_i \end{cases}$ $\Delta t = t_{i+1} - t_i$

"Regular" یک سری زمانی گسسته منظم

$\forall\, i,j \quad \Delta t_i = \Delta t_j$

یعنی بازه های داده برداری یکسان است

power spectrum for a Regular Series

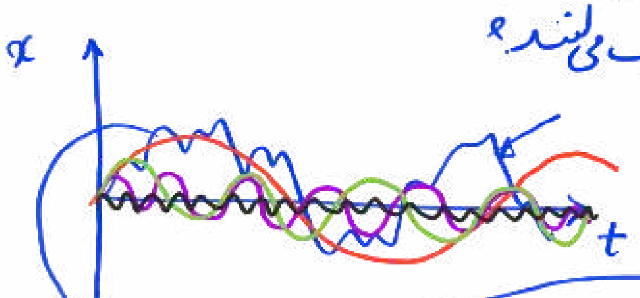
Time Series

$\rightarrow t$
$\rightarrow r$
$\rightarrow \gamma$
متغیر مستقل

$x(t) \rightarrow$ Time Series
$x(r) \rightarrow$ Position Series
$x(\gamma) \rightarrow$ Angular Series

Regular Descrite Series

چه پایه هایی سیگنال را توصیف می کنند؟



$\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$

$x(t) = A_1F_1(t) + A_2F_2(t) + A_3F_3(t) + A_4F_4(t) + \dots$

Base

$\langle T | b \rangle = \sum_i a_i |\phi_i\rangle$

What:
Expansion in terms of bases.

Why:
1) To find the constructed components of underlying field
2) For pruning the nuisance parts of data
3) To have multi-resolution Analysis
4) To construct mock data (field)
5) To get rid from the undesired parts of data
6) Solve differential and integral equations
7) Non-stationary detection

Motivations

Fast wavelet basis search for generic gravitational wave bursts in Pulsar Timing Array data

arXiv:2408.07864

Jacob A. Taylor, Rand Burnette, and Bence Bécsy
Department of Physics, Oregon State University, Corvallis, OR 97331, USA

Neil J. Cornish
eXtreme Gravity Institute, Department of Physics, Montana State University, Bozeman, MT 59717, USA

(Dated: December 2, 2024)

Monthly Notices of the ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY
MNRAS **478,** 1132–1140 (2018) doi:10.1093/mnras/sty10
Advance Access publication 2018 May 1

Cosmic string detection with tree-based machine learning

A. Vafaei Sadr,[1,2,3] M. Farhang,[1] S. M. S. Movahed,[1★] B. Bassett[3,4,5,6] and M. Kunz[2]

Monthly Notices of the ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY

Advance Access publication 2017 December 14

A Multiscale pipeline for the search of string-induced CMB anisotropies

A. Vafaei Sadr,[1,2,3★] S. M. S. Movahed,[1★] M. Farhang,[1★] C. Ringeval[4] and F. R. Bouchet[5]
[1]*Department of Physics, Shahid Beheshti University, Velenjak, Tehran 19839, Iran*
[2]*Département de Physique Théorique and Center for Astroparticle Physics, Université de Genève, 24 Quai Ernest Ansermet, CH-1211 Genéve 4, Switzerland*
[3]*African Institute for Mathematical Sciences, 6 Melrose Road, Muizenberg 7945, South Africa*
[4]*Centre for Cosmology, Particle Physics and Phenomenology, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve B-1348, Belgium*
[5]*Institut d' Astrophysique de Paris (UMR7095: CNRS & UPMC-Sorbonne Universities), F-75014 Paris, France*

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, 864:162 (18pp), 2018 September 10 https://doi.org/10.3847/1538-4357/aad7b9

Multifractal Analysis of Pulsar Timing Residuals: Assessment of Gravitational Wave Detection

I. Eghdami[1], H. Panahi[1], and S. M. S. Movahed[2,3]
[1] Department of Physics, University of Guilan, Rasht 41635-1914, Iran; t-panahi@guilan.ac.ir
[2] Department of Physics, Shahid Beheshti University, Velenjak, Tehran 19839, Iran; m.s.movahed@ipm.ir
[3] School of Physics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), P.O. Box 19395-5531, Tehran, Iran
Received 2017 May 7; revised 2018 July 27; accepted 2018 July 27; published 2018 September 12

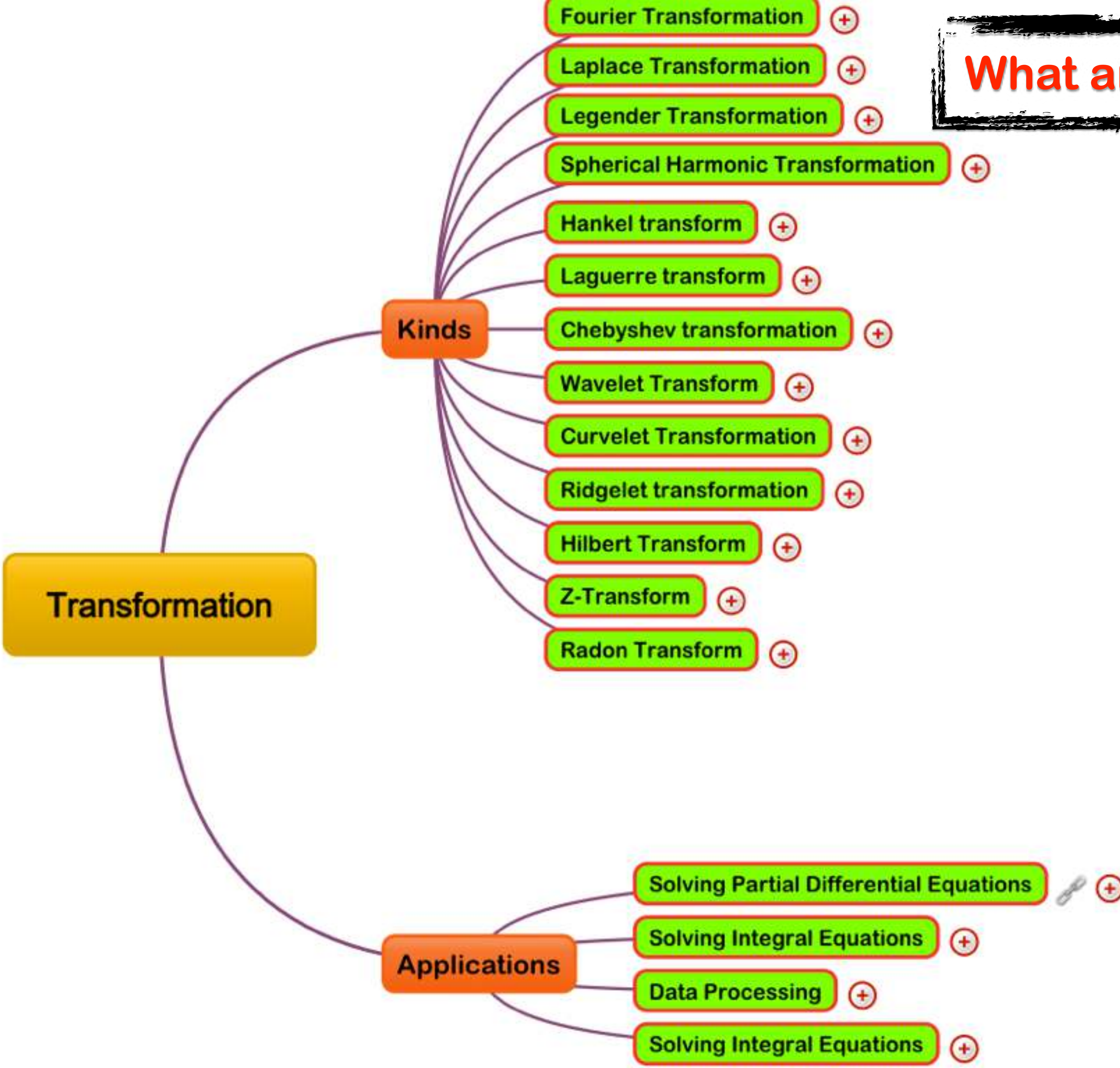
JOURNAL OF APPLIED PHYSICS **122**, 085302 (2017)

Characterization of the anisotropy of rough surfaces: Crossing statistics

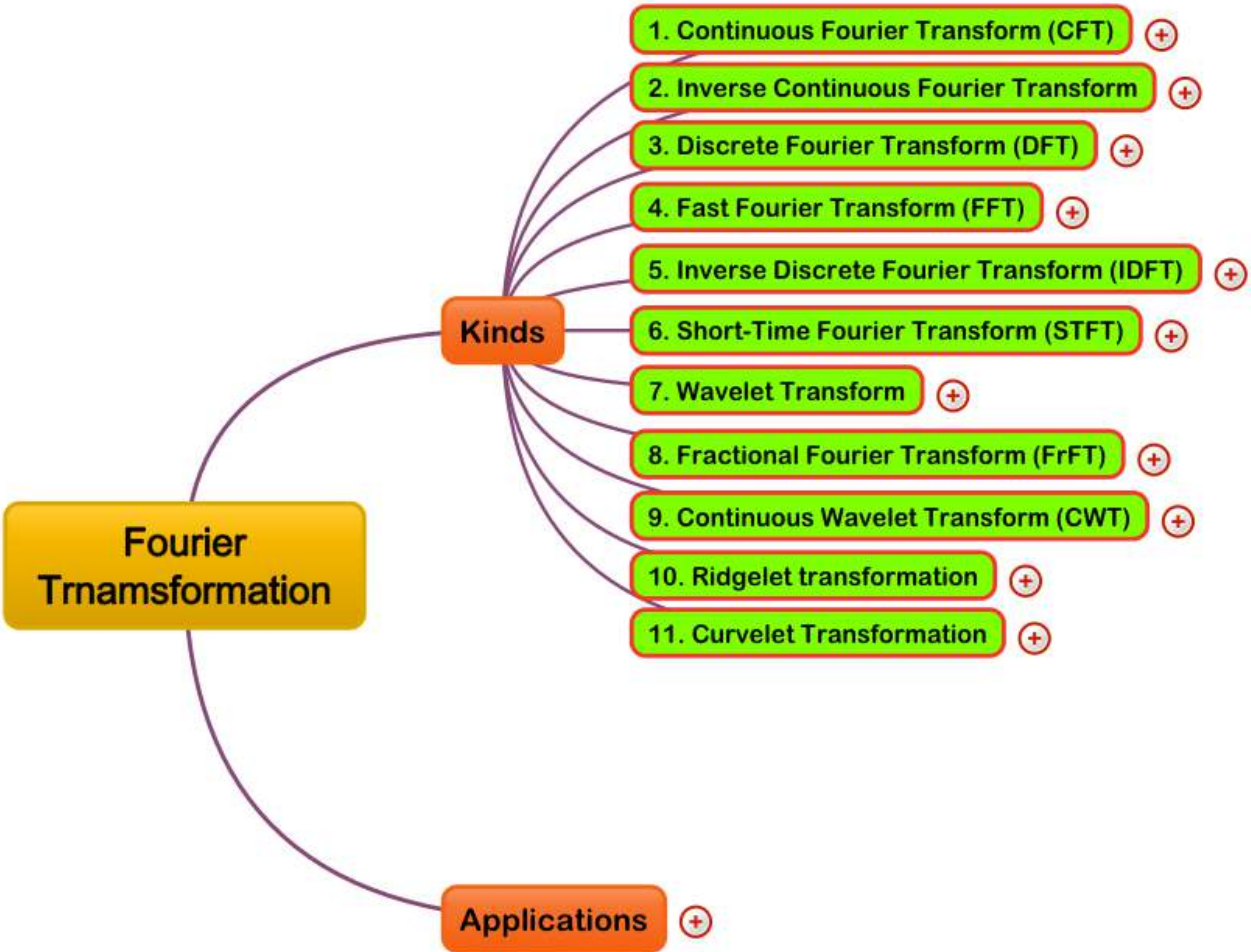
M. Ghasemi Nezhadhaghighi,[1] S. M. S. Movahed,[2,3,a)] T. Yasseri,[4,5] and S. Mehdi Vaez Allaei[6,7,b)]
[1]*Department of Physics, College of Sciences, Shiraz University, Shiraz 71454, Iran*
[2]*Department of Physics, Shahid Beheshti University, G.C., Evin, Tehran 19839, Iran*
[3]*School of Physics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), P.O. Box 19395-5531, Tehran, Iran*
[4]*Oxford Internet Institute, University of Oxford, 1 St Giles', Oxford OX1 3JS, United Kingdom*
[5]*Alan Turing Institute, 96 Euston Rd., London NW1 2DB, United Kingdom*
[6]*Department of Physics, University of Tehran, Tehran 14395-547, Iran*
[7]*The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Strada Costiera 11, I-34013 Trieste, Italy*

Part 2:
Fourier Transformation

What and Why: 2



Fourier Transformation (1)



Fourier Transformation (2)

Power Spectrum   طیف توان

به طور کلی به دنبال یافتن اجزا و پایه‌های تشکیل دهنده سری است

$\underline{\{x\}}$

Time Series $\{x\}:\{x(t)\}$ $\boxed{\text{سری زمانی پیوسته است}}$

$\{x\}:\{x_1, x_2, \dots x_N\}$ سری زمانی گسسته است

$$\begin{cases} \Delta t_j = t_{j+1} - t_j \\ \Delta t_i = t_{i+1} - t_i \end{cases}$$

$\Delta t = t_{i+1} - t_i$

"Regular"   یک سری زمانی گسسته و منظم

$\forall\ i, j \quad \Delta t_i = \Delta t_j$

یعنی بازه‌های داده‌برداری یکسان است

Power spectrum for a Regular Series

$\underline{\text{Time Serrs}}$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow t \\ \rightarrow r \\ \rightarrow \gamma \end{array}\right\}$$ متغیر مستقل

$$\left.\begin{cases} x(t) \rightarrow \text{Time Series} \\ x(r) \rightarrow \text{Position Series} \\ x(\gamma) \rightarrow \text{Angular Series} \end{cases}\right\} \begin{array}{l} \text{Regular} \\ \text{Descrite} \\ \text{Series} \end{array}$$

$$x(t) = \int d\omega\, e^{i\omega t} X(\omega) \longrightarrow X(\omega) = \int dt\, e^{-i\omega t} x(t)$$

محدود است

$\int |x(t)|\, dt$

همگرا شود

$$x(t) = \sum_j \underbrace{e^{i\omega_j t}}_{F} \underbrace{X(\omega_j)}_{A}$$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i k x}\, dx$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, e^{2\pi i k x}\, dx$$

$$g(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\vec{r})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d\vec{r}$$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int g(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d\vec{k}$$

Fourier Transform

در فصل قبل با بسط فوریه آشنا شدیم فرض کنید در فضای حقیقی تابع $f(t)$ داریم در فضای فوریه خواهیم داشت به صورت زیر است:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

Cosine and Sine Transform:

$$g_c(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos \omega t \, dt$$

$$g_s(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt$$

توجه کنید اگر بخواهیم به صورت مفهوم معادله انتگرالی تعبیر کنیم پس تبدیل فوریه یک تبدیل انتگرالی با هسته $e^{i\omega t}$ یا $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ است.

Ex: Fourier Transform of Gaussian function

$$f(t) = e^{-a^2t^2} \rightarrow g(\omega) = ?$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2t^2} e^{i\omega t}\, dt$$ By completing the square

$$-a^2t^2 + i\omega t - \frac{\omega^2 t^2}{4a^2} + \frac{\omega^2 t^2}{4a^2} = -\left(at - \frac{i\omega}{2a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4a^2}$$

$$= -a^2t^2 + \cancel{\frac{\omega^2}{4a^2}} + i\omega t - \cancel{\frac{\omega^2}{4a^2}} = -a^2t^2 + i\omega t$$

so:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\omega^2/4a^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2t'^2}\, dt'}_{\sqrt{\pi}/a}$$

$$\boxed{g(\omega) = \frac{1}{a\sqrt{2}}\, e^{-\omega^2/4a^2}}$$

توجه کنید که با افزایش a در فضای حقیقی تابع افت سریع می‌شود. در حالی که در فضای فوریه معادل پهن‌تر شدن است. این رفتار نیز از آن جهت قابل فهم است که تابع خیلی جایگزیده در فضای حقیقی از تعداد بیشتری از توابع فوریه تشکیل می‌شود پس در فضای فوریه تابع پهن می‌شود. همچنین

15.2 Development of The fourier Integral

در فصل ۱۴ دیدیم که سری فوریه برای نوشتن توابع در بازه $[0,2\pi]$ یا $[-L,+L]$ یا $(-\infty,+\infty)$

خصوصاً اگر تابع تناوبی باشد. پس

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum a_n \cos nx+b_n \sin nx$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum a_n \cos\frac{n\pi}{L}x+b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

یعنی:

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt$$

پس می‌توان تابع f را به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\overbrace{\frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f(t)\,dt}^{1}+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{L}\underbrace{\int_{-L}^{+L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt}_{a_n}$$

$$+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\underbrace{\int_{-L}^{+L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt}_{b_n}$$

توجه کنید جمله ① مقدار متوسط تابع در این بازه است. جملات بعدی تصحیح‌های لازم خواهند بود.

پس می‌توان نوشت:

$$f(x)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f(t)\,dt+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{+L} f(t)\cos\frac{n\pi}{L}(t-x)\,dt$$

مانند قبل داریم: $\omega_n=\frac{n\pi}{L}$, $\Delta w=\frac{\pi}{L}$

پس

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dw\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos w(t-x)\,dt$$

توجه کنید جمله اول یعنی $\lim \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f(t)\,dt$ صفر است در صورتی که تابع در بازه مورد مطالعه متناهی باشد.

یعنی لذا این دلیل تحقیق اشاره کردم که شرط لازم و کافی برای وجود تبدیل فوریه

① Continuous function

② Differentiable function

③ Absolutely Integrable $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx \rightarrow \text{finite}$

اکنون می‌خواهیم انتگرال فوریه را تعریف کنیم یعنی:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(t-x)\, dt$$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega(t-x)\, dt$$

چون $\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \sin \omega(t-x) = 0$ پس با جمع کردن دو عبارت فوق البته با ضرب (i) داریم:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x}\, d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega x} F(\omega)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} f(t)$$

Cosine Transform

اگر f زوج یا فرد باشد می‌توان تبدیل را به گونه‌ای نوشت :

$$g_c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_c(t)\,(\cos\omega t + i \sin\omega t)\, dt$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f_c(t) \cos\omega t \, dt \qquad f: \text{even}$$

$$f_c(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g_c(\omega) \cos\omega t \, d\omega$$

Sine Transform

ضرایب را در g_s جذب کرده‌ایم

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(t) \sin\omega t \, dt$$

$$f_s(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g_s(\omega) \sin\omega t \, dt \qquad f: \text{odd}$$

15.4: Fourier Transform of Derivative.

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\omega x}\, dx$$

حال تعریف می‌کنیم

$$g_1(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{df}{dx}\, dx}_{dv}\; \overbrace{e^{i\omega x}}^{u}$$

$$= \frac{e^{i\omega x}}{\sqrt{2\pi}} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\omega x}\, dx$$

$f(x) \to 0$

خودمان فرض کردیم که محدود باشه

$$g_1(\omega) = -i\omega\, g(\omega)$$

می‌توان نشان داد

$$\boxed{g_n(\omega) = (-i\omega)^n g(\omega)}$$

Fourier Transformation (3)

Fourier Transform

Necessary and Sufficient Condition

لازم و کافی

① $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty \rightarrow$ ؟؟!

② $x(t)$ مشتق پذیر باشد $\rightarrow$ $X(\omega)$ تبدیل فوریه

③ $x(t)$ تناوبی باشد — $x(t)$ خواهیم داشت

$$x(t) \xrightarrow{F.T} X(\omega) \xrightarrow{I.F.T.} x(t)$$

باید الزاماً هم برابر باشند

Fourier Transformation (4)

در مسایل واقعی به جای اینکه تبدیل فوریه را روی خود داده انجام دهیم، برای تابع همبستگی انجام می‌دهیم

Weighted TPCF

$$C(\tau) = \langle x(t)\, x(t+\tau) \rangle_t$$

$$\begin{cases} ① & \int d\tau\, |C(\tau)| < \infty \\ ② & \text{مشتق‌پذیر باشد. هموار باشد.} \\ ③ & \text{فرض کردیم که دارد.} \end{cases}$$

$$S(\omega) = \int d\tau\, e^{-i\omega\tau}\, C(\tau)$$

Power Spectrum طیف توان

$$S(\omega) \overset{?}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

تبدیل فوریه تابع همبستگی است — تبدیل فوریه سیگنال

Fourier Transformation (5)

چند ویژگی در خصوص طیف توان

فرض کرده‌ام
$\langle x \rangle = 0$

① $$C_x(\tau) = \int d\omega \; e^{i\omega\tau} S(\omega)$$

$$\text{if } \tau = 0 \rightarrow C(\tau=0) = \langle x(t)\, x(t+0) \rangle = \langle x(t)^2 \rangle$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2(t) \rangle = C_x(0) = \int d\omega \; S(\omega)$$

سطح زیر منحنی طیف توان ← واریانس داده‌ها

Fourier Transformation (6)

② $S(\omega) = A(\omega) + i\,B(\omega)$

$$S(\omega) = \int d\tau\, e^{-i\omega\tau}\, C_x(\tau)$$

حقیقی فرض کنیم

$$A(\omega) + i\,B(\omega) = \int d\tau \left[\cos(\omega\tau) + i\,\sin(\omega\tau) \right] C_x(\tau)$$

$$A(\omega) = \int d\tau\, \cos(\omega\tau)\, C_x(\tau)$$

$$B(\omega) = \int d\tau\, \sin(\omega\tau)\, C_x(\tau)$$

For Stationary Case $C_x(t_i, t_j) = C_x(\overbrace{|t_i - t_j|}^{\tau})$

یعنی $\longrightarrow C_x(\tau) = C_x(-\tau)$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, \underset{\text{زوج}}{C_x(\tau)}\, \underbrace{\sin(\omega\tau)}_{\text{فرد}} = 0$$

برای سیگنال های ما بخش موهومی طیف توان صفر است

Fourier Transformation (7)

③ $$S(\omega) = \int d\tau\, e^{-i\omega\tau} C_x(\tau)$$

$$= \int d\tau\, e^{-i\omega\tau} \langle x(t)\, x(t+\tau) \rangle_t$$

$$S(\omega) = \delta_D(\omega - \omega_2)\, \delta_D(\omega_1 + \omega) \quad X(-\omega)\, X(\omega)$$

$$S(\omega) \simeq |X(\omega)|^2$$

Fourier Transformation (8)

4

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \longrightarrow & \dot{x}(t) \\ \downarrow & & \downarrow \text{ مشتق سیگنال} \\ S_x(\omega) \checkmark & \xrightarrow{?} & S_{\dot{x}}(\omega) = ? \end{array}$$

$$C_x(\tau) = \langle x(t)\, x(t+\tau) \rangle_t$$

$$\frac{dC_x(\tau)}{d\tau} = \left\langle x(t) \frac{dx(t+\tau)}{d\tau} \right\rangle_t$$

$$= \left\langle x(t) \frac{dx(t+\tau)}{d(t+\tau)} \frac{d(t+\tau)}{d\tau} \right\rangle_t$$

$$= \langle x(t)\, \dot{x}(t+\tau)\; 1 \rangle_t$$

$t \to t-\tau$ خاصیت مانایی استفاده شود *

$$\frac{dC_x(\tau)}{d\tau} = \langle x(t-\tau)\, \dot{x}(t) \rangle_t$$

$$|t-\tau-t| = \tau$$

$$t_i \quad -t_j$$

$$\frac{d^2C_x(\tau)}{d\tau^2} = -\langle \dot{x}(t-\tau)\, \dot{x}(t) \rangle_t$$

$$= -\langle \dot{x}(t)\, \dot{x}(t+\tau) \rangle_t$$

$$\boxed{\ddot{C}_x(\tau) = -C_{\dot{x}}(\tau)}$$

Fourier Transformation (9)

$$\boxed{-\omega^2 S_x(\omega) = -S_{\dot{x}}(\omega)}$$

$$\boxed{\omega^4 S_x(\omega) = S_{\ddot{x}}(\omega)}$$

$$\boxed{S_{x^{(n)}}(\omega) = (-1)^n \omega^{2n} S_x(\omega)}$$

$$x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}$$

$S_x(\omega)$ طیف توان سیگنال است

در صورت نیاز بدون اینکه بخواهیم از سیگنال مشتق بگیریم به سادگی [illegible] می‌توانیم

طیف توان مشتقات بالاتر را بدست آوریم

Fourier Transformation (10)

⑤ $\langle x(t)\,\dot{x}(t)\rangle = ?$ در سیگنال مانا

$$C_x(\tau) = \langle x(t)\,x(t+\tau)\rangle_t$$

$$\frac{dC_x(\tau)}{d\tau} = \langle x(t)\,\dot{x}(t+\tau)\rangle_t = \frac{d}{d\tau}\int d\omega\, e^{i\omega\tau} S_x(\omega)$$

$$\langle x(t)\,\dot{x}(t)\rangle_t = 0$$

برای سیگنال‌های مانا

$$\underline{\langle x(t)\,\dot{x}(t+\tau)\rangle_t} \neq 0$$

در حالت کلی

حتی برای مانا

- Fourier or legender transformation of correlation function

$$C_x(i,j) = \langle x(i)\cdot x(j)\rangle$$

$$= C_x(|i-j|) \equiv C_x(\tau) = \langle x(i)\cdot x(i+\tau)\rangle$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} C_x(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau$$

$$C_x(\tau) = \int_{-T}^{T} S_x(\omega)e^{-i\omega\tau}d\omega$$

Some properties

$$\sigma^2 = C_x(0) = \int_{-T}^{T} S_x(\omega) d\omega$$

$$C_x(\tau) = C_x(-\tau)$$

$$S_x(\omega) = A(\omega) + iB(\omega)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} C_x(\tau)\sin(\omega\tau) d\tau = 0$$

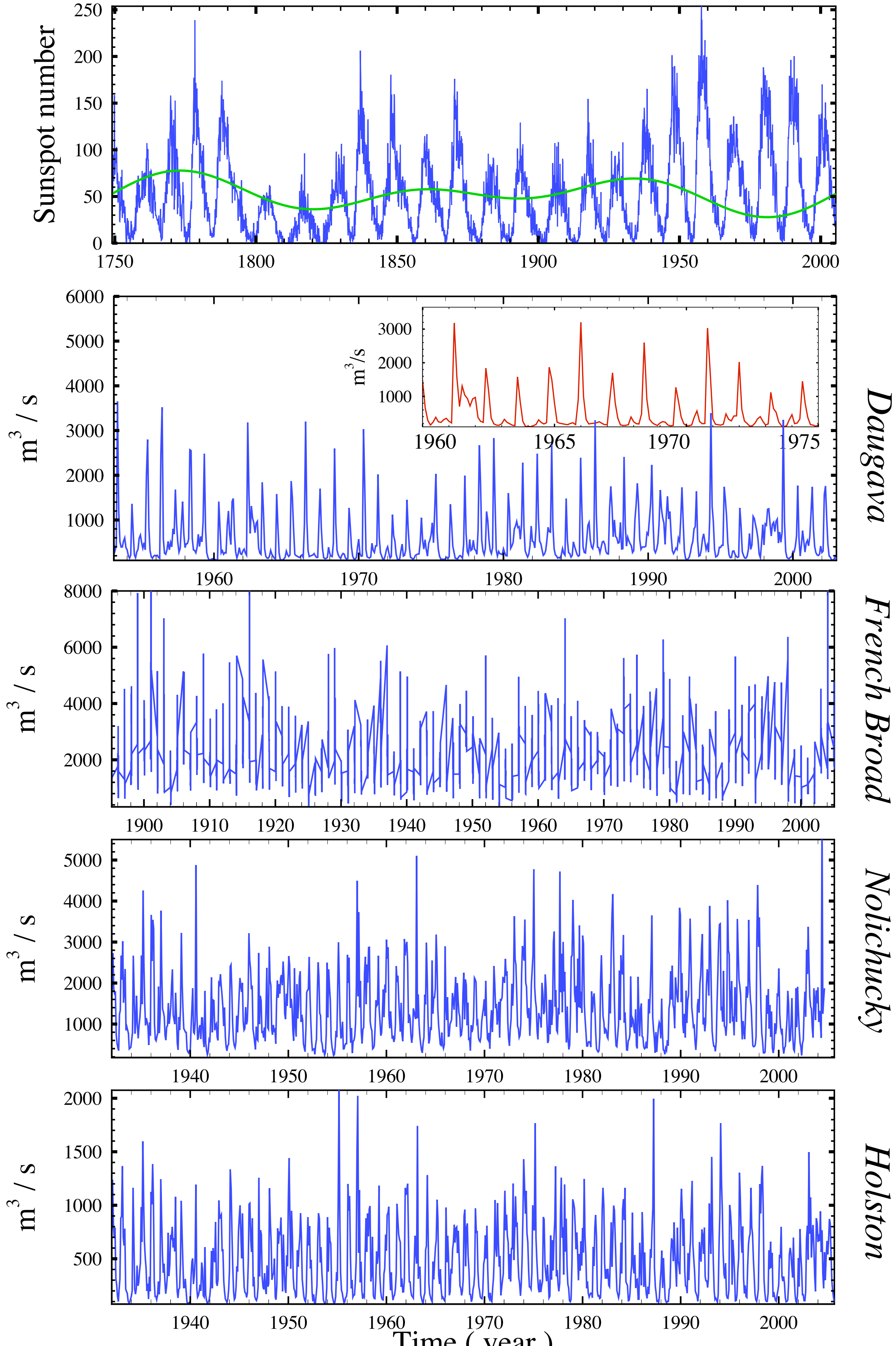
$$S_x(\omega) = | X(\omega) |^2$$

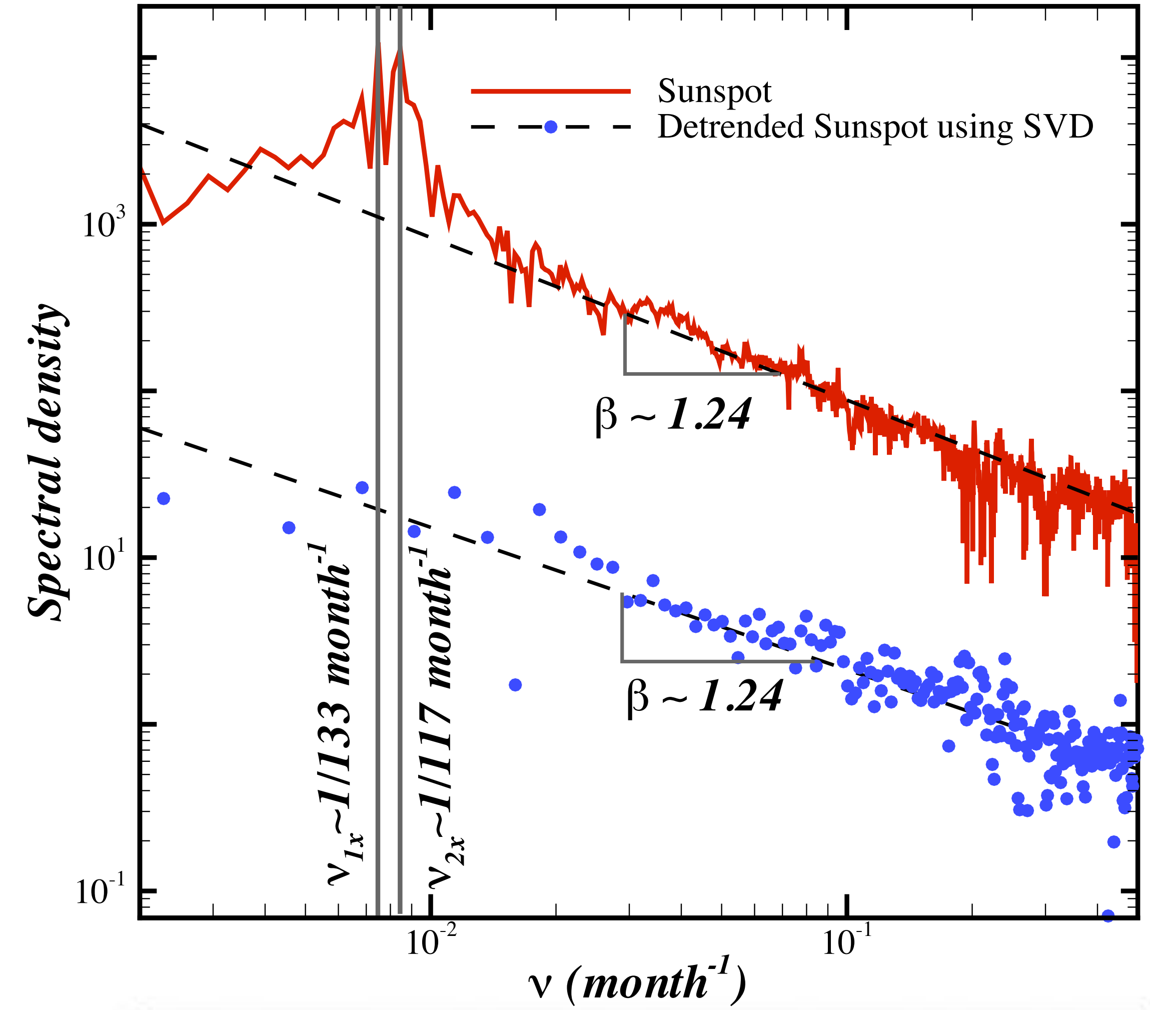
$$S_x(\omega) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} C_x(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \langle x(t)\cdot x(t+\tau)\rangle e^{i\omega\tau} d\tau$$

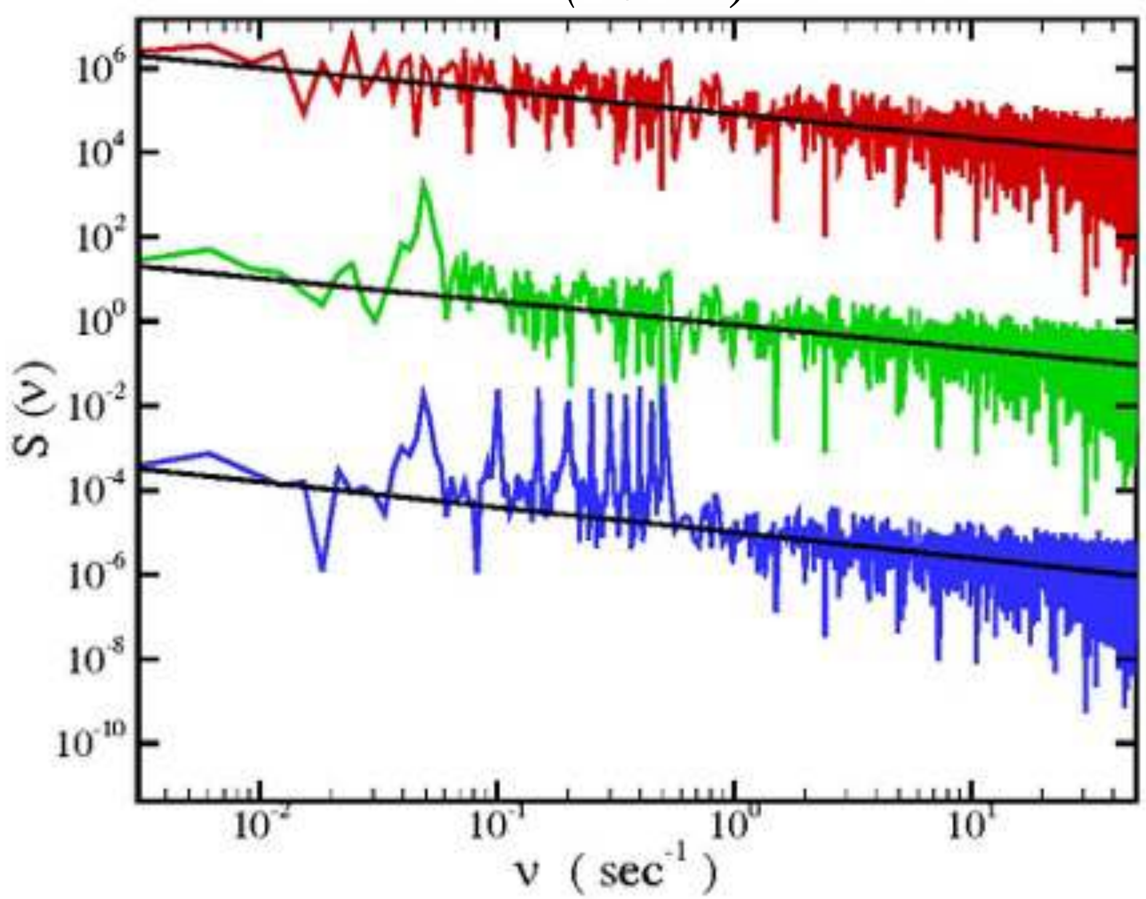
$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} x(t)\cdot x(t+\tau) dt \, e^{i\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(\int X(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega'\right)\left(\int X(\omega'') e^{i\omega''(t+\tau)} d\omega''\right) dt \, e^{i\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2T^2}(2\pi)^2 \delta(\omega-\omega'')\delta(\omega'+\omega) X(\omega) X^*(\omega)$$





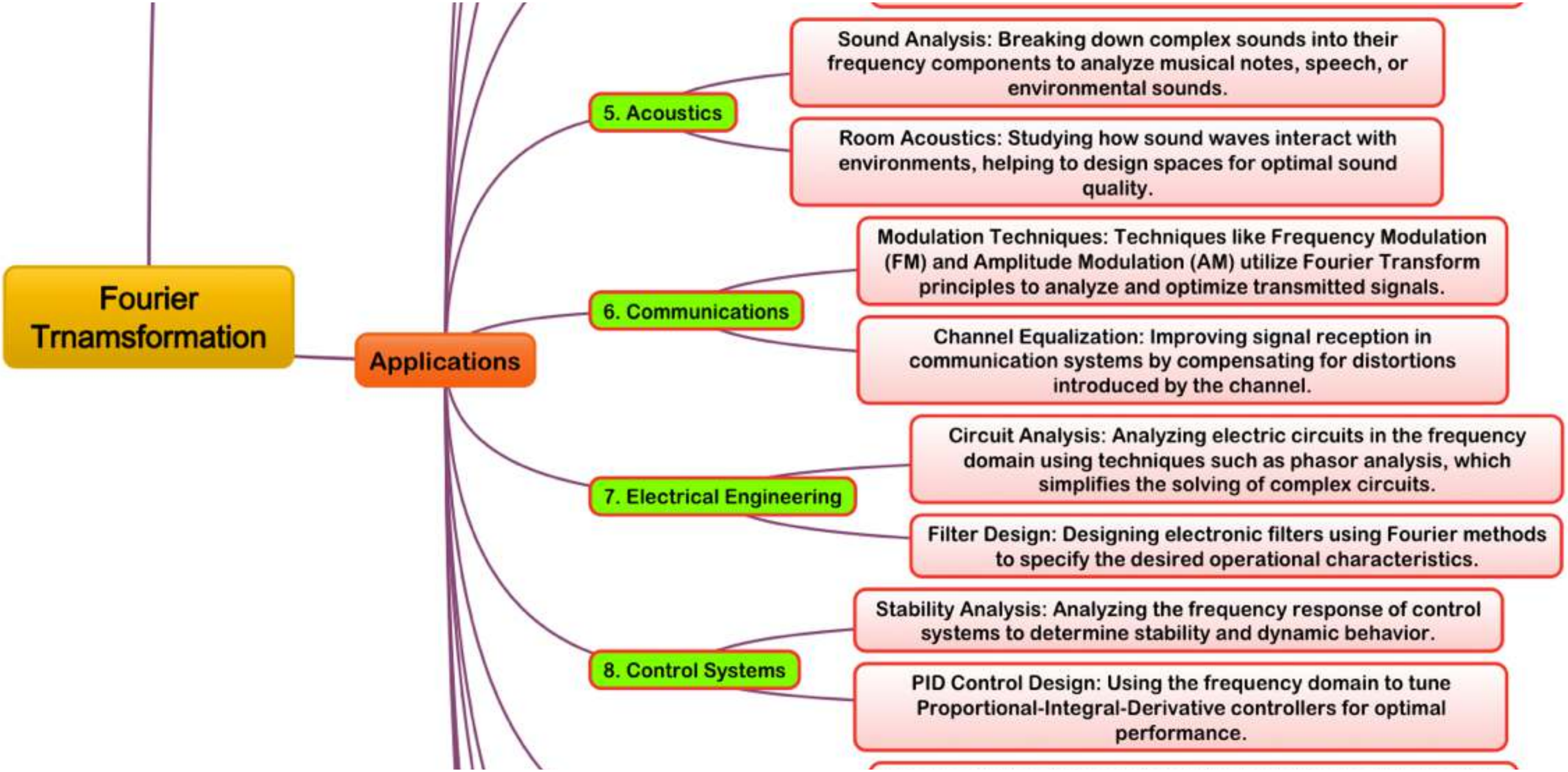


S.hajian and M.S. Movahed, Physica A 389 (2010) 4942 and S. Kimiagar, M.S. Movahed et .al., JSTAT/2009/P03020

Fourier Transformation (11)

- 1. Signal Processing
  - Frequency Analysis: Decomposing signals into their constituent frequencies, allowing for the analysis of harmonic content.
  - Filtering: Designing filters (low-pass, high-pass, band-pass) to remove unwanted noise or to isolate specific frequency components.
  - Compression: Techniques such as MP3 for audio and JPEG for images rely on Fourier transformation for data compression.
- 2. Quantum Mechanics
  - Wave Function Analysis: Fourier Transform allows the conversion of a wave function from position representation to momentum representation, crucial for determining probability distributions.
  - Spectral Analysis: Analyzing the energy levels of quantum systems by studying the Fourier components of wave functions.
- 3. Optics
  - Diffraction Patterns: Understanding and analyzing light diffraction in optical systems; Fourier Transform relates the aperture function to the resulting intensity pattern.
  - Image Processing: Enhancing images by manipulating their frequency components, including edge detection and image filtering
- 4. Vibration Analysis
  - Modal Analysis: Identifying natural frequencies and mode shapes of structures (buildings, bridges, machines) using responses to vibrations.
  - Condition Monitoring: Diagnosing mechanical faults in rotating machinery by analyzing vibration signatures in the frequency domain.

Fourier Transformation (12)



Fourier Transformation (13)

- **9. Image Processing**
  - Frequency Domain Operations: Enhancing images (sharpening, blurring) by modifying their frequency components through techniques like the Fast Fourier Transform (FFT).
  - Pattern Recognition: Identifying patterns and shapes by analyzing their frequency domain representation.
- **10. Medical Imaging**
  - Magnetic Resonance Imaging (MRI): Utilizing Fourier Transform to reconstruct images from the frequency data collected during scans.
  - Computed Tomography (CT): Analyzing data through Fourier techniques to produce cross-sectional images of the body.
- **11. Mathematics and Data Analysis**
  - Solving Partial Differential Equations: Fourier Transform is an effective method for solving PDEs, especially in heat transfer problems and wave equations.
  - Time Series Analysis: Analyzing periodic patterns in data, such as financial markets or climate data.
- **12. Seismology**
  - Earthquake Data Analysis: Analyzing seismic waves by decomposing them into frequency components to study geological features or predict future activities.
- **13. Fluid Dynamics**
  - Flow Analysis: Analyzing fluid motion and turbulence by decomposing velocity fields into Fourier modes.
- **14. Cryptography**
  - Signal Encryption: Some signal processing and encryption techniques use Fourier Transform methods to obscure original signals.

Ex: PDEs: Suppose that

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\qquad \text{initial condition}\quad y(x,0)=f(x)$$

از x نسبت تبدیل فوریه می‌گیریم:

① $(x,t)\rightarrow(\alpha,t)$

② $$Y(\alpha,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y(x,t)\,e^{i\alpha x}\,dx$$

③ $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}e^{i\alpha x}\,dx=\frac{1}{v^2}\int\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}e^{i\alpha x}\,dx$$

④ $$\boxed{(-i\alpha)^2\,Y(\alpha,t)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}Y(\alpha,t)}$$

پس ④ یعنی PDE → ODE حال شرط مرزی را اعمال می‌کنیم.

⑤ $$Y(\alpha,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{y(x,0)}_{f(x)}\,e^{i\alpha x}\,dx\equiv F(\alpha)$$

⑥ جواب ④ بصورت زیر است:

$$Y(\alpha,t)=F(\alpha)\,e^{\pm iv\alpha t}$$

⑦ $$y(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\alpha,t)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int F(\alpha)\,e^{-i\alpha(x\pm vt)}\,d\alpha$$

$$=f(x\mp vt)$$

$f(x-vt)$ موج در راستای $x>0$

$f(x+vt)$ موج در راستای $x<0$

وقتی به سمت راست $x>0$ می‌رویم شکل تابع در x بزرگتر معادل شکل تابع در $(x,0)$ در زمان قبلی است

پس $(x-vt)$

وقتی به سمت چپ $x<0$ می‌رویم شکل تابع در x های منفی‌تر معادل شکل تابع در $(x,0)$ در زمان قبلی

است پس $(x+vt)\rightarrow 0$

Fast Fourier Transform
vs.
Discrete Fourier Transform

How fast?

	CPU Time Required at 10^6 Flops	
N	Discrete Fourier Transform	Fast Fourier Trasform
10^3	1.0 sec	0.01 sec
10^6	10^6 sec = 12 days	20 sec
10^9	10^{12} sec = 32,000 years	3.0×10^5 sec = 8.3 hours

Fast Fourier Transformation (FFT)

$$x(0)\cdots x(N-1) \quad x(0)\cdots x((N-1)\Delta t) \quad T_{\min}=\Delta t \qquad \omega_{\max}=\frac{2\pi}{\Delta t}$$

$$T_{\max}=N\Delta t \qquad \omega_{\min}=\frac{2\pi}{N\Delta t} \qquad \Delta t\to\Delta\omega=\frac{2\pi}{N\Delta t} \quad \omega_k=\frac{2\pi k}{N\Delta t}$$

$$y_i=x(2j) \qquad z_j=x(2j+1)$$

$$Y_k=\frac{1}{N/2}\sum_{j=0}^{N/2-1} y_j e^{\frac{i2\pi kj}{N/2}}$$

$$Z_k=\frac{1}{N/2}\sum_{j=0}^{N/2-1} y_j e^{\frac{i2\pi kj}{N/2}} \qquad k=0\ldots N/2-1$$

$$X_k=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x(j) e^{\frac{i2\pi kj}{N}} \quad k=0\cdots N-1$$

$$X_k=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{M-1} x(2j) e^{\frac{i2\pi kj}{N}} + x(2j+1) e^{\frac{i2\pi k(2j+1)}{N}}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{M-1} y_j e^{\frac{i2\pi kj}{N}} + z_j e^{\frac{i2\pi k(2j+1)}{N}} = \frac{1}{2}\left[Y_k+e^{\frac{i2\pi k}{N}}Z_k\right] \quad k=0\ldots N/2-1$$

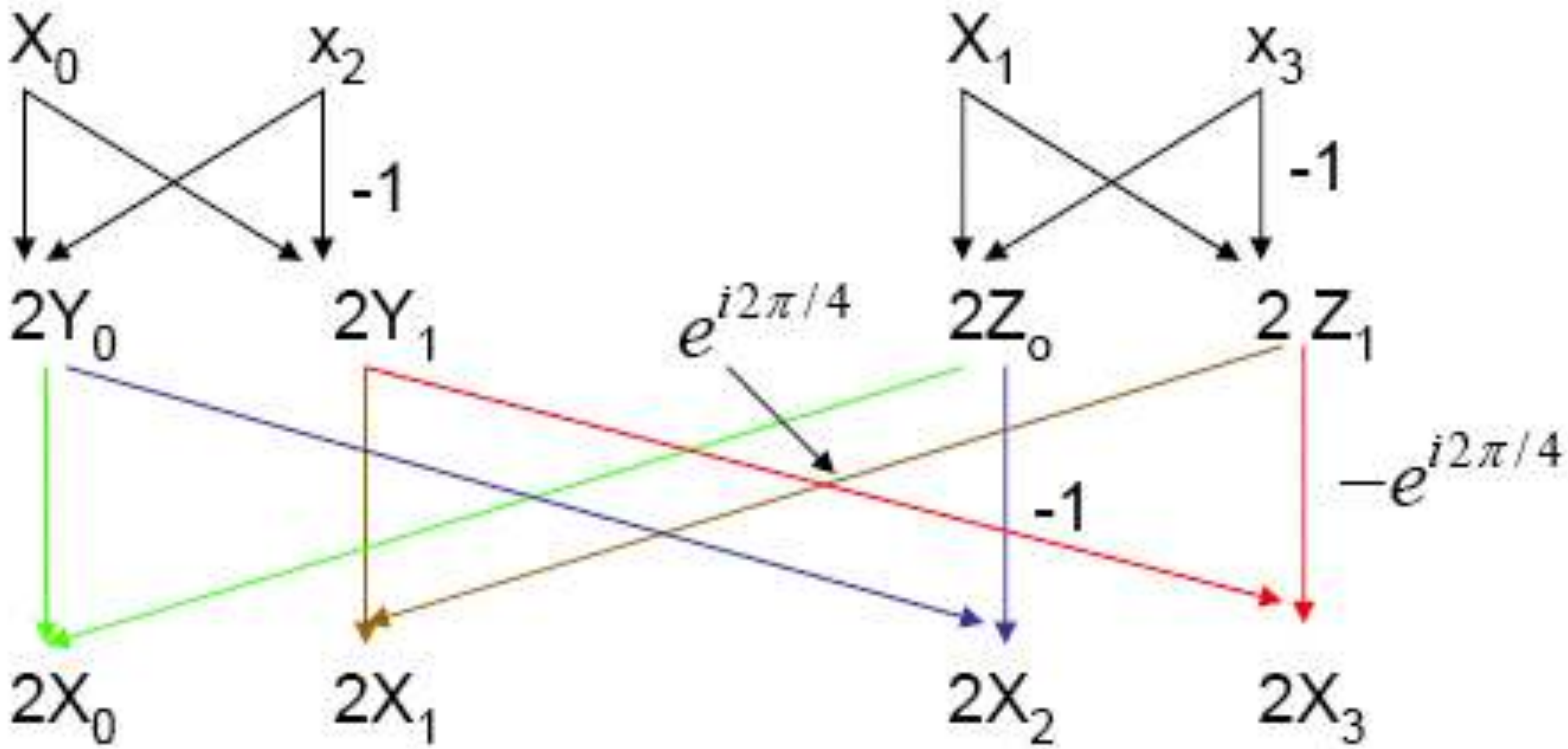
$$X_k=\frac{1}{2}\left[Y_k+e^{\frac{i2\pi k}{N}}Z_k\right] \quad k=N/2\ldots N-1$$

$$=\frac{1}{2}\left[Y_{k-\frac{N}{2}}+e^{\frac{i2\pi k}{N}}Z_{k-\frac{N}{2}}\right] \qquad k\to k+N/2 \quad k=0\ldots N/2-1$$

$$X_{k+\frac{N}{2}}=\frac{1}{2}\left[Y_k-e^{\frac{i2\pi k}{N}}Z_k\right] \quad k=0\ldots N/2-1$$

Butterfly diagram

X: $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$



$$X_0 = \frac{1}{2}\left\{Y_0 + Z_0\right\}$$

$$X_1 = \frac{1}{2}\left\{Y_1 + e^{i2\pi/4} Z_1\right\}$$

$$X_2 = \frac{1}{2}\left\{Y_0 + e^{i2\pi 2/4} Z_0\right\}$$

$$X_3 = \frac{1}{2}\left\{Y_1 - e^{i2\pi/4} Z_1\right\}$$

A sample for FFT by Fortran

```fortran
program fft_example
    implicit none
    integer, parameter :: N = 8
    complex(8) :: x(N), X(N)
    integer :: i

    ! Example input
    x(1) = (0.0, 0.0)
    x(2) = (1.0, 0.0)
    x(3) = (0.0, 0.0)
    x(4) = (1.0, 0.0)
    x(5) = (0.0, 0.0)
    x(6) = (1.0, 0.0)
    x(7) = (0.0, 0.0)
    x(8) = (1.0, 0.0)

    ! Calculate the FFT
    call fft(N, x, X)

    ! Print the result
    print *, 'FFT Result:'
    do i = 1, N
        print *, X(i)
    end do

end program fft_example
```

```fortran
subroutine fft(N, x, X)
     integer, intent(in) :: N
     complex(8), intent(in) :: x(N)
     complex(8), intent(out) :: X(N)
     integer :: m, k, n1, n2
     complex(8) :: t, u
     real(8) :: w, angle

     ! Bit-reversal permutation
     n1 = 1
     n2 = N / 2
     do while (n1 < N)
         do k = 1, n1
             if (k <= n2) then
                 t = x(k + n1)
                 x(k + n1) = x(k) - t
                 x(k) = x(k) + t
             end if
         end do
         n1 = n1 * 2
         n2 = n2 / 2
     end do

     ! FFT computation
     do n1 = 1, log(real(N)) / log(2.0)
         n2 = 1 << n1
         angle = 2.0 * acos(0.0) / real(n2)
         u = (1.0, 0.0)
         do m = 1, n2 / 2
             w = u
             do k = m, N, n2
                 t = w * x(k + n2 / 2)
                 x(k + n2 / 2) = x(k) - t
                 x(k) = x(k) + t
             end do
             u = (cos(angle * m), sin(angle * m)) * u
         end do
     end do

     X = x
 end subroutine fft
```

A sample for FFT by C++

```
#include <iostream>
#include <complex>
#include <vector>
#include <cmath>
using namespace std;
void fft(vector<complex<double>>& x) {
    int N = x.size();
    if (N <= 1) return;
    // Divide
    vector<complex<double>> even(N / 2);
    vector<complex<double>> odd(N / 2);
    for (int k = 0; k < N / 2; k++) {
        even[k] = x[k * 2];
        odd[k] = x[k * 2 + 1];
    }
    // Recursive FFT
    fft(even);
    fft(odd);
    // Combine
    for (int k = 0; k < N / 2; k++) {
        complex<double> t = polar(1.0, -2 * M_PI * k / N) * odd[k];
        x[k] = even[k] + t;
        x[k + N / 2] = even[k] - t;
    }
}
int main() {
    const int N = 8;
    vector<complex<double>> x = {
        {0.0, 0.0}, {1.0, 0.0}, {0.0, 0.0}, {1.0, 0.0},
        {0.0, 0.0}, {1.0, 0.0}, {0.0, 0.0}, {1.0, 0.0}
    };
    fft(x);
    cout << "FFT Result:" << endl;
    for (const auto& v : x) {
        cout << v << endl;
    }
    return 0;
}
```

A sample for FFT by Python

```
import numpy as np

def fft(x):
    N = len(x)
    if N <= 1:
        return x
    even = fft(x[0::2])
    odd = fft(x[1::2])
    combined = [0] * N
    for k in range(N // 2):
        t = np.exp(-2j * np.pi * k / N) * odd[k]
        combined[k] = even[k] + t
        combined[k + N // 2] = even[k] - t
    return combined

# Example usage
x = [complex(0.0, 0.0), complex(1.0, 0.0), complex(0.0, 0.0), complex(1.0, 0.0),
     complex(0.0, 0.0), complex(1.0, 0.0), complex(0.0, 0.0), complex(1.0, 0.0)]

fft_result = fft(x)
print("FFT Result:")
for val in fft_result:
    print(val)
```

A sample for FFT by Fortran (2D)

```
module params
use numerical_libraries
implicit none
real(8),parameter:: num=1024        !************ The pixels of simulated map
real(8),parameter:: size=7.2        !************ The size simulated map
real(8),parameter:: FWHM1=5         !************ The FWHM of beam  As a Planck-like instrument
real(8),parameter:: snr=10          !***********S/N
character(256) ::numstr,numstring,numstr1
real(8) coef15(0:num-1,0:num-1),
INTEGER    runpower,IR, IS, J, LDA, LDCOEF, NCA,
COMPLEX(8)    C, CEXP, CMPLX,
COEF(num,num),coef_cmb(num,num),fourier_temp(num,num),coef180(num,num),INTRINSIC  CEXP, CMPLX, FLOAT
end module params
```

A sample for FFT by Fortran (2D)

```
use params
implicit none
INTEGER, PARAMETER:: double=SELECTED_REAL_KIND(15,307)
real(double)    CHSQ,DF1,t2,chi_sq_GSN_GN,t_GSN_GN(0:10000)
integer         LDB,num11,map_rin
Print*,'This program generate map including CMB-S4 Beam'

Print*,'The value of FWHM in arcmin'
read*,FWHM
pi=4*atan(1.0)
theta_c=theta_c1*pi/180
l_kc=2*pi*d_c*ferquency_c/(theta_c*cc)
         call random_seed
         call initial_condition
         call noise
         call gaussian_map

!********* Power spectrum (G+S)_beam
n_run=1
write(numstr,*) n_run
numstring='power_GS_beam.'//trim(adjustl(numstr))
open(7570000,file=numstring)
power=0
l_angular=0
yu=0
st=0
do i=0,num-1
do j=0,num-1
st(i,j)=tempGS_beam(i+1,j+1)
enddo
enddo
call power_spectrum
do k=mink,maxk
p(k)=p(k)/numm(k)
yu=yu+1
power(yu)=(2*pi)*p(k)*((360.0/size)*delta*k)**2
l_angular(yu)= (360.0/size)*delta*k
write(7570000,*)l_angular(yu),power(yu)
endif
enddo
```

A sample for FFT by Fortran (2D)

```
!********************** Power spectrum computation
subroutine power_spectrum
use params
im=(0,1)
lda=num
nca=num
nra=num
LDCOEF=num
pi=4*atan(1.0)
L=size*pi/180
maxk1=-100000000
maxk2=maxk1
numm=0
p=0
coef14=0
mink=1000000
maxk=-1000000
!******************* make a forward fourier transformation of st(i,j) **********

CALL DFFT2D (NRA, NCA, st, LDA, COEF14, LDCOEF)
coef15=(real(coef14))**2+(real(coef14*(-im)))**2     !****** T(K)**2

delta=1.0

do i=0,num-1
do j=0, num-1
k=int(sqrt((i*1.0+1.0)**2+(j*1.0+1.0)**2)/delta+wwz)-wwz
p(k)=p(k)+coef15(i,j)
if(k.le.mink)then
mink=k
endif

if(k.ge.maxk)then
maxk=k
endif
numm(k)=numm(k)+1
enddo
enddo

end subroutine power_spectrum
```

The FFT and Quantum Wave-packet Motion

Q. Wave Packet (FFT)

بسم الله الرحمن الرحیم

معادله شرودینگر معادله دیفرانسیل - جزئی متداولی است که می‌خواهد اطلاعات درخصوص دینامیک تابع و دینامیک تعادلی سیستم‌های کوانتومی به دست دهد. شکل این معادله درصورتی که وابستگی زمانی داشته باشد به صورت زیر است:

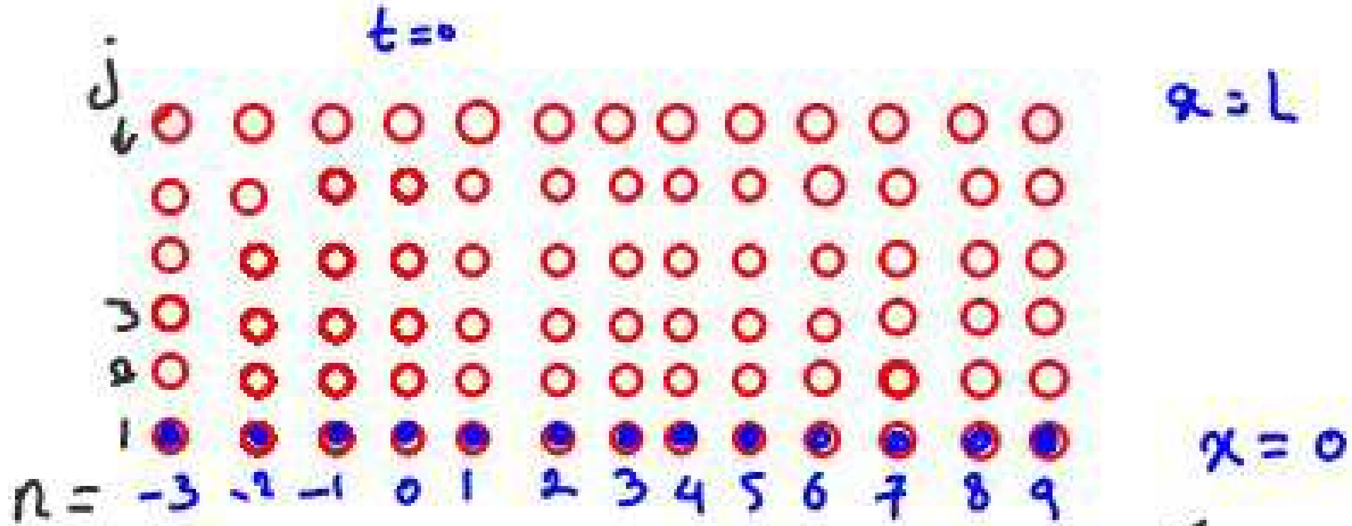
$$1D \rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t)$$

حل این معادله به صورت زیر است:

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,\psi(x,0)$$

$$H \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

The FFT and Quantum Wave-packet Motion



همانطور که در شکل بالا مشاهده می‌شود باید گسسته سازی کرد:

$$0 \leqslant x \leqslant L \longrightarrow h \equiv \Delta x = \frac{L}{N}$$

$$\tau = \Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_j = hj \\ j = 0, \ldots, N \\ t_n = n\tau \end{cases}$$

پس تابع موج در (x_j, t_n) به صورت ψ $\psi_j^n(x_j, t_n)$ است.

همچنین پتانسیل به صورت $V_j = V(x_j)$

Time Evolution (FT)

اکنون که شرایط مرزی را مشخص کردیم آماده‌ایم که به صورت گسترده معادله را حل کنیم پس

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\, \psi \equiv (\tau + \nu)\, \psi$$

τ : Differential operator
ν : Multiplicative operator
$\Big\}$ in Position space

با توجه به تبدیل فوریه $x \longrightarrow p$ خواهیم داشت:

$$\tilde{\psi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \exp\left(-i \frac{px}{\hbar}\right) \psi(x,t)$$

پس در فضای فوریه داریم:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \int e^{+i\frac{px}{\hbar}}\, \tilde{\psi}(p,t)\, dt$$

$$= -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int e^{+i\frac{px}{\hbar}}\, \tilde{\psi}(p,t)\, dt$$

$$+ \int \tilde{V}(q)\, e^{\frac{iqx}{\hbar}}\, dq \int \tilde{\psi}(p)\, e^{ipx/\hbar}\, dp \, \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

یعنی:
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}(p,t) = \frac{p^2}{2m}\tilde{\psi}(p,t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{V}(p-q)\,\tilde{\psi}(q)\,dq$$

همانطور که ملاحظه می‌شود در فضای اندازه حرکت T یک عملگر ضربی است در حالی که پتانسیل عملگر [illegible] است.

قبلاً دیدیم که حل معادله به صورت:

$$\psi(x,t) = e^{-i(T+V)\frac{(t-t_0)}{\hbar}}\,\psi(x,t_0)$$

$$\psi(x,t+\tau) = e^{-i(T+V)\frac{\tau}{\hbar}}\,\psi(x,t)$$

با توجه به عبارت:

$$e^{A}e^{B} = e^{C}$$

$$C = A + B + \tfrac{1}{2}[A,B] + \cdots$$

پس

$$e^{-i\frac{(T+V)}{\hbar}\tau} \simeq e^{-i\frac{T\tau}{\hbar}}\,e^{-i\frac{V\tau}{\hbar}}$$

یا

$$= e^{-i\frac{V\tau}{2\hbar}}\,e^{-i\frac{T\tau}{\hbar}}\,e^{-i\frac{V\tau}{2\hbar}}$$

اکنون آماده‌ایم شروع کنیم یعنی:

Initial value

$$\text{①}\quad \psi(x,t) \rightarrow \psi'(x) = e^{\frac{iV\tau}{2\hbar}}\,\psi(x,t)$$

$$\text{②}\quad \tilde{\psi}'(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\,\psi'(x)$$

$$\text{③}\quad \tilde{\psi}'(p) \rightarrow \tilde{\psi}''(p) = e^{-\frac{ip^2\tau}{2m\hbar}}\,\tilde{\psi}'(p)$$

$$\text{④}\quad \psi''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{+\frac{ipx}{\hbar}}\,\tilde{\psi}''(p)$$

$$\text{⑤}\quad \psi(x,t+\tau) = e^{-\frac{iV(x)\tau}{2\hbar}}\,\psi''(x)$$

پس برای هر τ در طول زمان جلو می‌رویم تا به t_n برسیم. البته در حالت گسسته توجه کنید که

$-\infty < x < +\infty \longrightarrow 0 < x < L \;,\quad x_j = j\frac{L}{N} = jh \;,\quad j = 0, \dots, N-1$

$-\infty < p < +\infty \longrightarrow -\frac{N}{2}\frac{2\pi\hbar}{L} < p < \frac{N}{2}\frac{2\pi\hbar}{L} \;,\quad p_k = \frac{2\pi\hbar}{L}k \;,\quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm N/2$

شرط تناوبی در

$e^{\frac{ipL}{\hbar}} = 1$

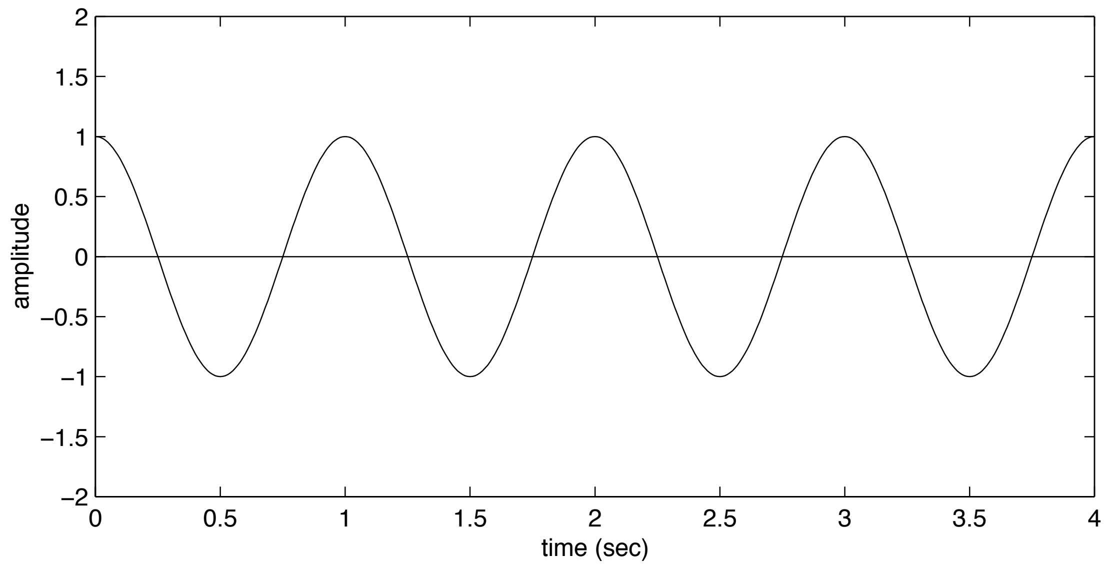
$\psi(0,t) = \psi(L,t)$

Exercise: $\psi(x,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{1/4} e^{ik_0x - \frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}}$

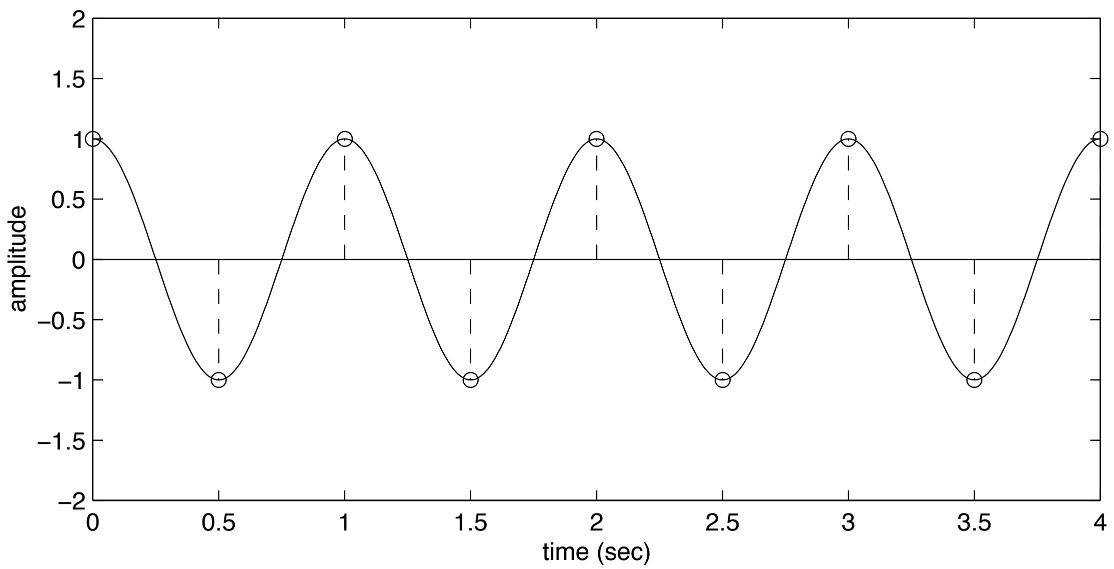
Part 3:
Alias effect
&
Nyquist sampling

Nyquist Frequency

Bruno A. Olshausen
PSC 129 - Sensory Processes

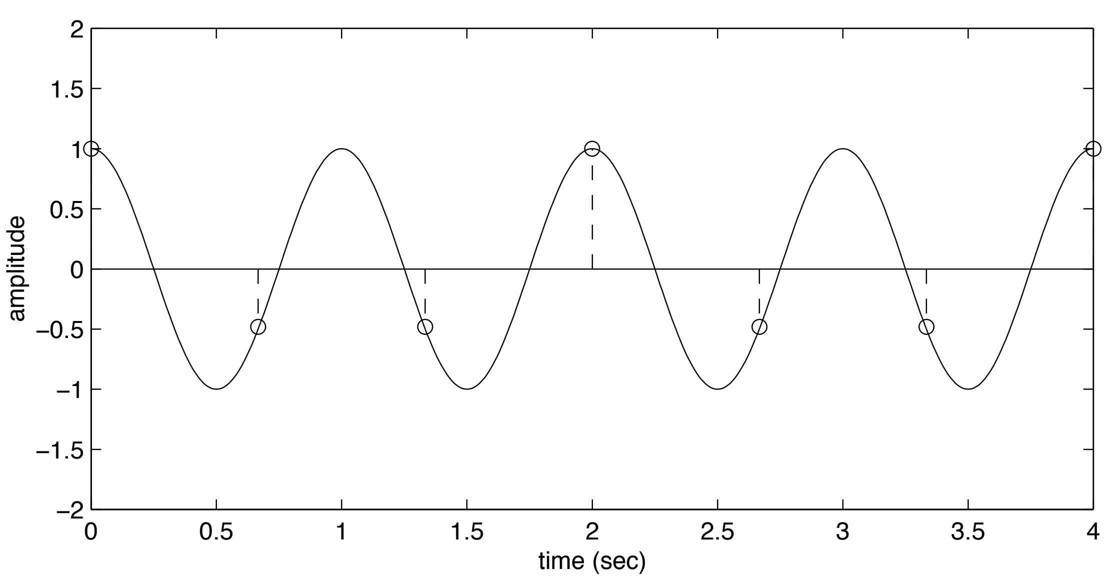


f_s=1Hz

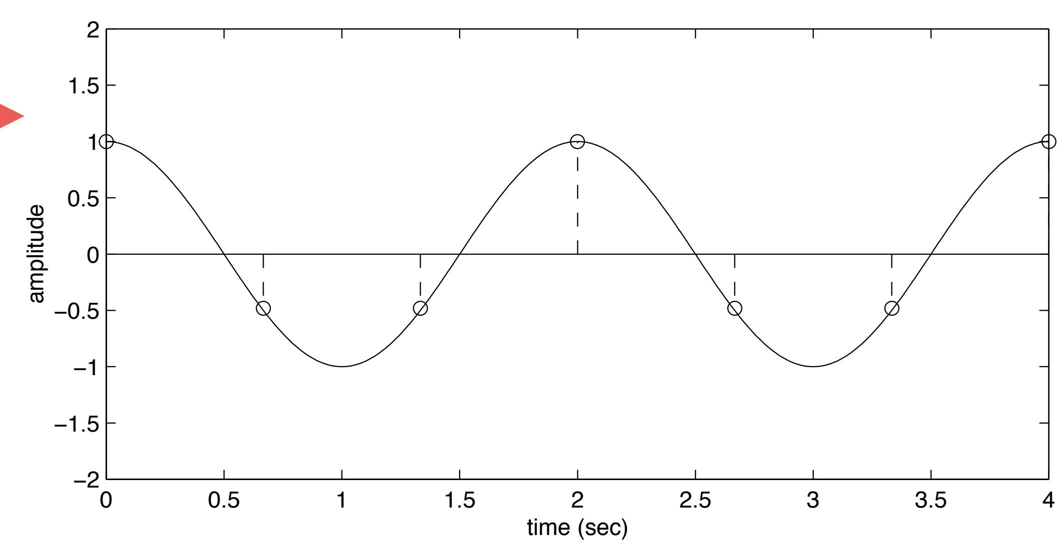


f_N=2Hz

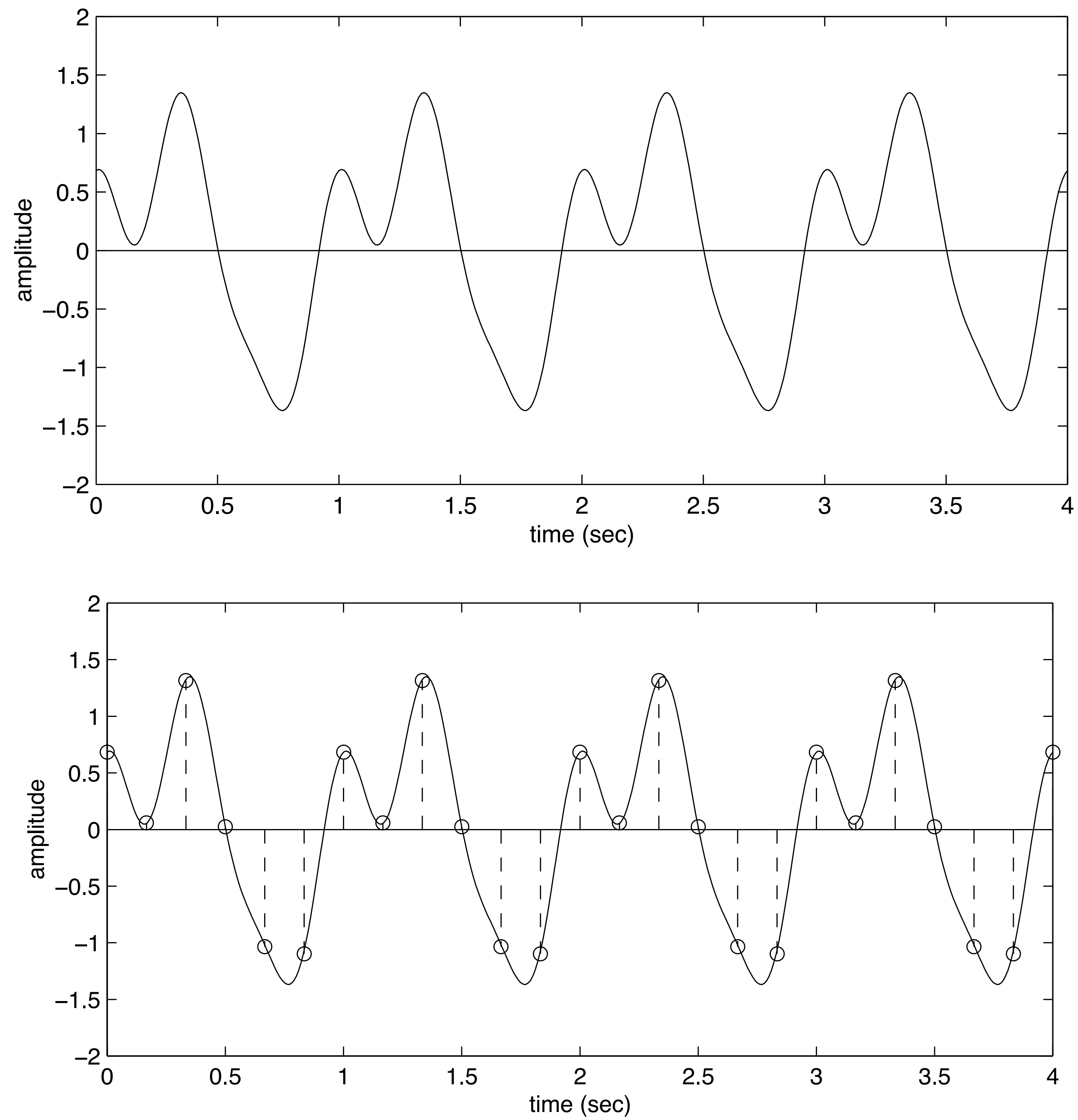
Losing information as well as getting wrong information



1.5Hz



A series includes 1 Hz, 2 Hz, and 3 Hz frequencies



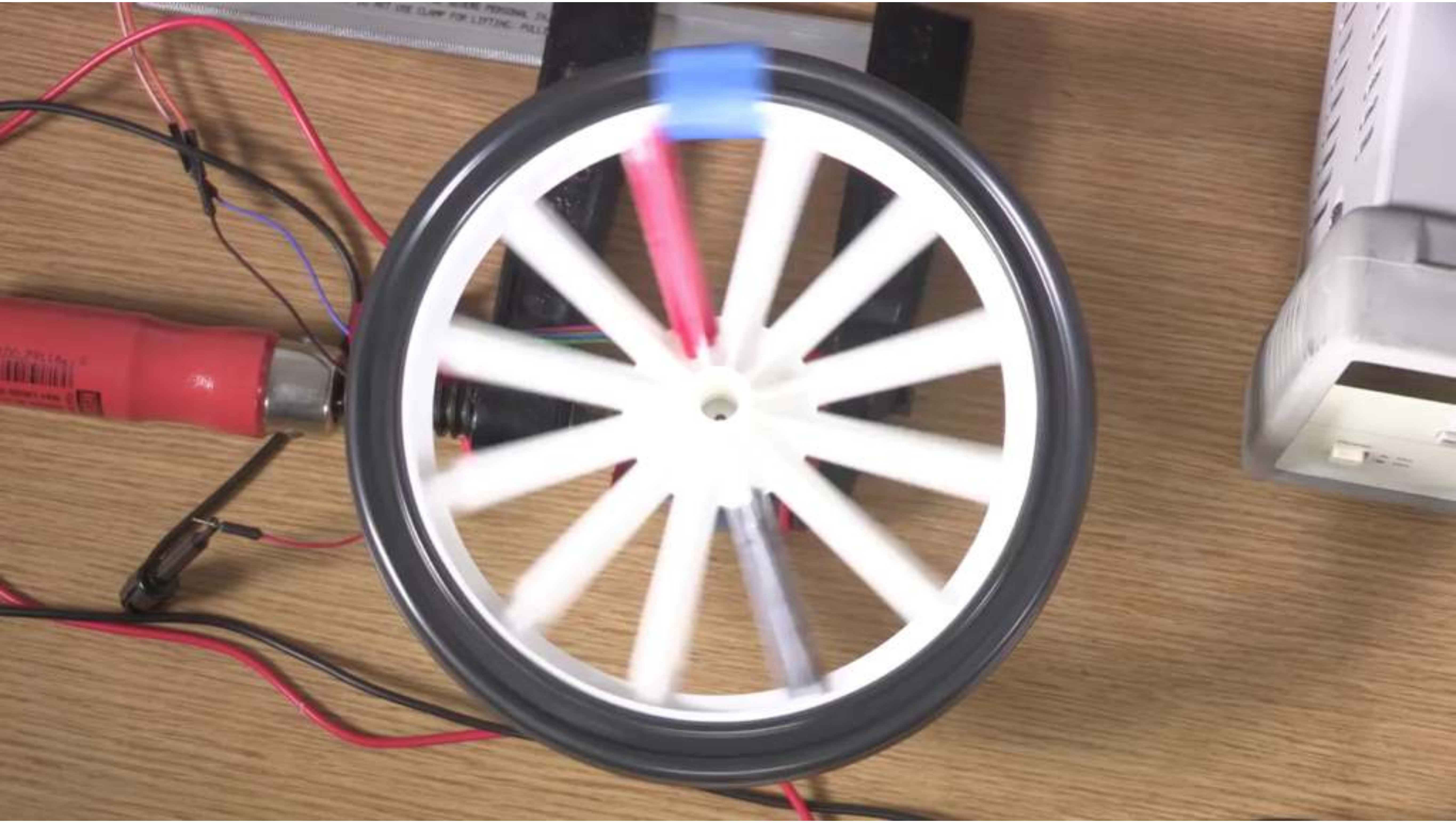
f_N>2f_s

f_N>6Hz

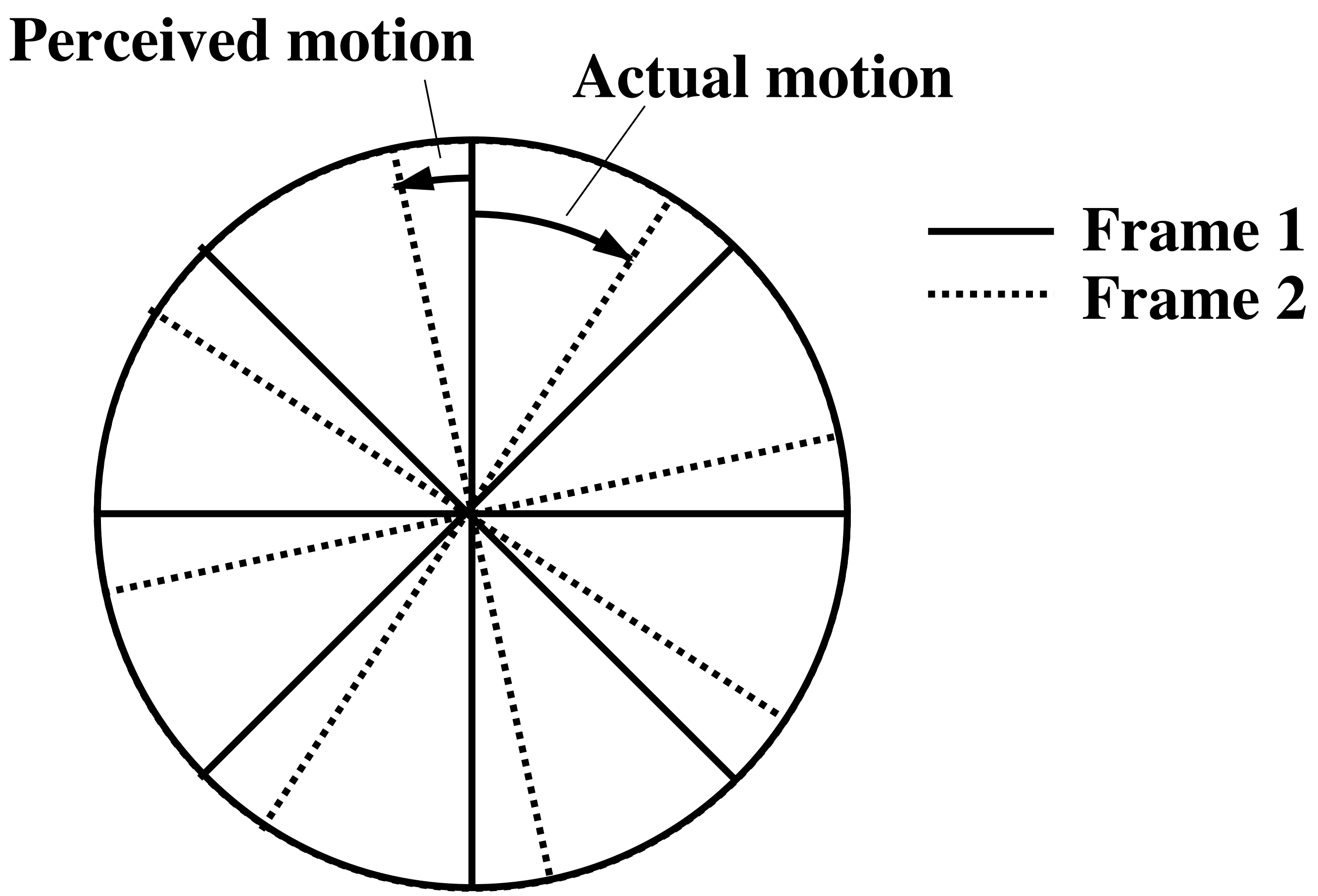
Bruno A. Olshausen
PSC 129 - Sensory Processes

symboles correspond to 6 Hz sampling rate

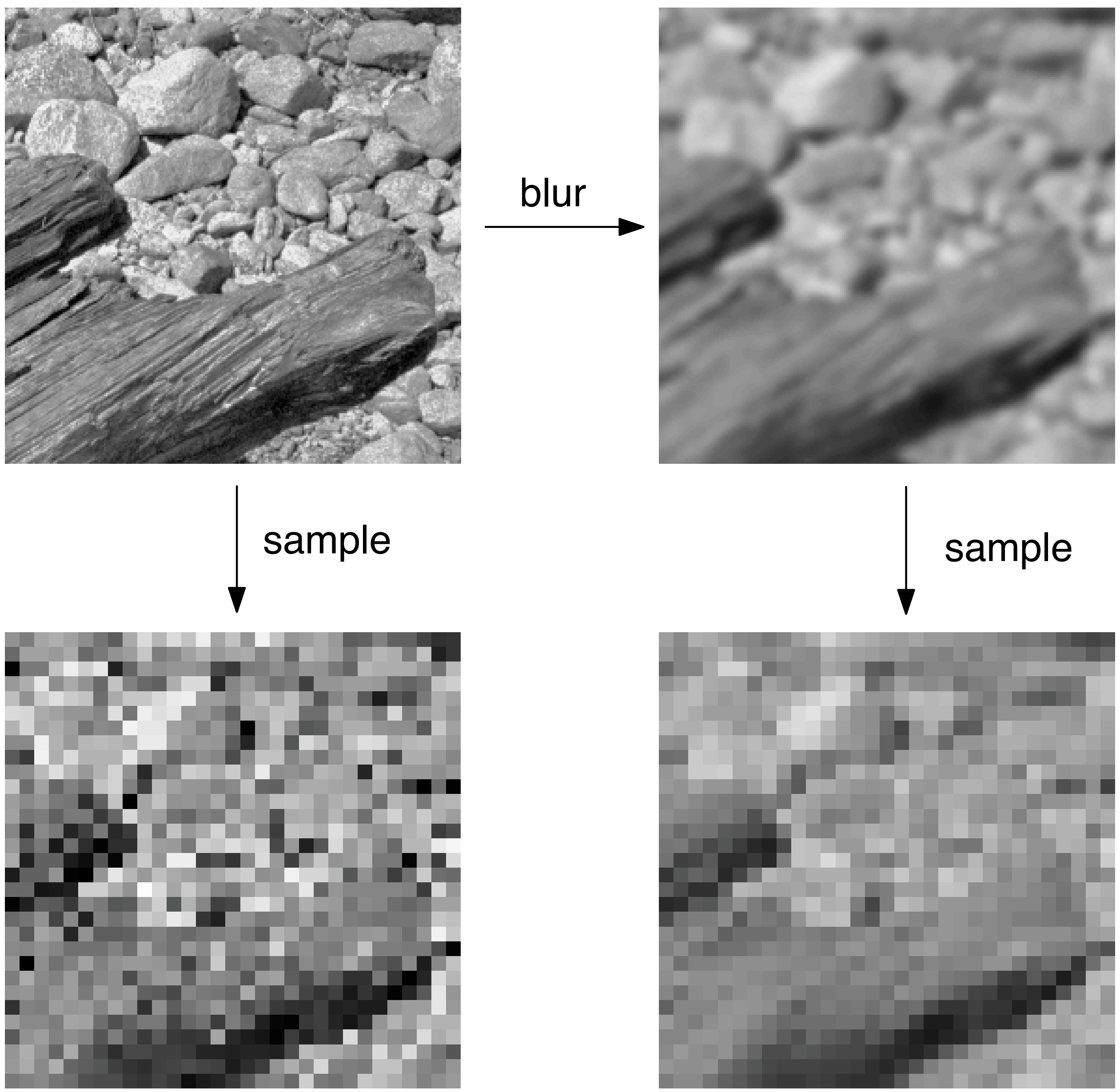
Wagon wheel effect

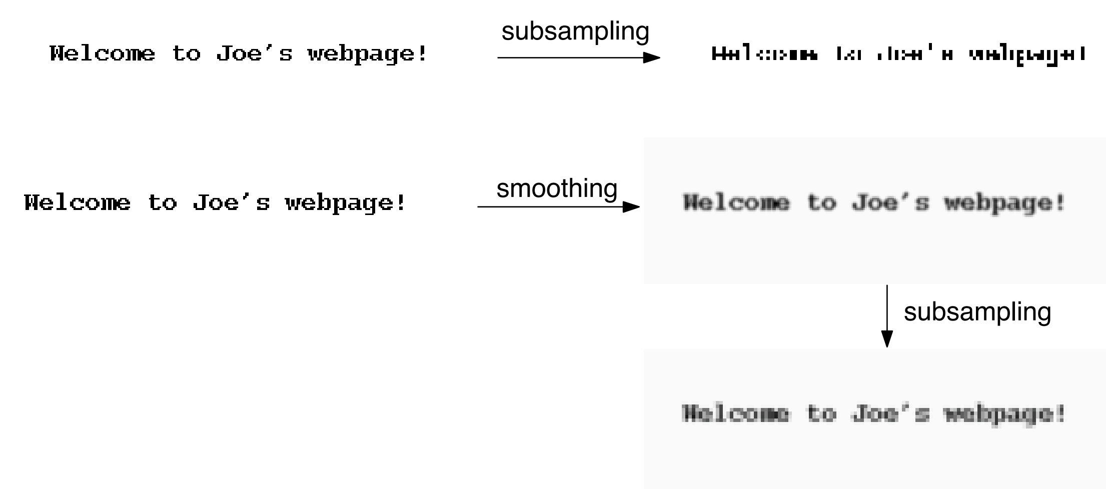


Wagon wheel effect



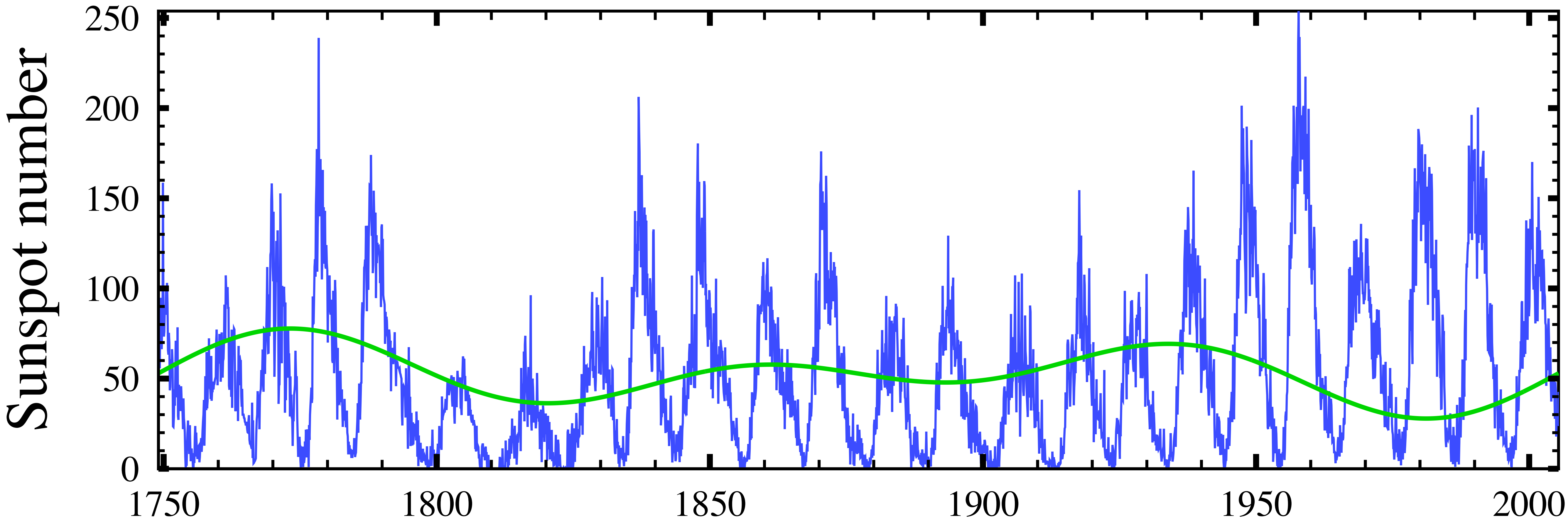
Alias effect



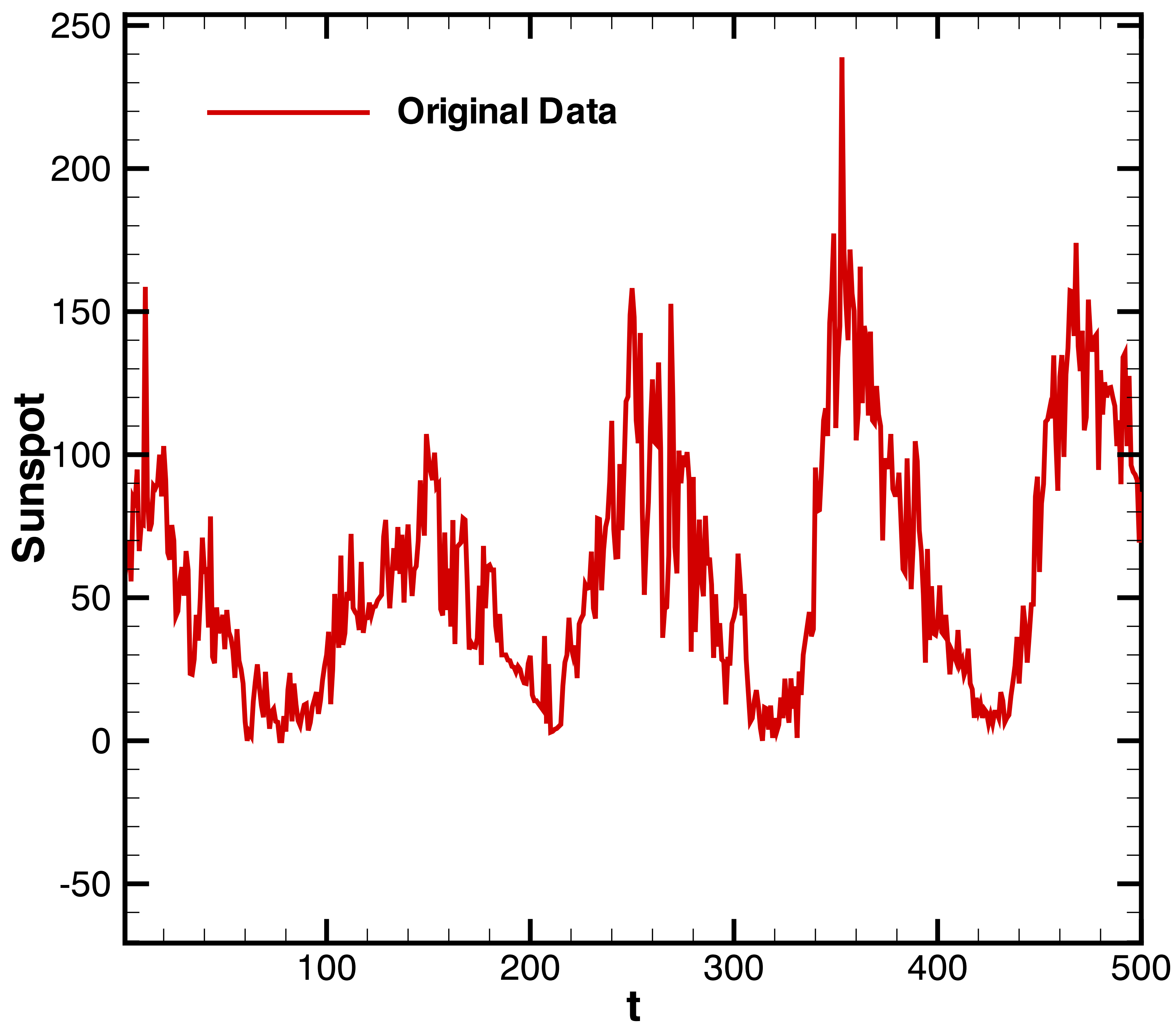


Part 4:
Filter construction

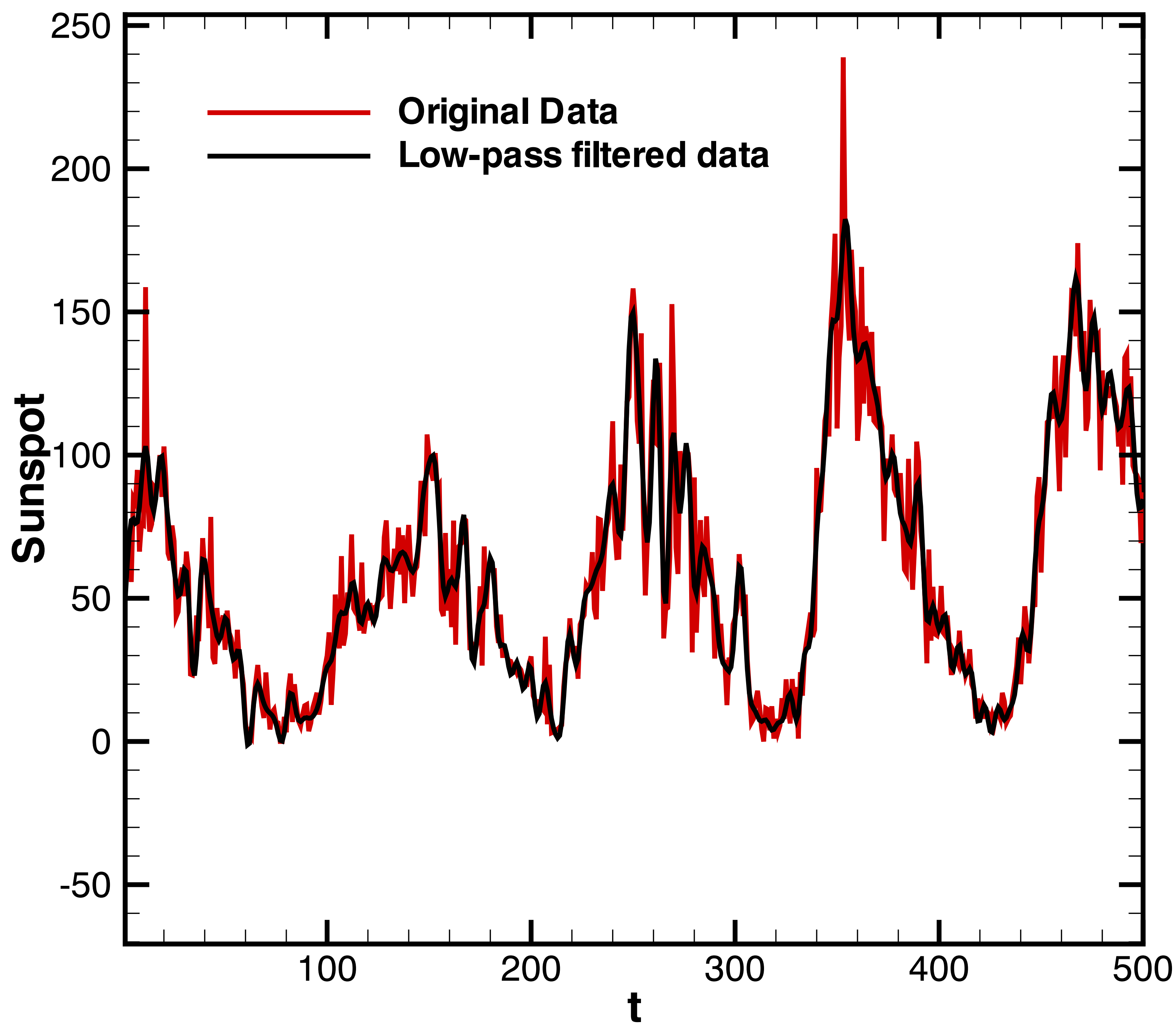
Generic examples



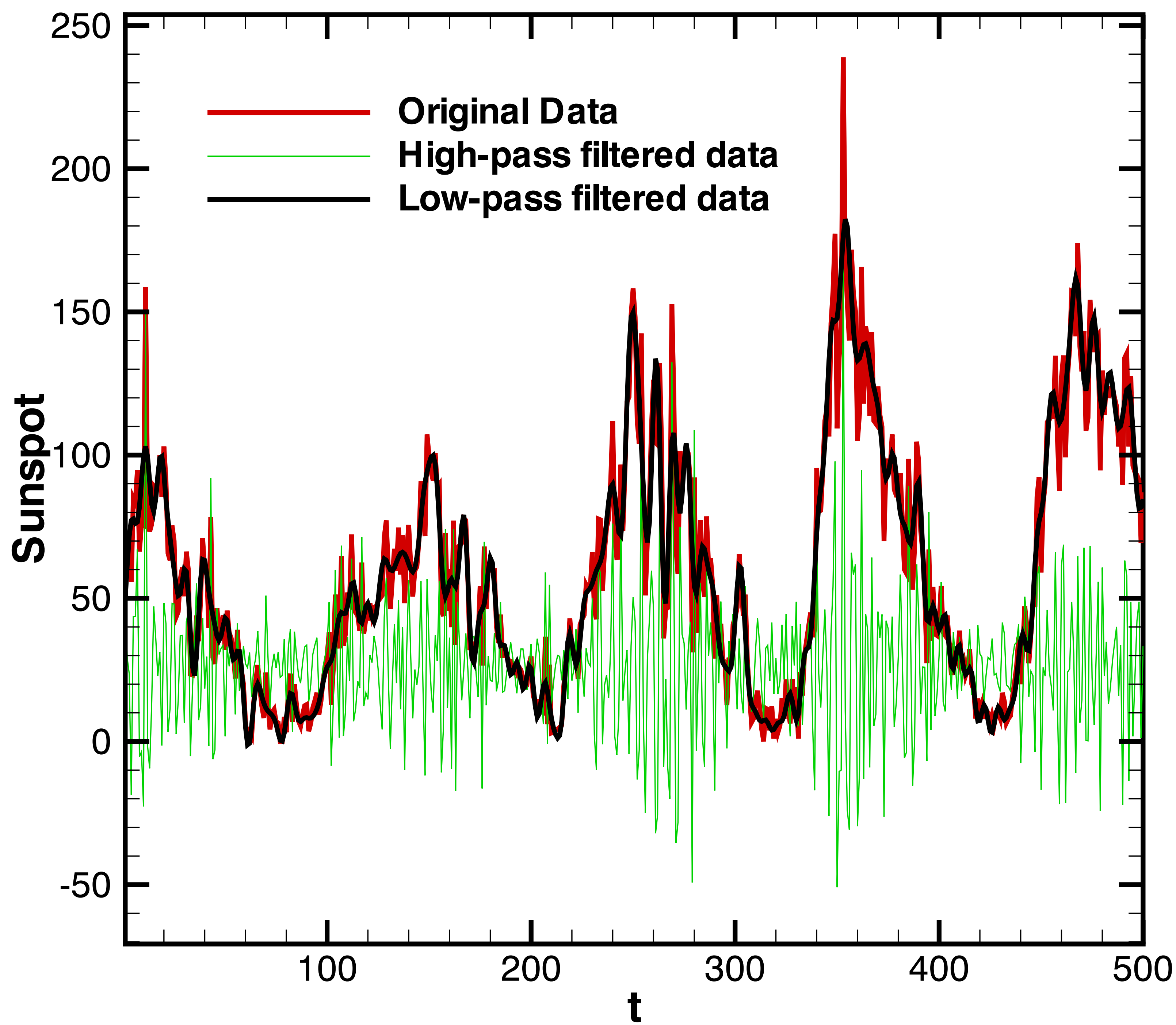
Generic examples



Generic examples



Generic examples



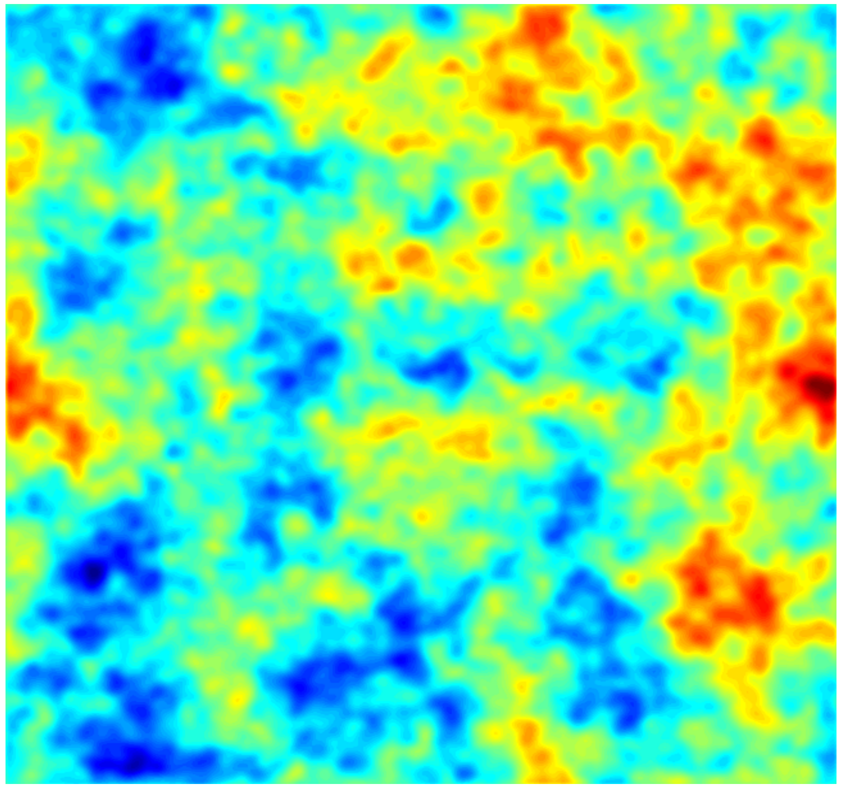
Convolution

Our search proposal

First: what is the lower limit of CS intensity identified in the observations?

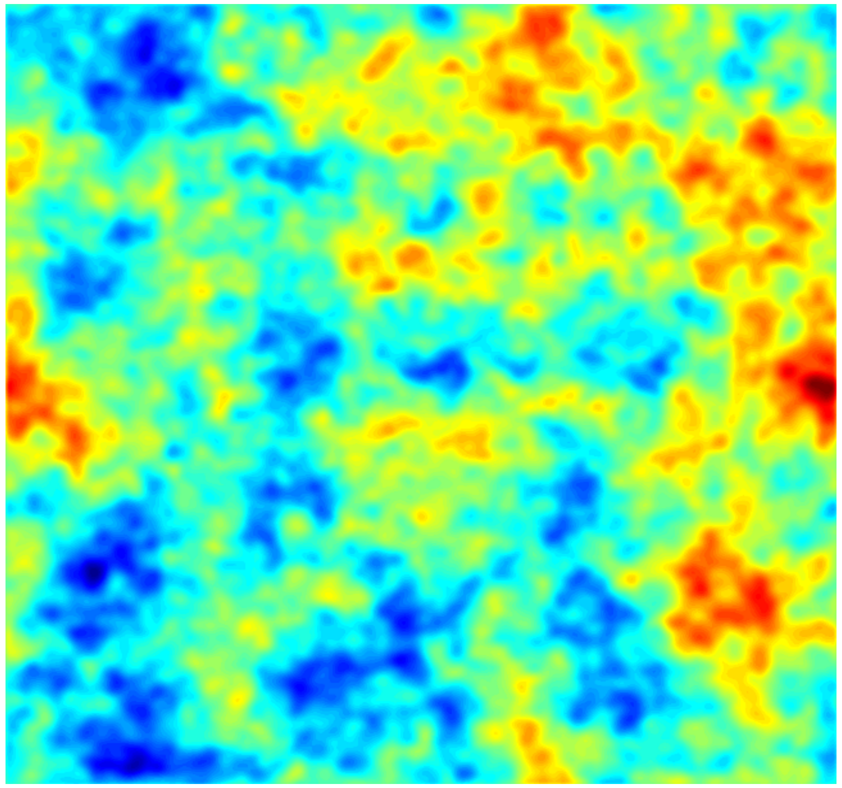
Vafaei Sadr, A., et al., MNRAS, 478.1 (2018): 1132-1140; Vafaei Sadr, A., et al., MNRAS, 475.1 (2017): 1010-1022.

Our search proposal



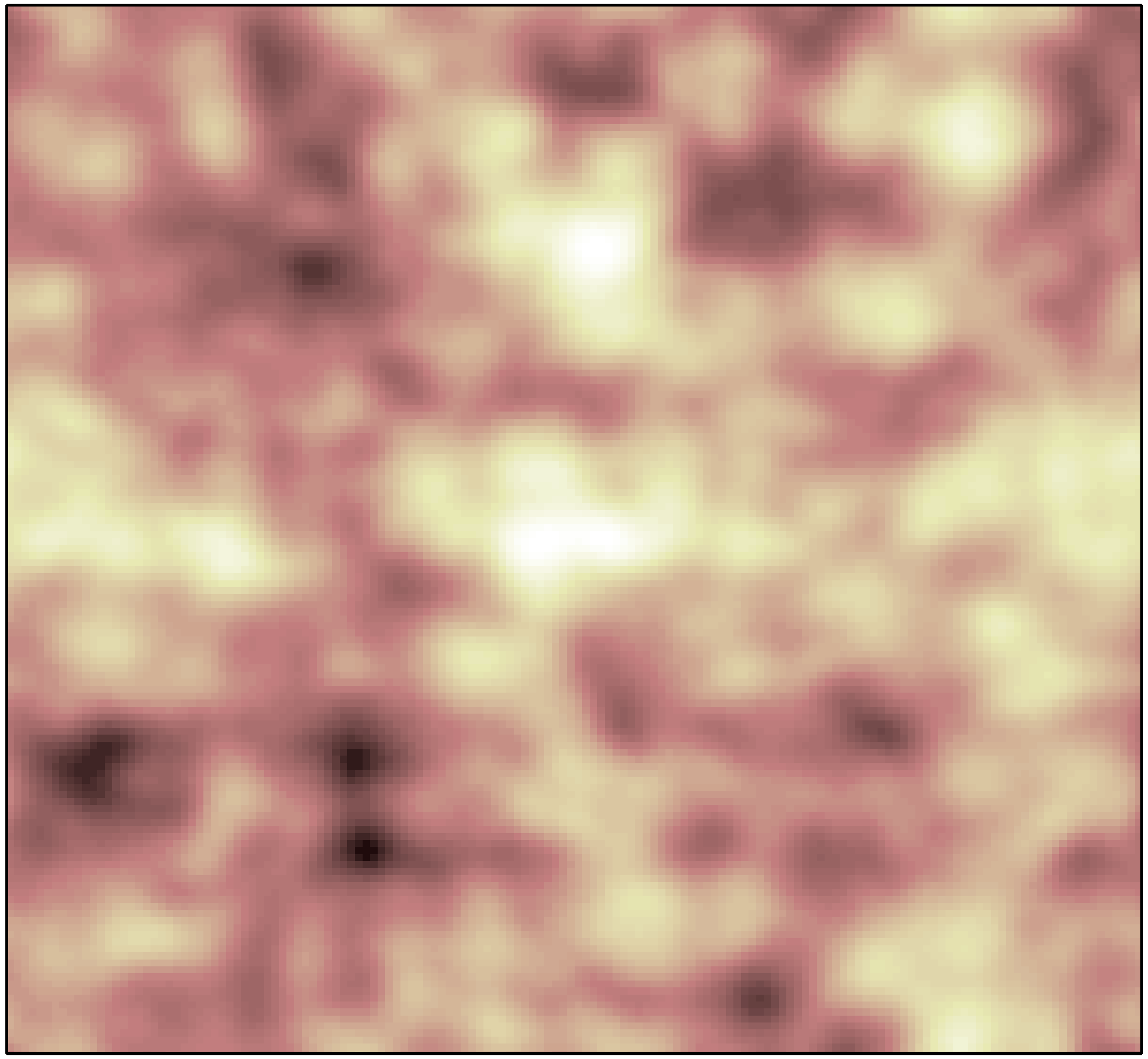
Pure CMB+Beam

Our search proposal

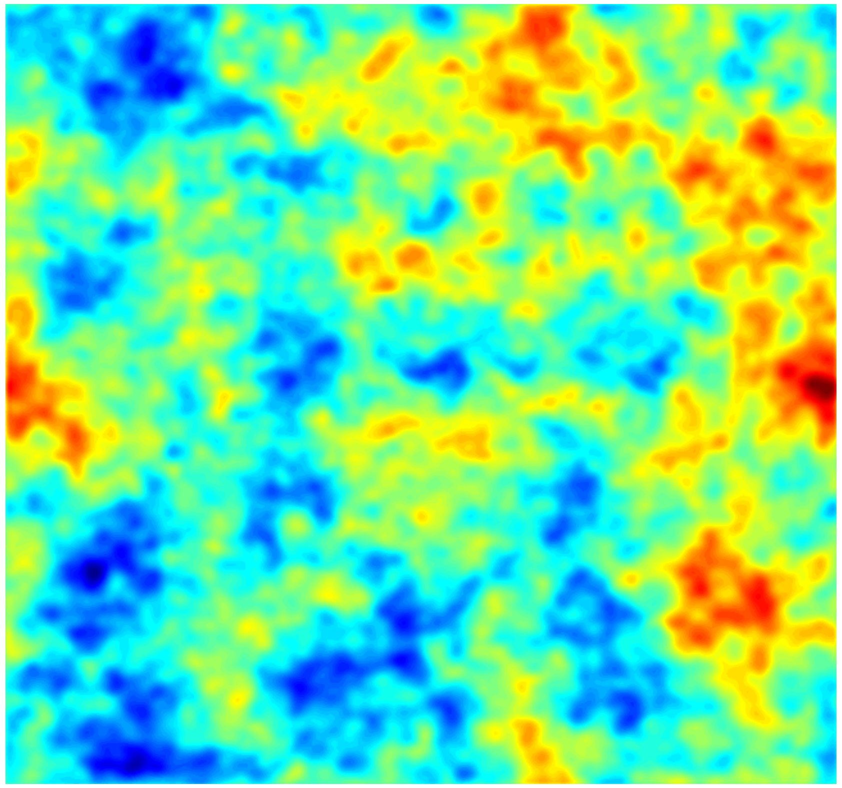


Pure CMB+Beam

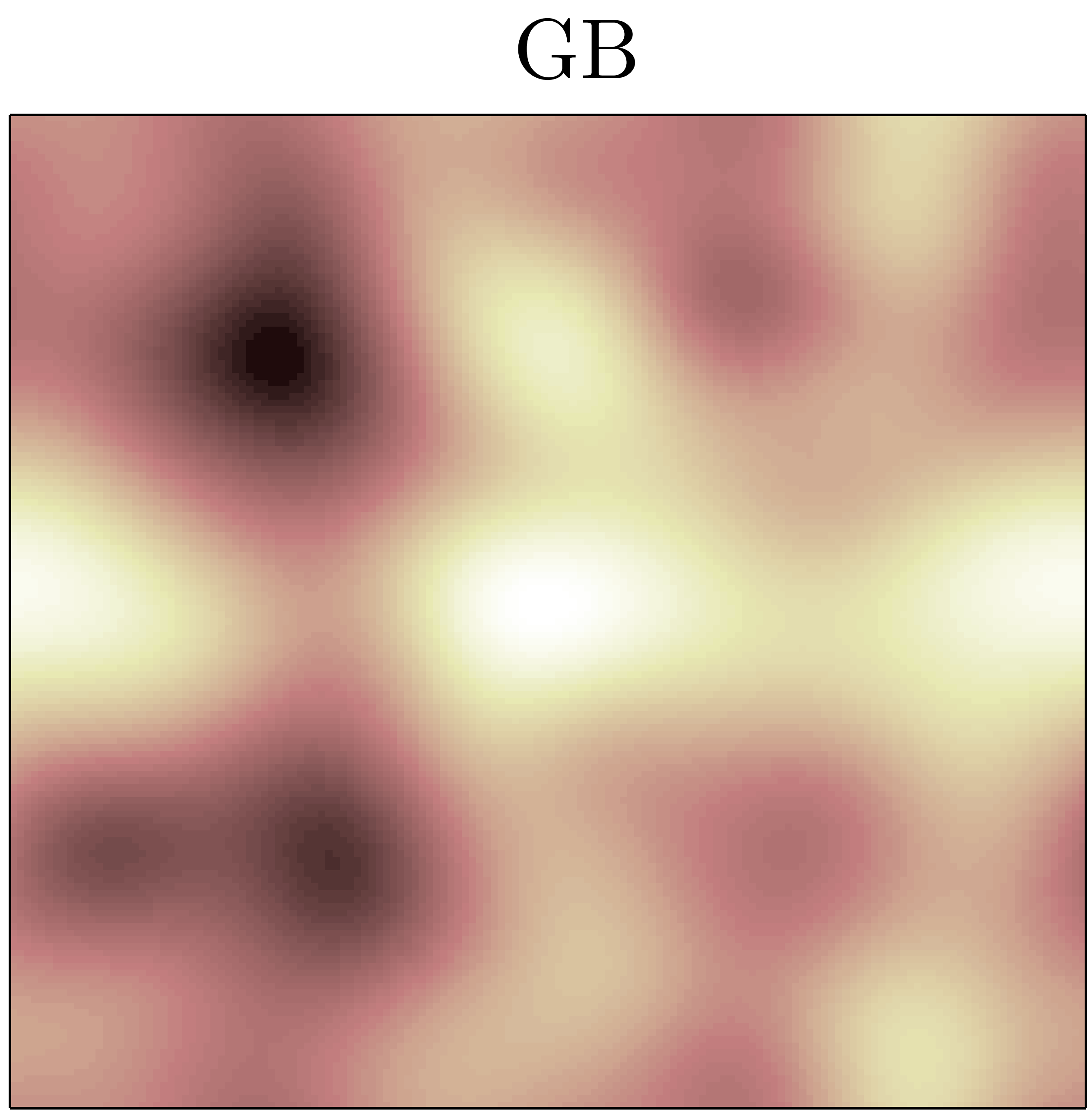
G



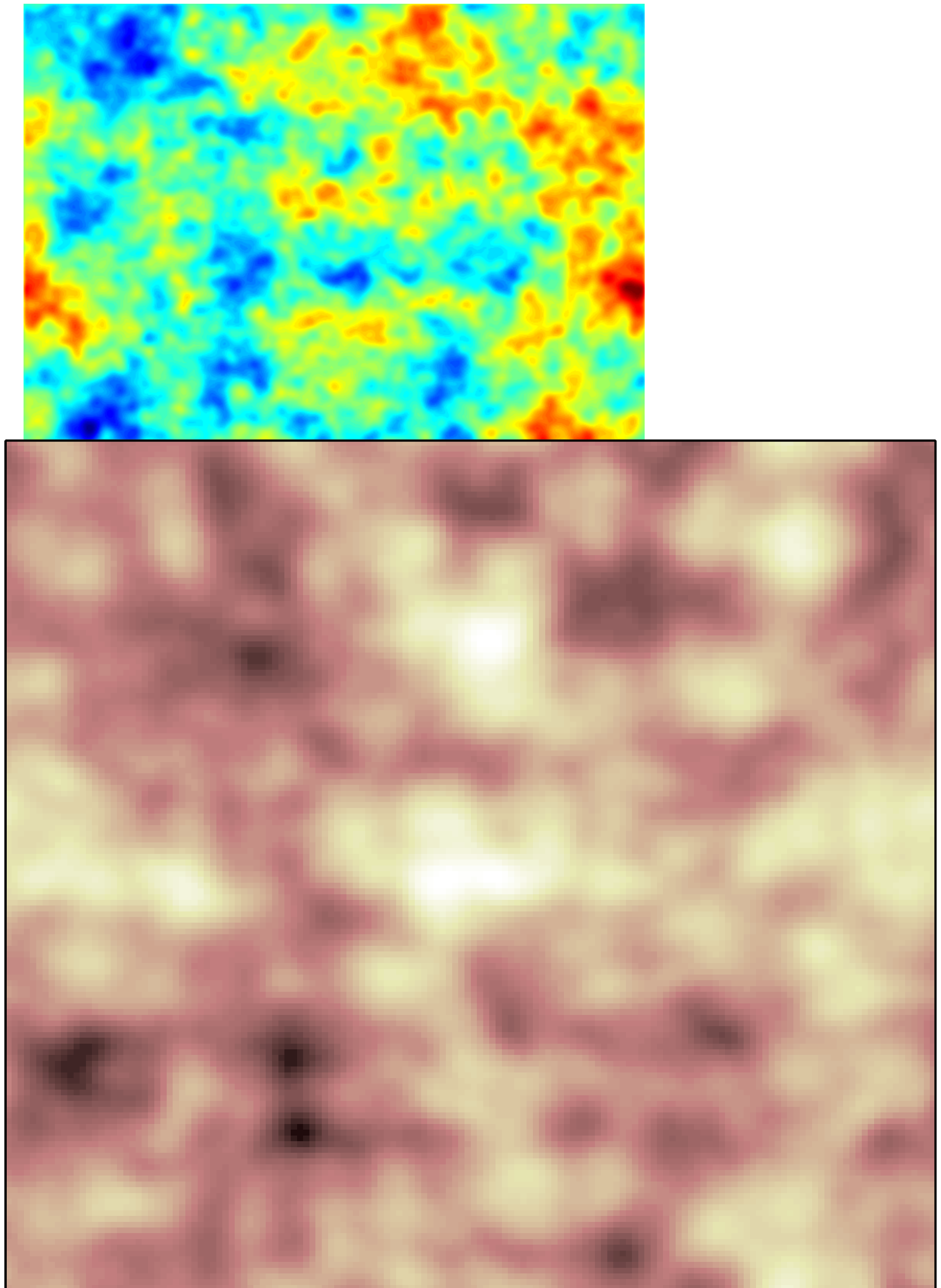
Our search proposal

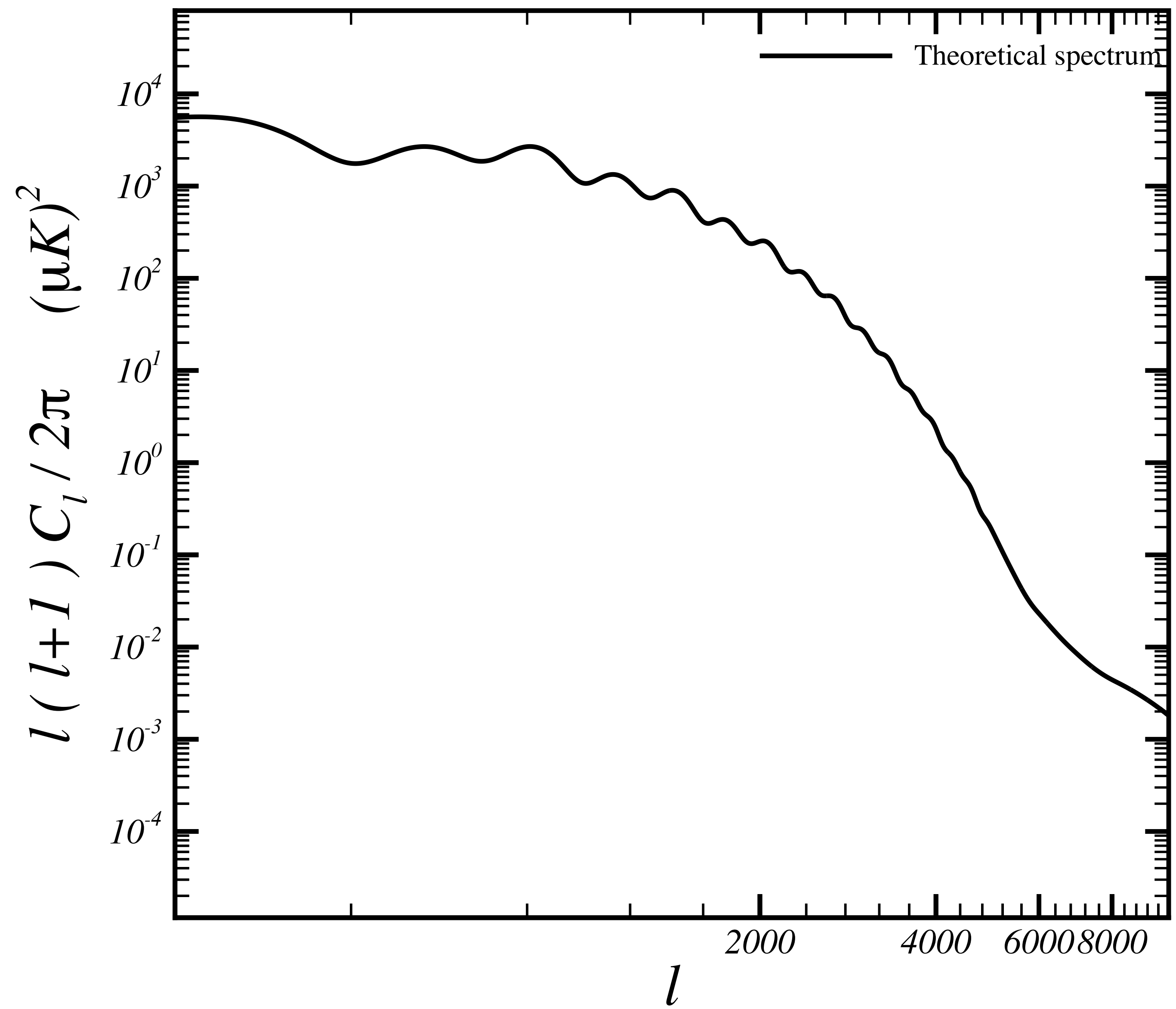


Pure CMB+Beam

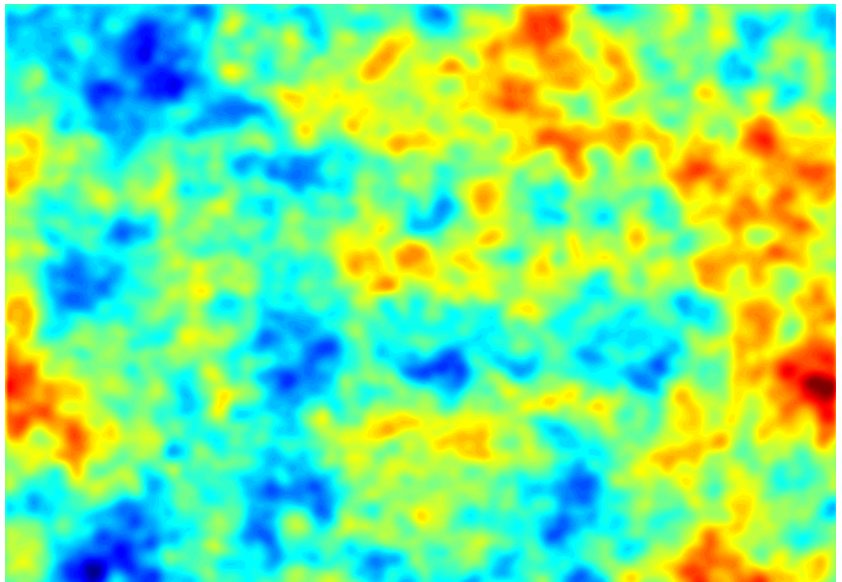


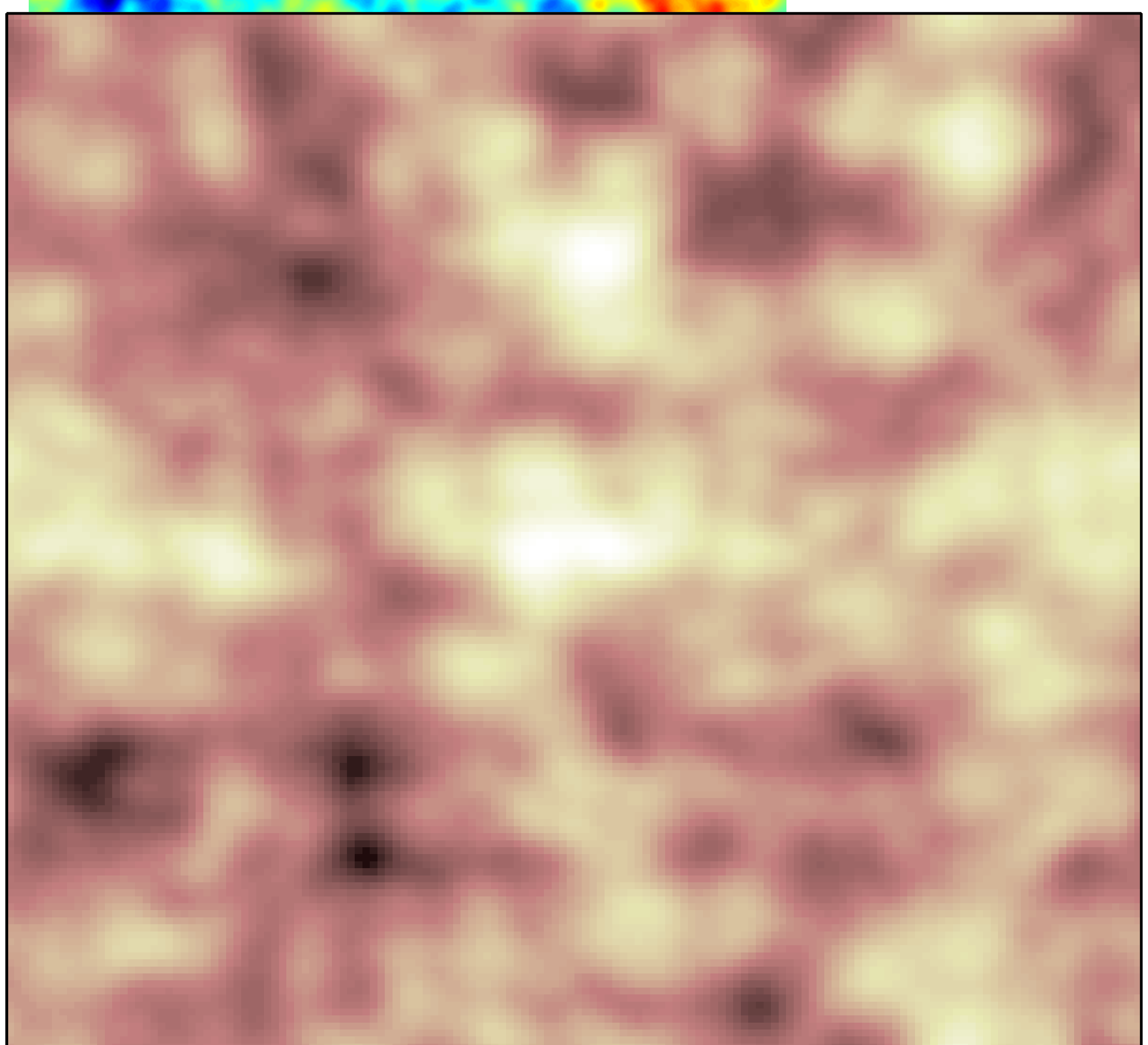
Our search proposal

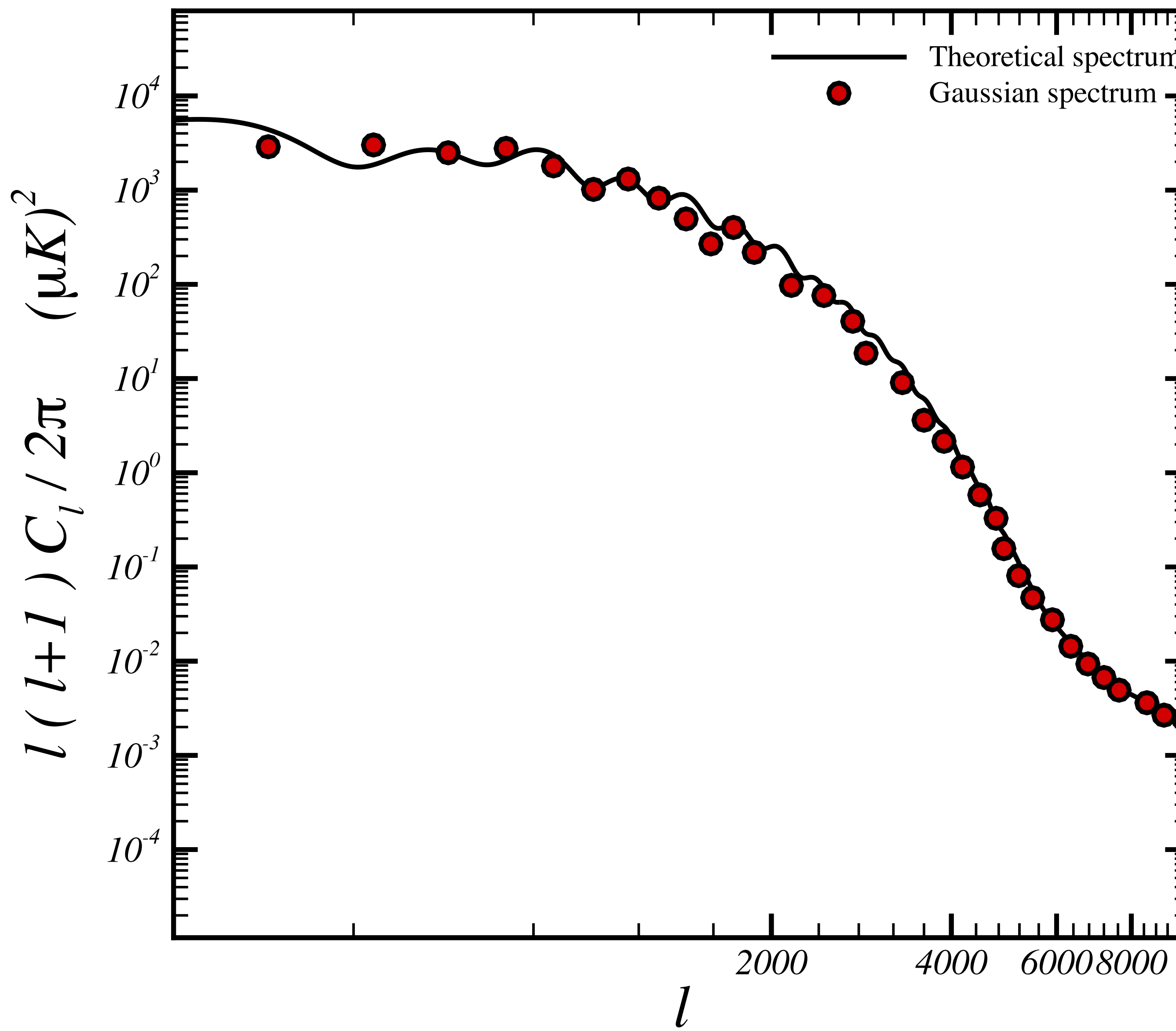




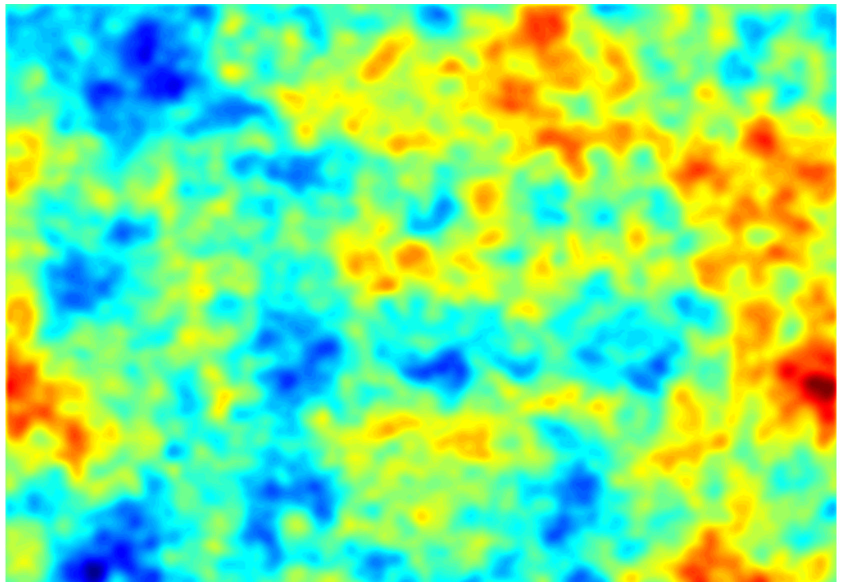
Our search proposal

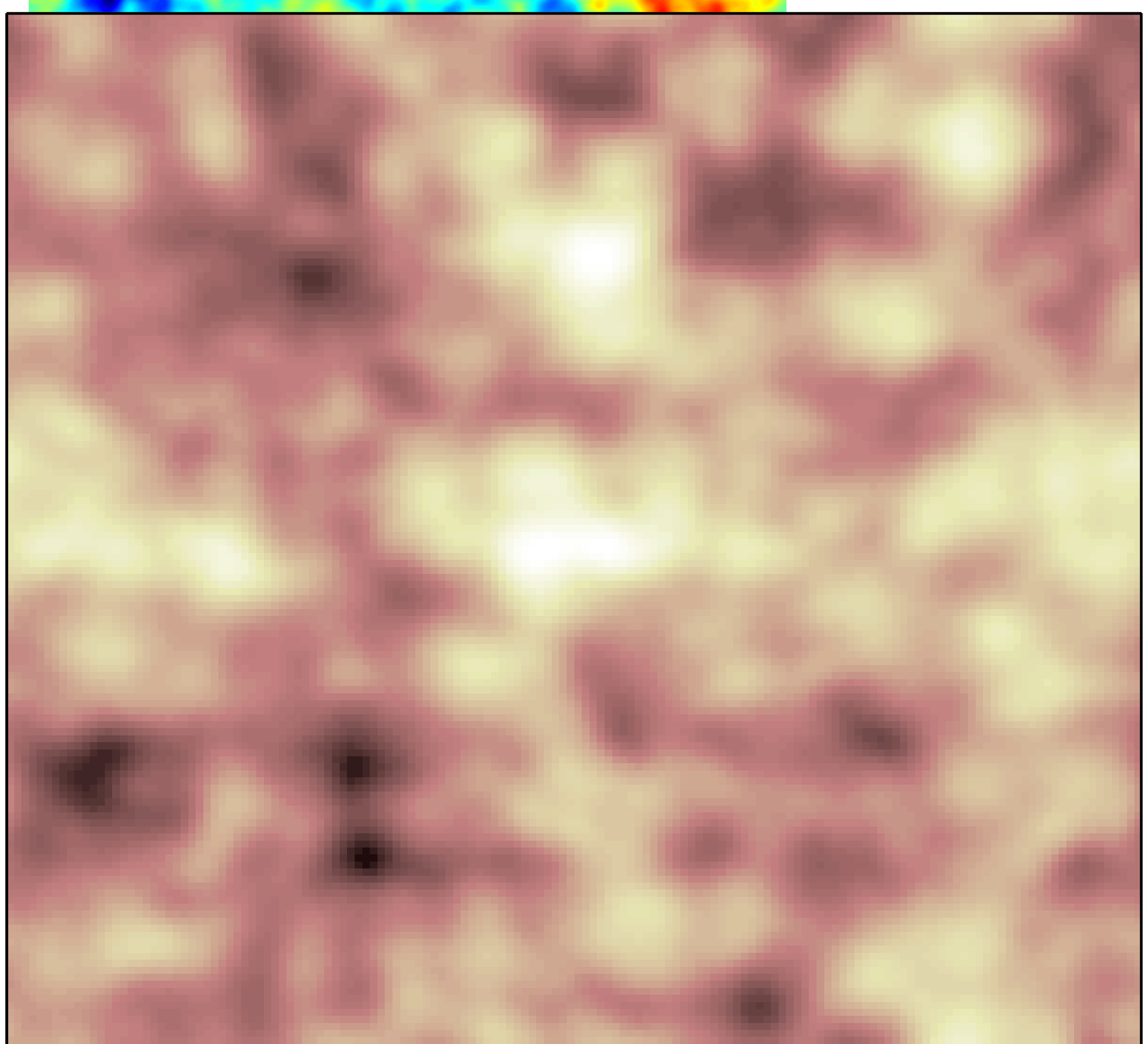


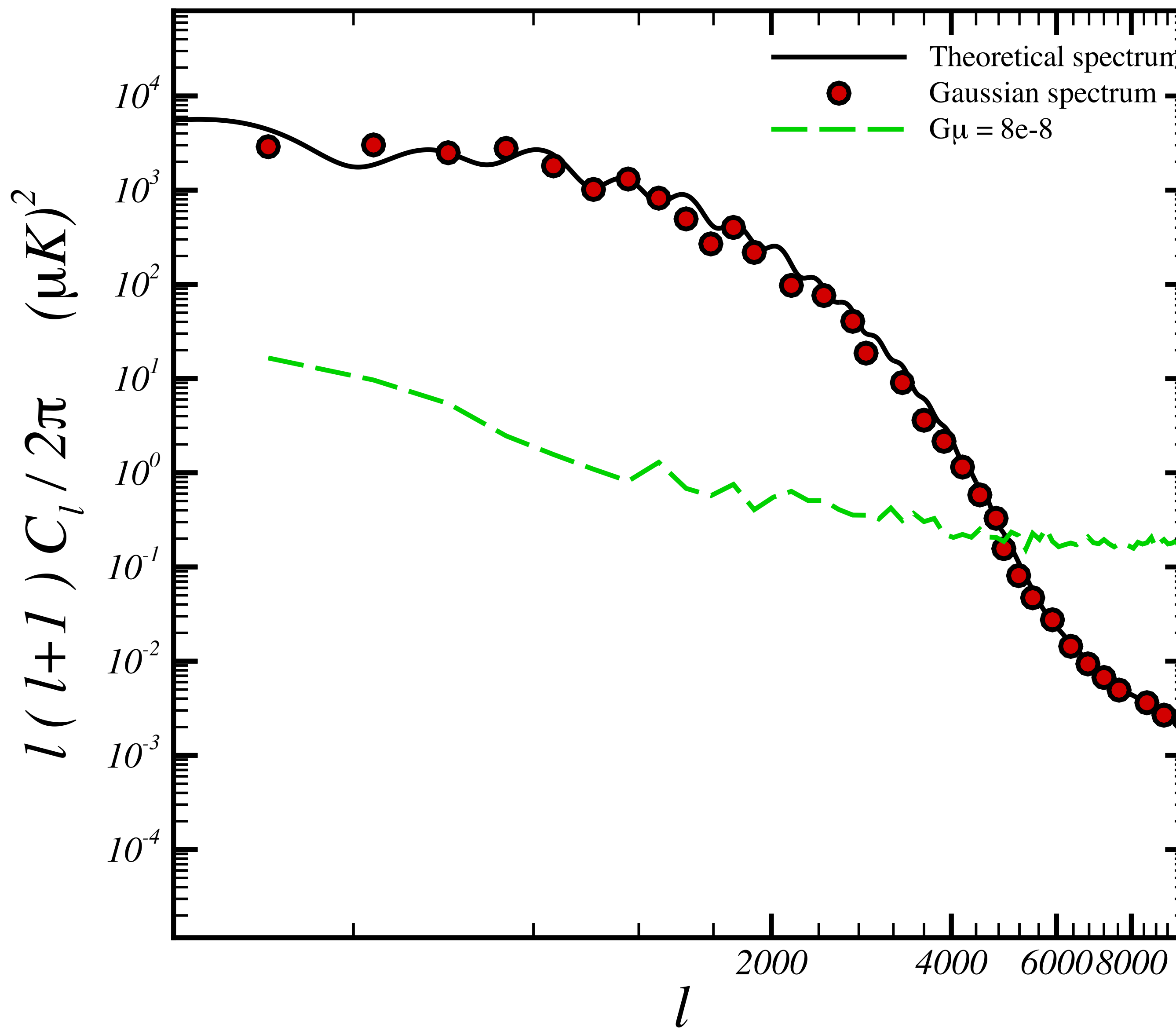




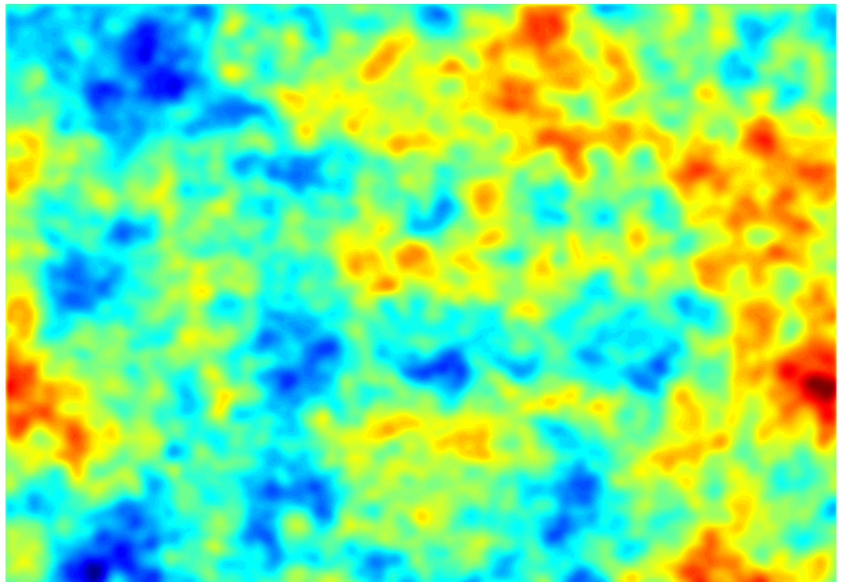
Our search proposal

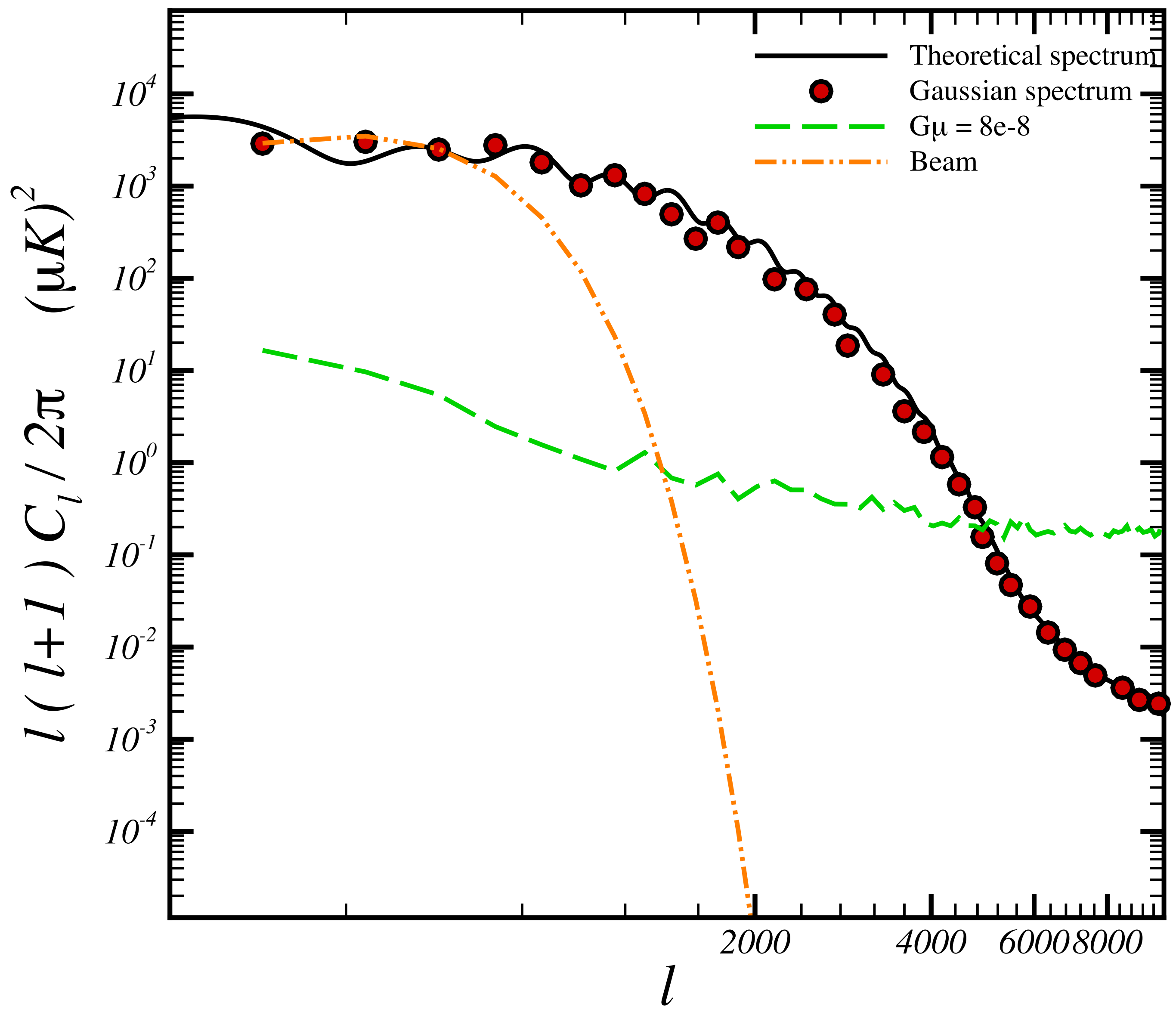






Our search proposal





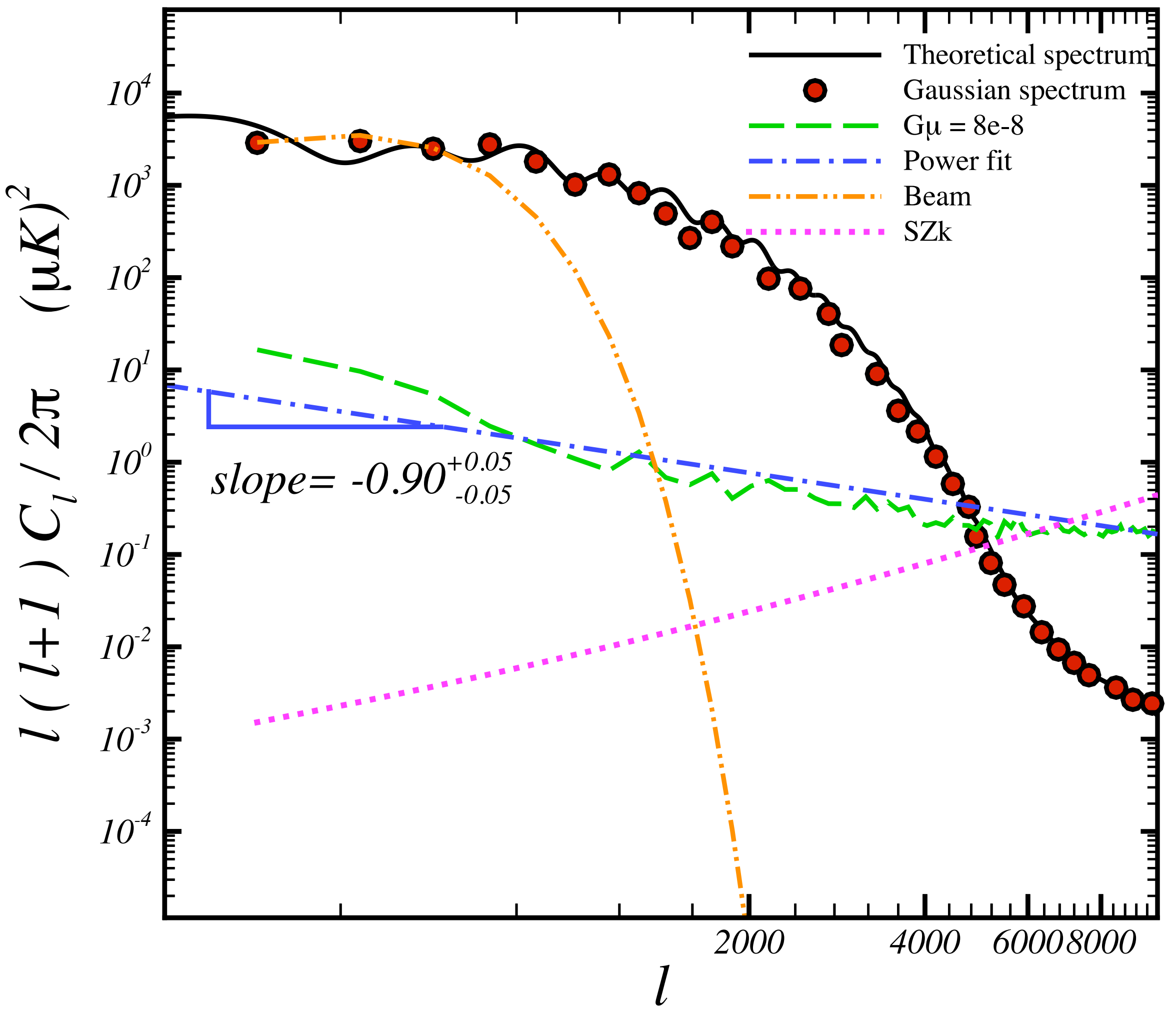
Smoothed stochastic field

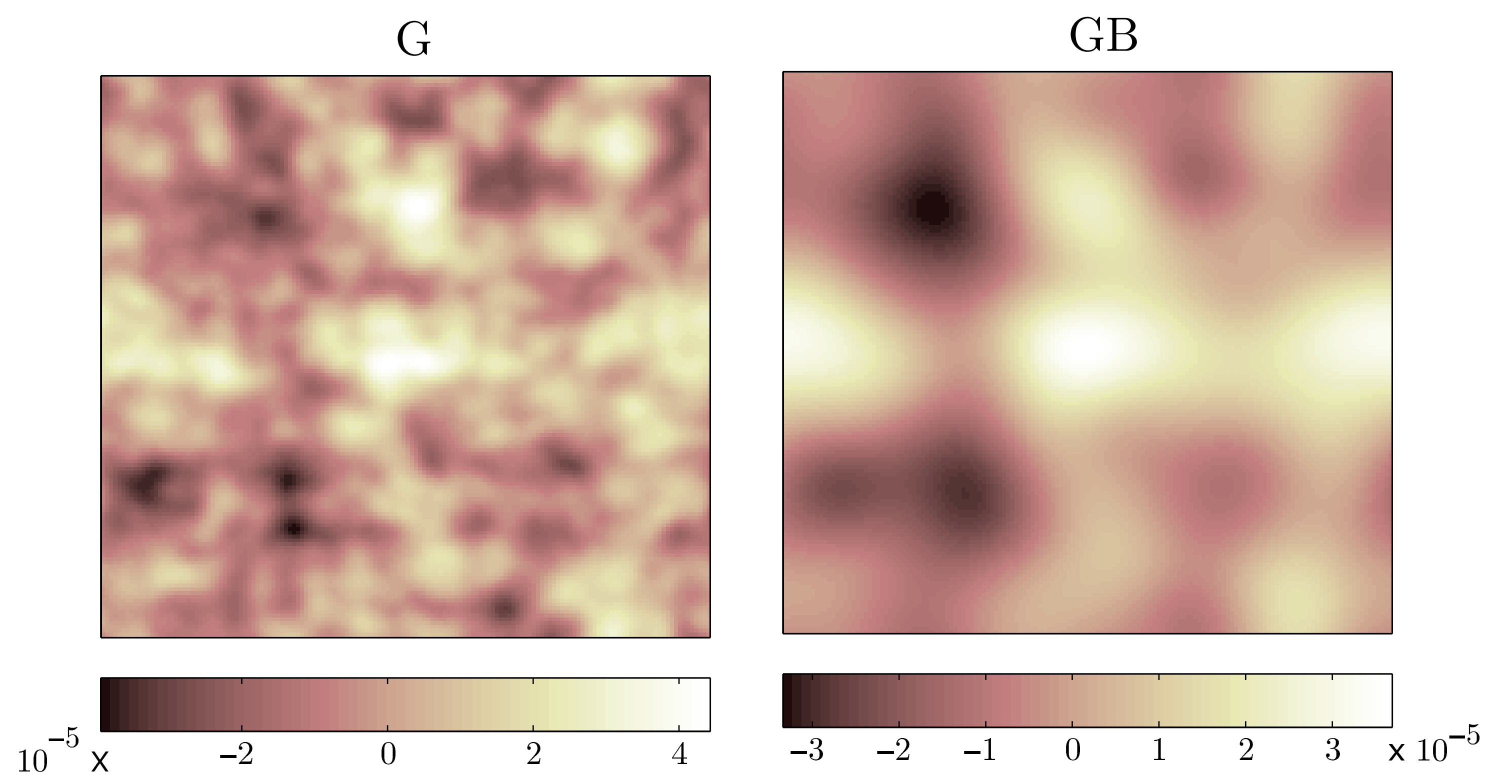
Finite beam size of instrument: Beam effect

$$f_{smoothed}(\vec{r}) = \int d^d\vec{r}\,' W_R\left(\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|\right) f(\vec{r}\,')$$

$$W_R(r) \sim \Theta(R - r)$$

$$W_R(r) \sim \exp\left(-\frac{r^2}{2R^2}\right)$$





S.M.S.M., B. Javanmardi, R. K. Sheth, MNRAS, (2013)

Additional comments on Beam

$$\mathcal{F}_B(\vec{k},\Gamma) = \int d\vec{k}'\mathcal{B}(\vec{k}-\vec{k}';\Gamma)\mathcal{F}(\vec{k}'-\vec{k})$$

$$\mathcal{B}(\vec{k}-\vec{k}';\Gamma) = \frac{۱}{۲\pi\Gamma^{۲}}^{-\frac{|\vec{k}-\vec{k}|}{۲\Gamma^{۲}}}$$

$$W_\ell = \exp(-\ell(\ell+1)\,\Delta^2/2),$$

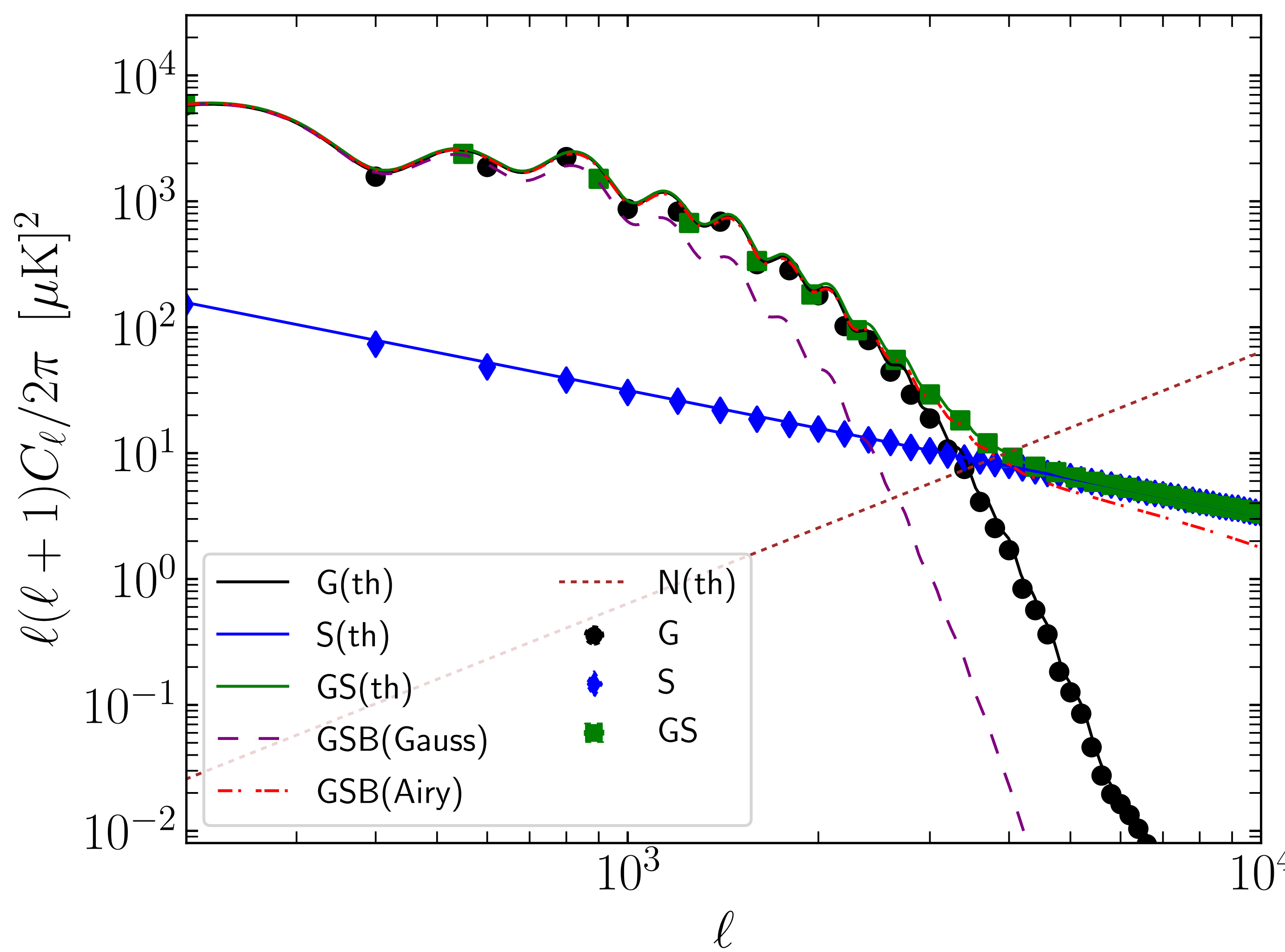
$$\Delta = \mathrm{FWHM}/\sqrt{8\ln 2}.$$

$$\mathcal{A}(\ell) = \frac{2}{\pi^4 d^2}\left(\arccos\frac{\ell}{\ell_c} - \frac{\ell}{\ell_c}\sqrt{1-\left(\frac{\ell}{\ell_c}\right)^2}\right),$$

$$C_\ell^{\mathrm{GSBN}} = \left(C_\ell^{\mathrm{G}} + \mathrm{C}_\ell^S\right)W_\ell^2 + \sigma_{\mathrm{noise}}^2.$$

Afzal et. al, 2024

Parameters	Planck	CMB-S4	ACT
f (GHz)	270	150	277
d (m)	—	—	6
θ (degree)	—	—	70
FWHM (arcmin)	5	1	—
σ_{noise} (μK-arcmin)	46.8	3.07	8



بدون رَوَند سازی داده ها

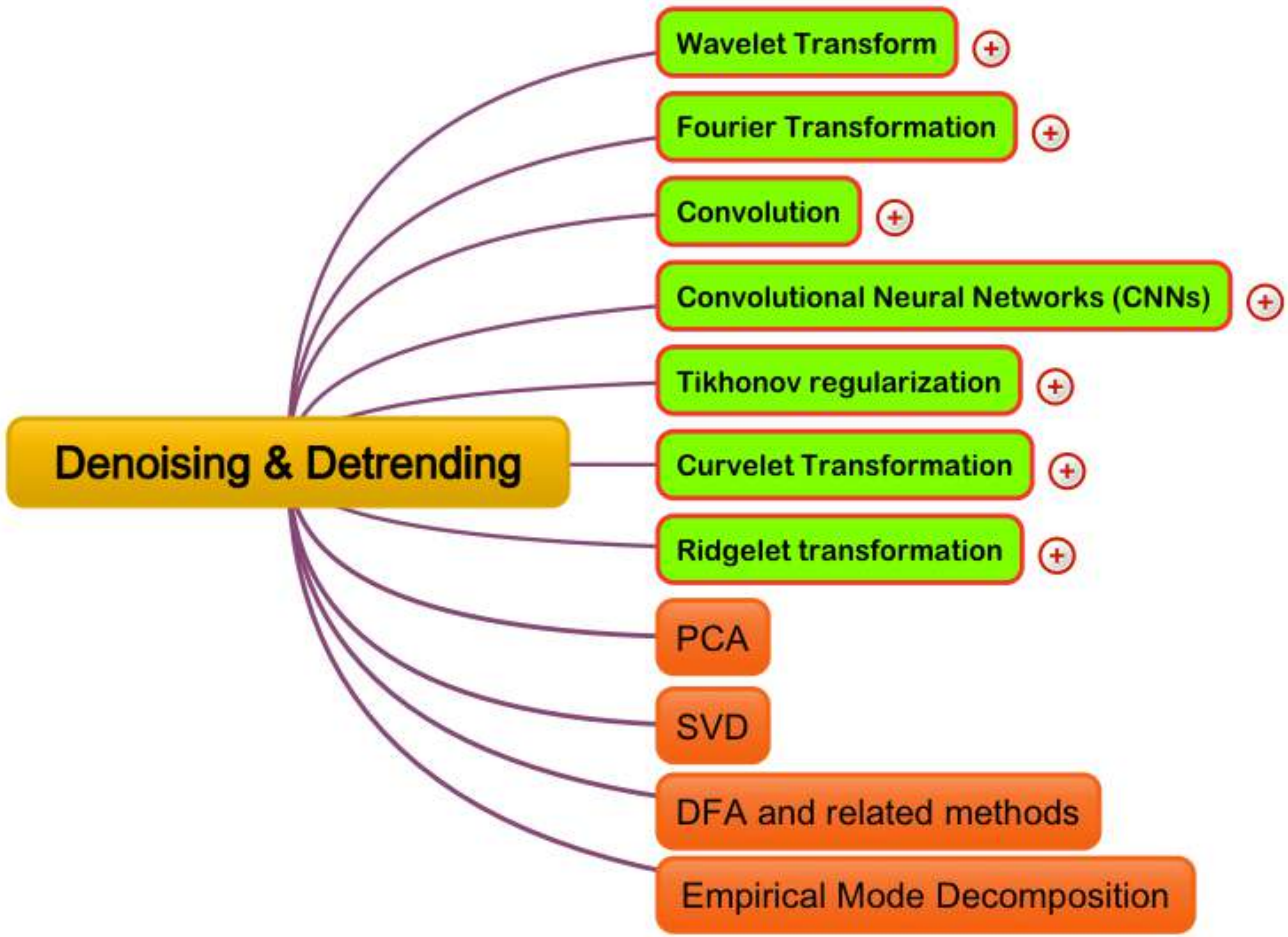
تعریف:

هر گونه تغییراتی که منجر به نامانایی داده ها شود رَوَند نام دارد. یا هر بخش که دارای طول موج بلند باشد روند نامیده می شود

به طور کلی با استخراج رَوَندها دو هدف عمده را دنبال خواهیم کرد:

۱) یارَوَندها دارای معنای فیزیکی هستند بنابراین با مقوله Low-pass filter مواجه خواهیم بود بنابراین به دنبال استخراج رَوَندهایی با طول موج بلند هستیم و با حذف بقیه عوامل فقط آنها را تجزیه و تحلیل می کنیم

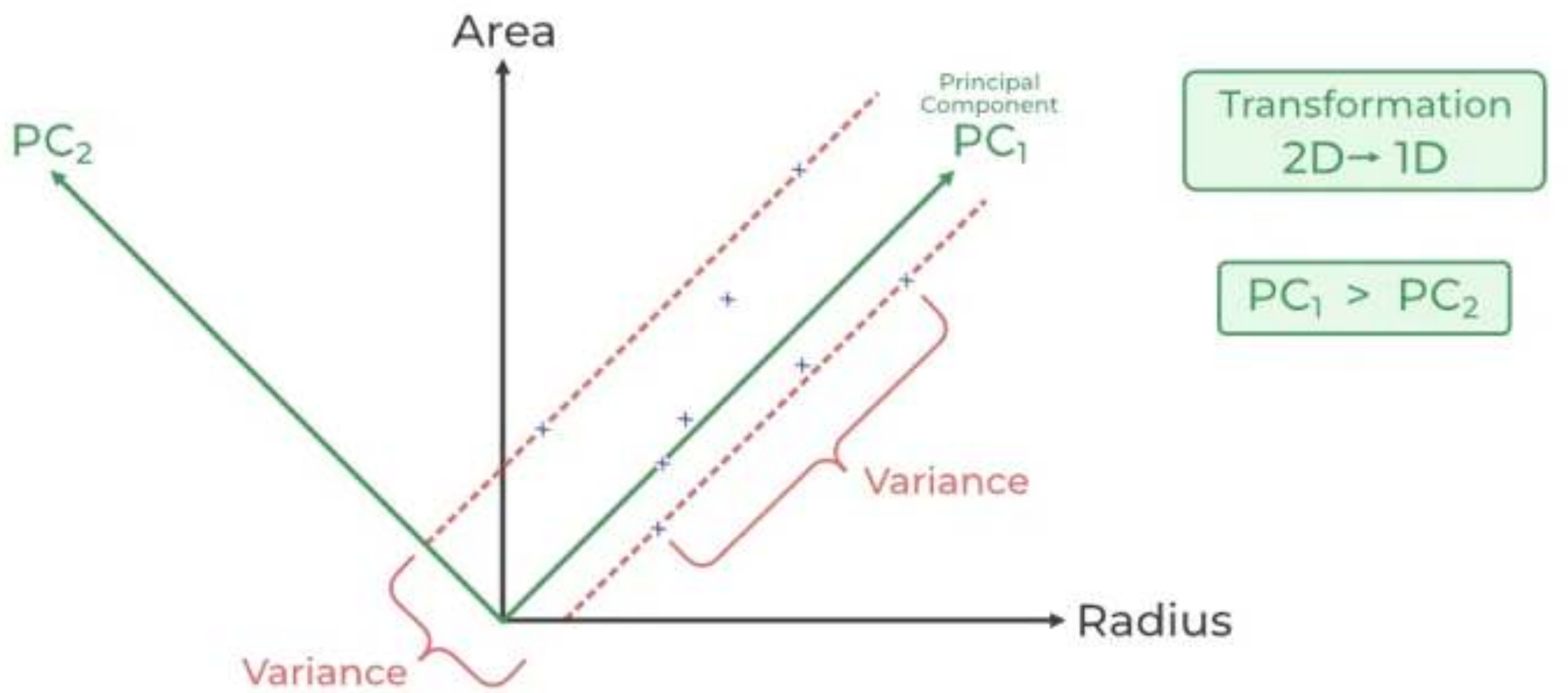
۲) و یا به طور کلی ماهیت رَوَندها شناخته شده و چیز جدیدی ارایه نمی کنند و ما به دنبال طول موجهای کوچک در داده ها هستیم که با مقوله High-pass filter روبرو هستیم


Denoising & Detrending
Wavelet Transform
Fourier Transformation
Convolution
Convolutional Neural Networks (CNNs)
Tikhonov regularization
Curvelet Transformation
Ridgelet transformation
PCA
SVD
DFA and related methods
Empirical Mode Decomposition

Principle Component Analysis

1) Principal Component Analysis(PCA) technique was introduced by the mathematician Karl Pearson in 1901.
2) Principal Component Analysis (PCA) is a statistical procedure that uses an orthogonal transformation
3) Principal Component Analysis (PCA) is an unsupervised learning
4) The main goal of Principal Component Analysis (PCA) is to reduce the dimensionality of a dataset while preserving the most important patterns or relationships between the variables without any prior knowledge of the target variables.

Principle Component Analysis:
(Intuitive meaning)



Advantages of Principal Component Analysis

1. Dimensionality Reduction
2. Feature Selection
3. Data Visualization
4. Multicollinearity
5. Noise Reduction
6. Data Compression
7. Outlier Detection

https://www.geeksforgeeks.org/principal-component-analysis-pca/?ref=gcse_outind

Disadvantages of Principal Component Analysis

1. Interpretation of Principal Components
2. Data Scaling
3. Information Loss
4. Non-linear Relationships
5. Computational Complexity
6. Overfitting

https://www.geeksforgeeks.org/principal-component-analysis-pca/?ref=gcse_outind

Principle Component Analysis:
(Example)

1

Let our data matrix **X** be the score of three students :

Student	Math	English	Art
1	90	60	90
2	90	90	30
3	60	60	60
4	60	60	90
5	30	30	30

2

Matrix construction

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 90 & 60 & 90 \\ 90 & 90 & 30 \\ 60 & 60 & 60 \\ 60 & 60 & 90 \\ 30 & 30 & 30 \end{bmatrix}$$

Matrix A

3

The mean of matrix A would be

$$\bar{\mathbf{A}} = [\ 66 \quad 60 \quad 60\ ]$$

Mean of Matrix A

4

Formula

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x - \bar{x})(y - \bar{y})$$

cov(X, Y) ⟶ Covariance between X & Y variables

x & y ⟶ members of X & Y variables

$\bar{x}$ & $\bar{y}$ ⟶ mean of X & Y variables

n ⟶ number of members

getcalc

https://getcalc.com/statistics-covariance-calculator.htm

Its *covariance matrix* would be

5

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \mathit{Math} & \mathit{English} & \mathit{Art} \end{array} \\ \begin{array}{r} \mathit{Math} \\ \mathit{English} \\ \mathit{Art} \end{array} & \begin{bmatrix} 504 & 360 & 180 \\ 360 & 360 & 0 \\ 180 & 0 & 720 \end{bmatrix} \end{array}$$

Principle Component Analysis:
(Example)

6

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad \det\left(\begin{pmatrix} 504 & 360 & 180 \\ 360 & 360 & 0 \\ 180 & 0 & 720 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\lambda \approx 44.81966\ldots,\ \lambda \approx 629.11039\ldots,\ \lambda \approx 910.06995\ldots$$

7

Eigenvectors $\begin{pmatrix} -3.75100\ldots \\ 4.28441\ldots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.50494\ldots \\ -0.67548\ldots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.05594\ldots \\ 0.69108\ldots \\ 1 \end{pmatrix}$

5

New data with e.g. two maximum eigenvalues (denoising)

$$W = \begin{bmatrix} 1.05594 & -0.50494 \\ 0.69108 & -0.67548 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad y = W' \times x$$

Singular Value Decomposition

Definition: The singular value decomposition (SVD) is a factorization of a real or complex matrix into a rotation, followed by a rescaling followed by another rotation

① Suppose that Γ is a $(d \times D)$ - rectangular Matrix

$$\Gamma_{d \times D}$$

$d \equiv$ embedding Dimension

$D \equiv N - (d-1)\tau$

$\tau \equiv$ Delay factor

(2) The SVD of Γ is given by.

$$\underset{d\times D}{\Gamma} = \underset{d\times d}{U}\ \underset{d\times D}{S}\ \underset{D\times D}{V^{\dagger}}$$

$V^{\dagger}$ → Right eigenvalue

S → rectangular diagonal Matrix

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{r} s_i u_i v_i^{*}$$

U → Left eigenvalue

$r = \min\{d, D\} \equiv$ Rank of Γ

(3) $\underset{D\times d}{\Gamma^{\dagger}}\ \underset{d\times D}{\Gamma}\ V_i = \lambda_i^2 V_i$

$\underset{d\times D}{\Gamma}\ \underset{D\times d}{\Gamma^{\dagger}}\ U_i = \lambda_i U_i$

(4) Example

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(5) Relation between PCA & SVD.

Suppose that X is a given Matrix

$$\langle x \rangle = 0$$

$$C = X^T X \leftarrow \text{Covariance Matrix}$$

$$X = U S V^{\dagger}$$

$$C = X^T X = (V S U^{\dagger})(U S V^{\dagger}) = S^2$$

$$\lambda_i = S_i^2 \leftarrow \text{eigenvalue in SVD}$$

eigenvalue of Covariance matrix.

⑥ Detrending (removing long modes)

e.g. for pth Long modes, $(2p+1)$ of maximum eigenvalues set to zero and

$$S \longrightarrow \tilde{S} \longrightarrow \tilde{\Gamma} = U \tilde{S} V^{\dagger}$$

$$\boxed{S_{ij} = 0 \text{ for } i \leq 2p+1}$$

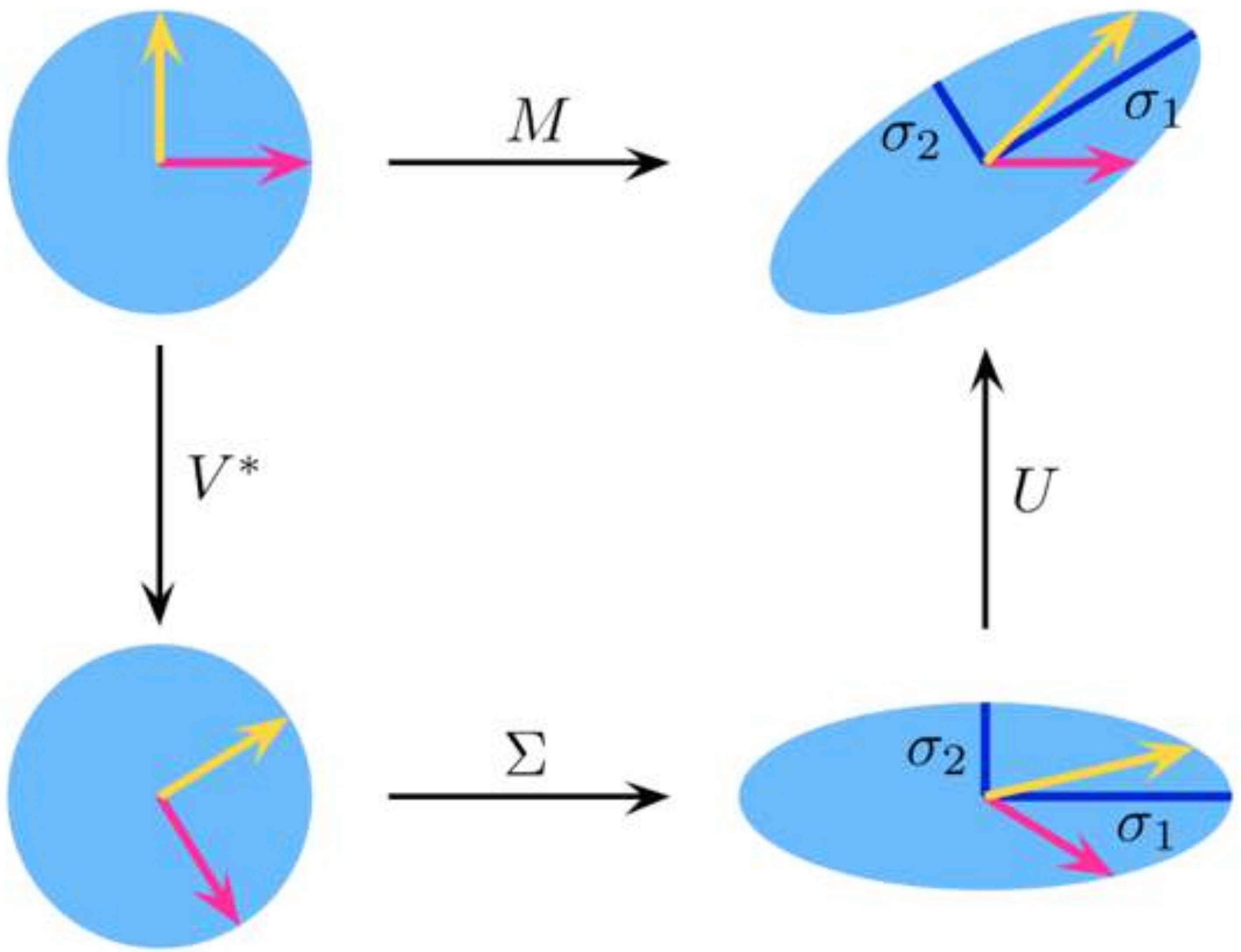
(7) Denoising (removing short modes).

e.g. Keeping $(2p+1)$ of maximum eigenvalues and rest values set to zero

$$\boxed{S_i = 0 \quad \text{for} \quad i > 2p+1}$$

Singular Value Decomposition

(Intuitive meaning)



$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^*$$

Singular Value Decomposition (SVD)

۳-۳ تجزیه مقدار تکین

تعیین روند و سازوکاری مناسب برای بدون روند کردن مهم‌ترین بخش در راستای تحلیل دقیق است. این موضوع خصوصاً در تحلیل داده‌های هواشناسی اهمیت ویژه‌ای دارد. همانطور که Z.Wu و همکارانش در مرجع [۷۴]نشان می‌دهند، روش یکتایی برای تعریف روند و روشی مناسب برای استخراج آن از داده‌های مانا و نامانا وجود ندارد. در رهیافتی دیگر روند در داده‌های واقعی و نامانا یک تابع ذاتی است که توسط طبیعت به افت‌وخیزها القا می‌شود. برای تبیین روند در داده‌ها، سری در تمام دامنه‌ها یا در یک دامنه خاص بررسی می‌شود. برای داده‌های خطی و مانا تعیین اندازه داده برای تخمین روند معمولاً ساده است اما برای داده‌های واقعی که تحت تاثیر نامانایی و غیر خطی بودن قرار می‌گیرند، نیازمند ارائه تعریف دقیقی از روند هستیم. با توجه به اهمیت بررسی روند و احتمالاً حذف آن از داده‌ها می‌توان به دو هدف زیر اشاره کرد:

الف: در بسیاری حالت‌ها دو یا چند مقیاس که در آن رفتار مقیاسی تابع افت و خیز تغییر می‌کند وجود دارد. این طرح بیانگر وجود رفتارهای مختلف و همبستگی‌های مختلف در مقیاسهای مختلف می‌باشد[۴۷و ۶۹-۴۸و۷۰و۷۵].

ب: در برخی حالت‌های دیگر، این مقیاسهای مهم توسط روندهای تناوبی ایجاد می‌شوند مانند روندهای فصلی در سری‌های زمانی هواشناسی. پس برای یافتن نمای مقیاسی افت‌وخیزهای ذاتی بایستی روندها را خارج ساخته وسپس داده‌های بدون روند را به عنوان ورودی در بخشهای بعدی مورد استفاده قرار دهیم [۴۷و۴۸و۶۶] برای حذف روندهای مربوط به دوره تناوبهایی با فرکانس کوچک به جای استفاده از روش تبدیل فوریه [۴۷و۴۸و۷۷-۷۵] از روش تجزیه مقدار تکین SVD استفاده می‌کنیم [۷۱].

با استفاده از روش SVD نه تنها می‌توان اثر روندهای تناوبی را دنبال کرد بلکه همزمانی سری‌های تحت مطالعه نیز حفظ می‌شود [۶۹و۷۰]. به اضافه اینکه می‌توان مقیاسهای زمانی که در روندها یا افت‌وخیزها غالب می‌شوند را نیز تعیین کرد [۷۰-۶۸و۷۸و۷۹]. پس از حذف توابع تناوبی غالب مانند روندهای تناوبی نماهای مقیاسی صحیح را از روش MF-DXA استخراج می‌کنیم.

Singular Value Decomposition (SVD)

I: فرض کنید داده مورد بررسی که شامل روند تناوبی است به صورت زیر باشد $\{x_i\} : i = 1,\ldots N$ دو کمیت (d,τ) به ترتیب به عنوان بُعد غوطه‌وری و تاخیر زمانی در آنالیز در نظر می‌گیریم. داده‌ها را می‌توان توسط ماتریس زیر نمایش داد:

$$\Gamma \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_{1+\tau} & \cdots & x_{1+N-(d-1)\tau-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{i+N-(d-1)\tau-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_d & x_{d+\tau} & \cdots & x_{d+N-(d-1)\tau-1} \end{pmatrix} \qquad (۱۱)$$

همانطور که دیده می‌شود $1 \le i \le d$ و برای روند تناوبی وارد شده در داده‌ها تعداد p تا عضوفرکانس غالب به صورت $e^{(i\omega_k t)}, k = 1\ldots p$ درطیف توان در نظر می‌گیریم. برای تعداد N تا داده اولیه بیشینه مقدار d در ماتریس مسیر Γبرابر با $d \le N-(d-1)\tau+1$ می‌باشد.

Singular Value Decomposition (SVD)

II. ماتریس Γ به دو ماتریس متعامد راست و چپ به صورت زیر تجزیه می‌شود

$$\Gamma = USV^{\dagger} \tag{۱۲}$$

در این رابطه $U_{d\times d}$ و $V_{(N-(d-1)\tau)\times(N-(d-1)\tau)}$ به ترتیب ماتریس متعامد چپ و راست می‌باشند. عناصر قطری ماتریس $S_{d\times(N-(d-1)\tau)}$ در حقیقت همان مقادیر تکین مورد نظر می‌باشند

تجزیه مقدار تکین ماتریس Γ به ویژه تجزیه ماتریس‌های متقارن $\Gamma^{\dagger}\Gamma$ و $\Gamma\Gamma^{\dagger}$ به صورت $\Gamma^{\dagger}\Gamma v_i = \lambda_i^2 v_i$ و $\Gamma\Gamma^{\dagger}u_i = \lambda_i^2 u_i$ مربوط می‌شود.مقادیر ویژه غیر صفر ماتریس $\Gamma^{\dagger}\Gamma$ برابر با مقادیر ویژه $\Gamma\Gamma^{\dagger}$ و تعیین کننده مرتبه ماتریس Γ است. ویژه مقادیر به صورت $\lambda \geq \lambda_{i+1} \geq 0$ ردیف می‌شوند و عناصر قطری ماتریس S را تشکیل می‌دهند و بقیه عناصر صفر می‌شوند ستونهای ماتریس U و V توسط u_i و v_i که ویژه توابع نامیده می‌شوند، ساخته می‌شوند .این ویژه توابع معادل با ویژه مقادیر ردیف شده هستند. با بکار بردن SVD بر روی ماتریس Γ ما S و V و U را بدست می‌آوریم.

اگر فرض کنیم که تعداد فرکانسهای غالب برابر با p باشد بنابراین تعداد $2p+1$ تا از ویژه مقادیر را که از بزرگ به کوچک که در عناصر قطری ماتریس S نشسته‌اند را صفر می‌کنیم و به این ترتیب ماتریس S^{*} بدست می‌آید و ماتریس فیلتر شده Γ^{*} به صورت $\Gamma^{*} = US^{*}V^{+}$ تعیین شده و با یک نگاشت به داده‌های یک بعدی فیلتر شده یعنی

$$X^{*}_{i+j-1} = \Gamma^{*}_{ij} \tag{۱۳}$$

می‌رسیم که $1 \leq i \leq d$ و $1 \leq j \leq N-(d-1)\tau$ است.

Singular Value Decomposition (SVD)

$$\{x_i\}; i = 1, ..., N \qquad d \leq N - (d-1)\tau + 1$$

$$\Gamma \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_{1+\tau} & \cdots & x_{1+N-(d-1)\tau-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i & x_{i+\tau} & \cdots & x_{i+N-(d-1)\tau-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_d & x_{d+\tau} & \cdots & x_{d+N-(d-1)\tau-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{USV}^\dagger$$

$$\mathbf{\Gamma}^\dagger \mathbf{\Gamma} \mathbf{v_i} = \lambda_i^2 \mathbf{v_i}$$

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^\dagger \mathbf{u_i} = \lambda_i^2 \mathbf{u_i}$$

$$x^*_{i+j-1} = \Gamma^*_{ij}$$

The p dominant eigenvalue and associating eigendecomposed vector represent the superimposed trend and the remaining (d-p) demonstrates intrinsic fluctuations

S. hajian and M. Sadegh Movahed, arXiv:0908.0132

معرفی برنامه

۱- در برنامه

n : تعداد داده‌ی ورودی

$d\_embed = d$ بُعد غوطه‌وری

$x(i)$: داده‌های ورودی اُم

$A(i,j) \longrightarrow T^{+}$

$AA(i,j) \rightarrow T$

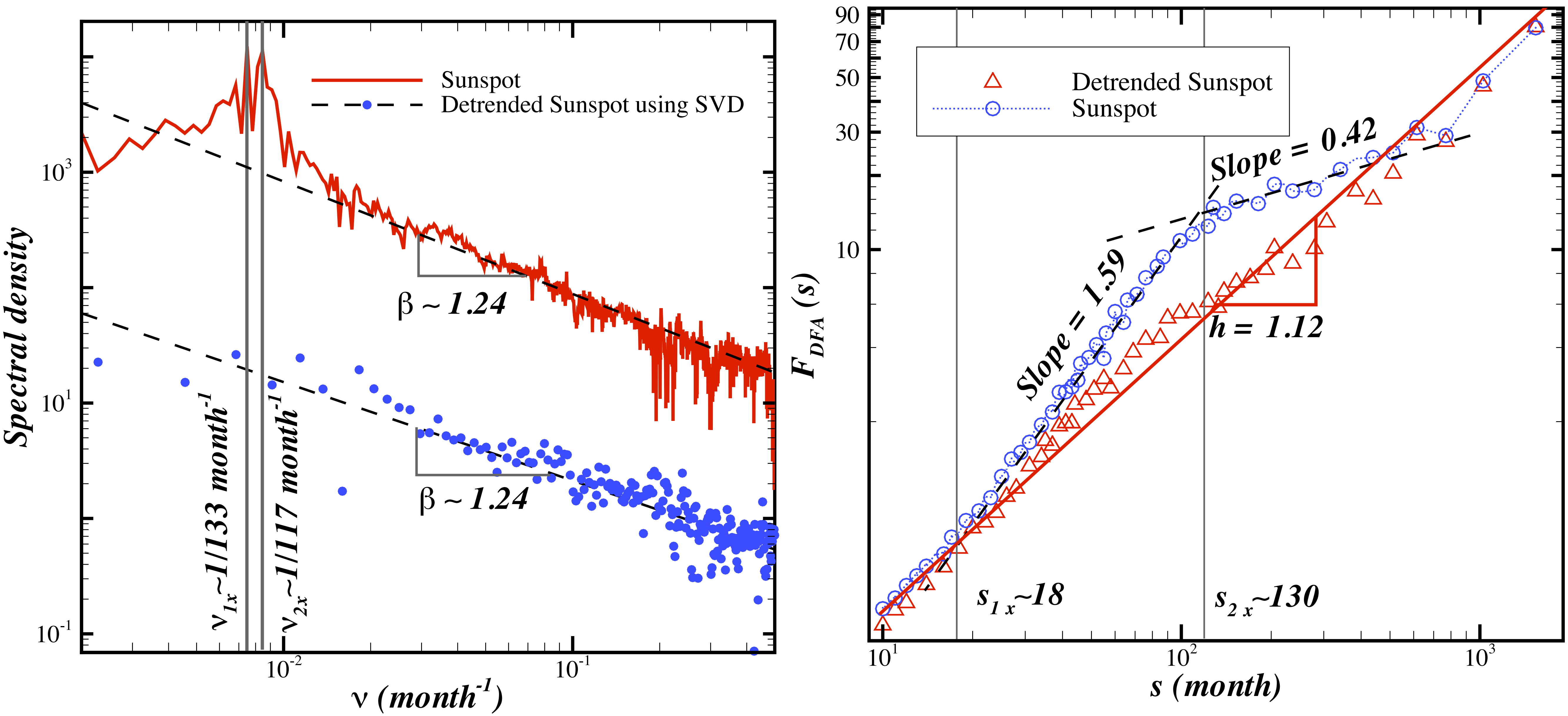
$t_r \longrightarrow 2p+1$ تعداد نقاط مجاوری که باید حذف گذاشته شوند

۲- برای تحلیل داده‌ها به صورت mean free و $Var = 1$ بکار برده می‌شوند.

۳- نتایج نشان می‌دهد که هرچه d یعنی بُعد غوطه‌وری کوچکتر باشد در حالتی که هیچ یک از نقاط مجاور حذف نشوند یعنی $t_r=0$ باشد در آن صورت داده‌ها کمتر تغییر خواهند کرد. به بیانی دیگر در فضای $d=50$ و $t_r=0$ در آن صورت انتظار اینکه روندی حذف شود وجود ندارد و داده‌های تولید شده دارای روند هستند ولی شکلشان نسبت به داده‌های اولیه متفاوت باشند. با افزایش مقدار t_r مشاهده می‌کنیم که داده‌ها بدون وجود روند تولید می‌شوند.

بنابراین تعیین مقدار d و t_r بسیار مهم است. برای مطالعات قبلی که داده ورودی از مرتبه 3000 بود مقدار $d=50$ و $t_r=15$ انتخاب شد. البته همانطور که گفتیم $t_r=2p+1$ و p درجه روند موجود در داده است.

اگر روند چند جمله‌ای درجه n داشته باشیم $p=n$ پس $t_r=2n+1$ ولی مقدار d را معمولاً با آزمایش و خطا به دست می‌آوریم) البته یک معیار خوب این است که cross-over حذف شود. اینکه با رسم طیف توان متوجه شویم که رابطه مقیاسی سراسری برای تمام مقیاس‌ها وجود دارد.



S. hajian and M. Sadegh Movahed, arXiv:0908.0132

Empirical Mode decomposition (EMD)

Empirical mode decomposition (EMD) is a data-adaptive multiresolution technique to decompose a signal into physically meaningful components

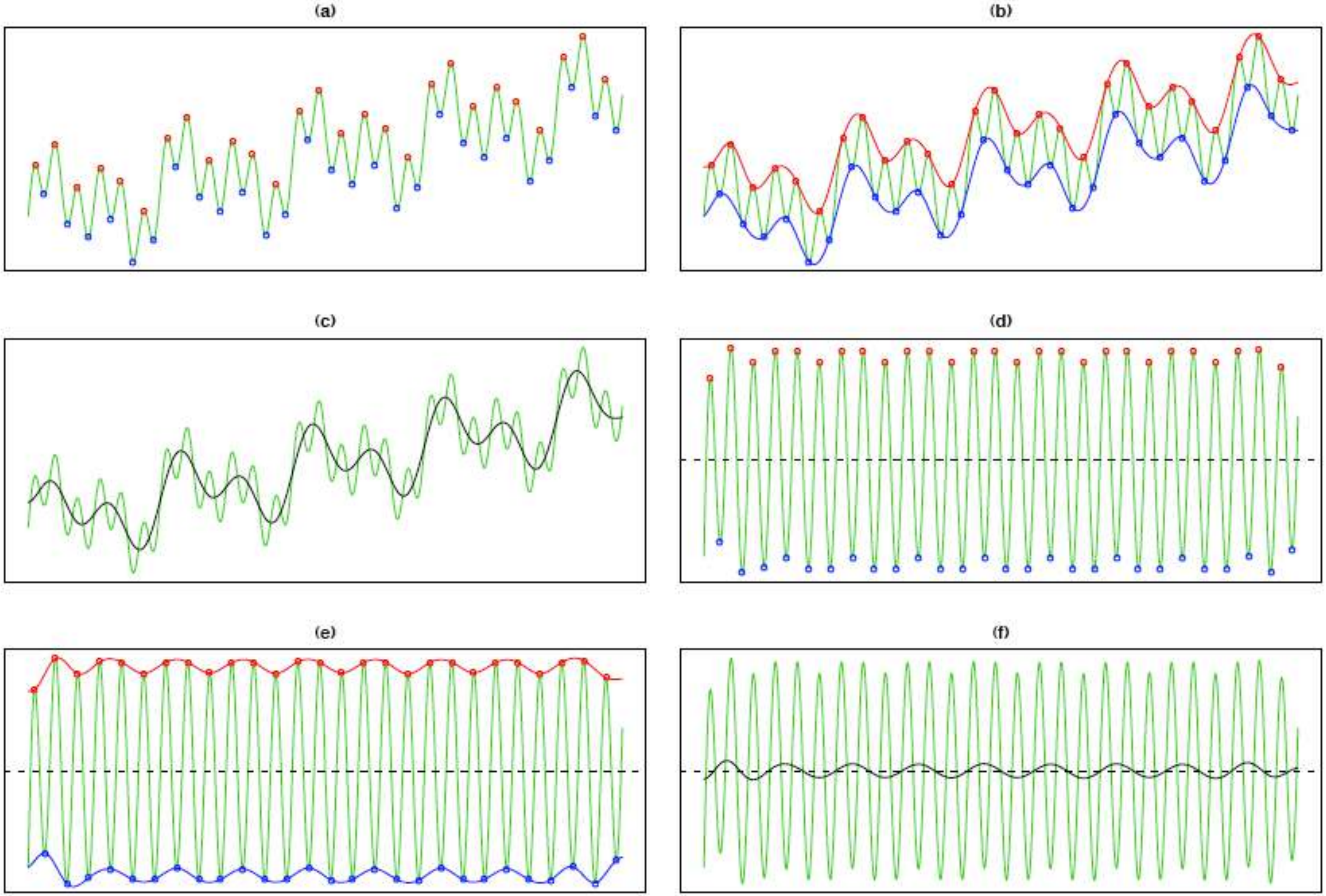
- This method is known as non-parametric method
- There is a good review by Norden E. Huang
  Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 454, No. 1971 (Mar. 8, 1998)
- In this case, the intrinsic mode functions (IMFs) satisfy two conditions:
  1) The number of extrema and zero-crossing differs only by one
  2) The local average is zero

1) Identify the local extrema and find their average (Generating upper envelop and lower envelope)

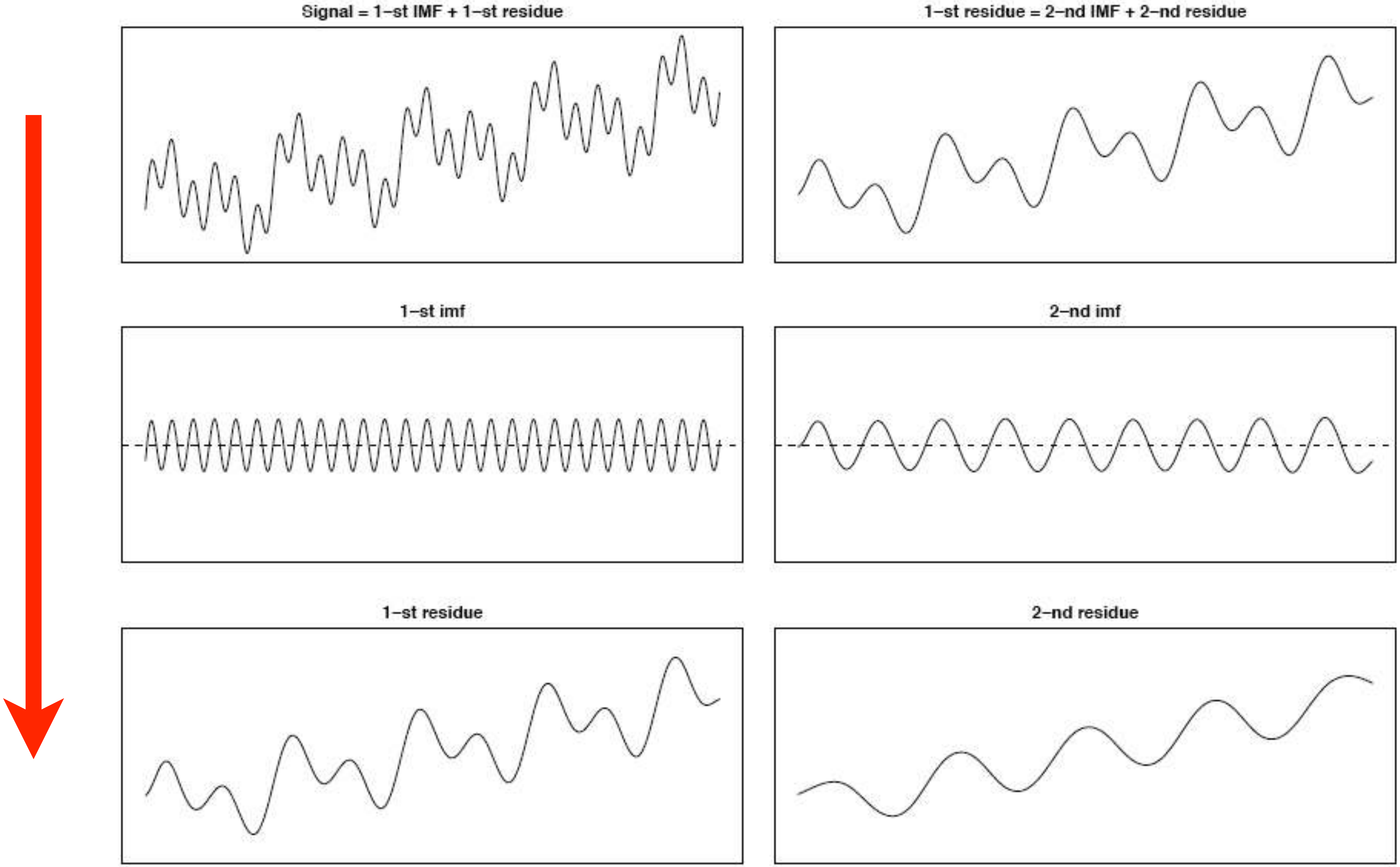
2) Subtracting the envelop mean from signal

3) Check the IMF conditions

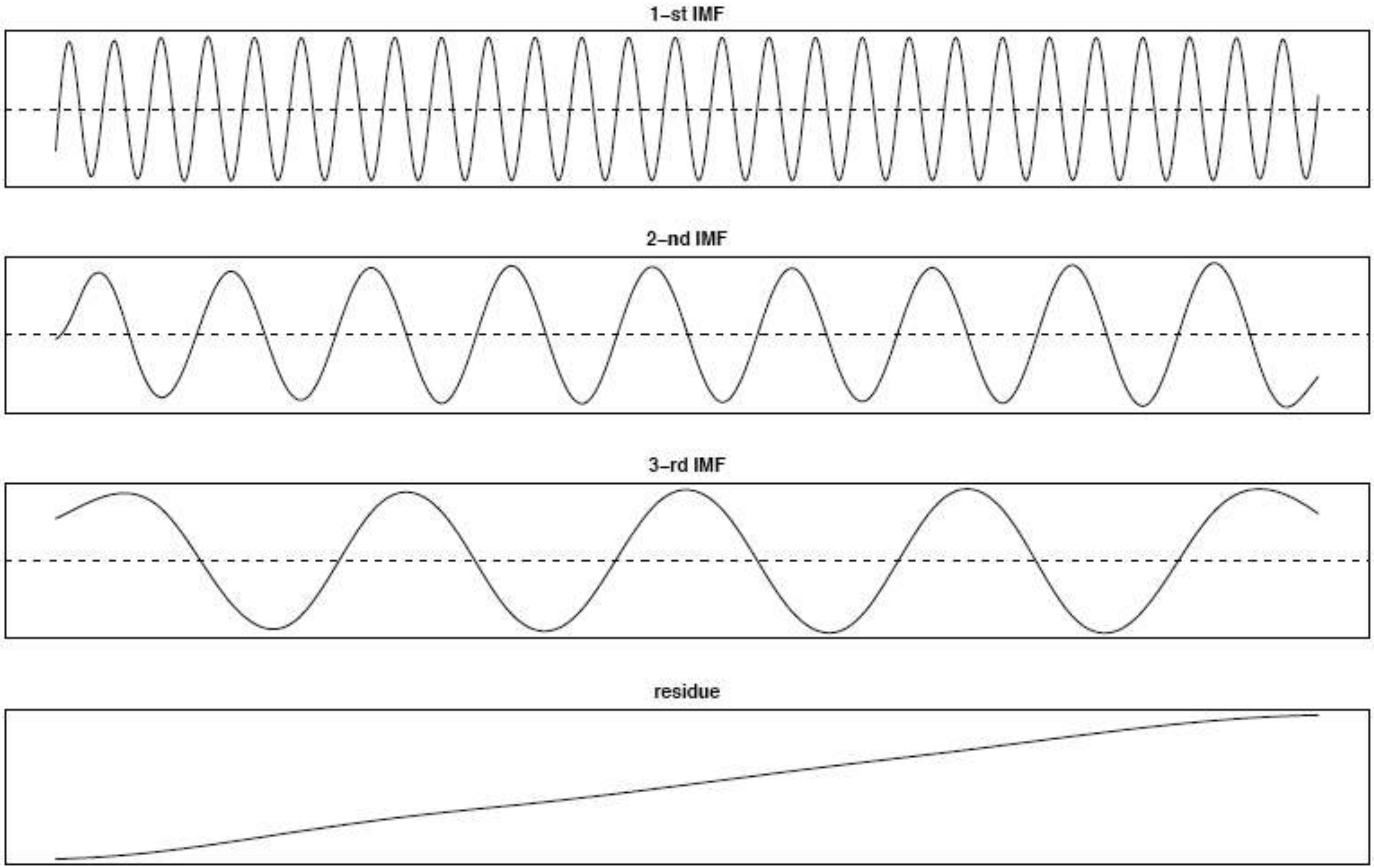
$$\sum_t \left(\frac{h_i(t) - h_{i-1}(t)}{h_{i-1}(t)} \right)^2 < \mathtt{tol}.$$



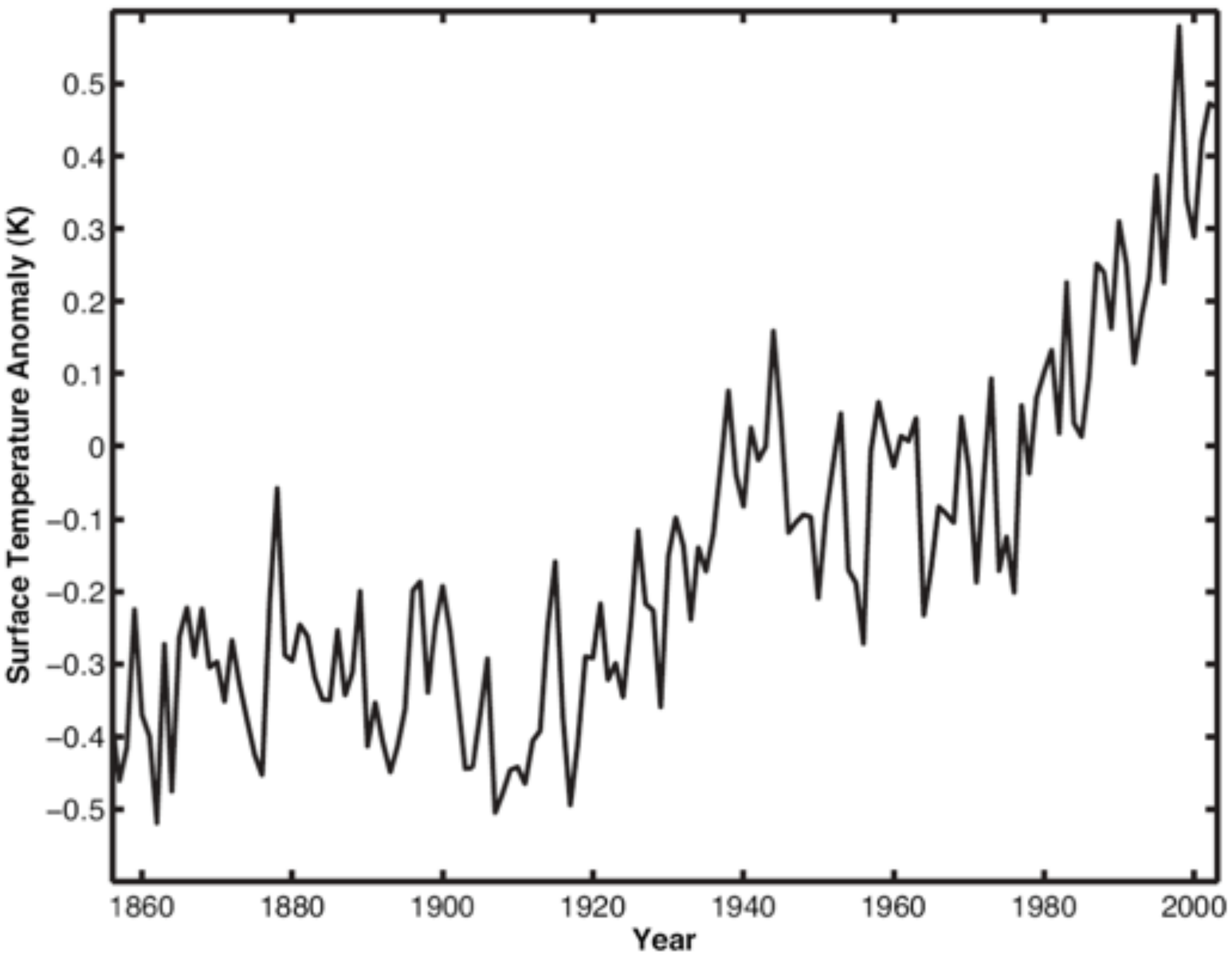
Kim, Donghoh, and Hee-Seok Oh. "EMD: A Package for Empirical Mode Decomposition and Hilbert Spectrum." R J. 1.1 (2009): 40.

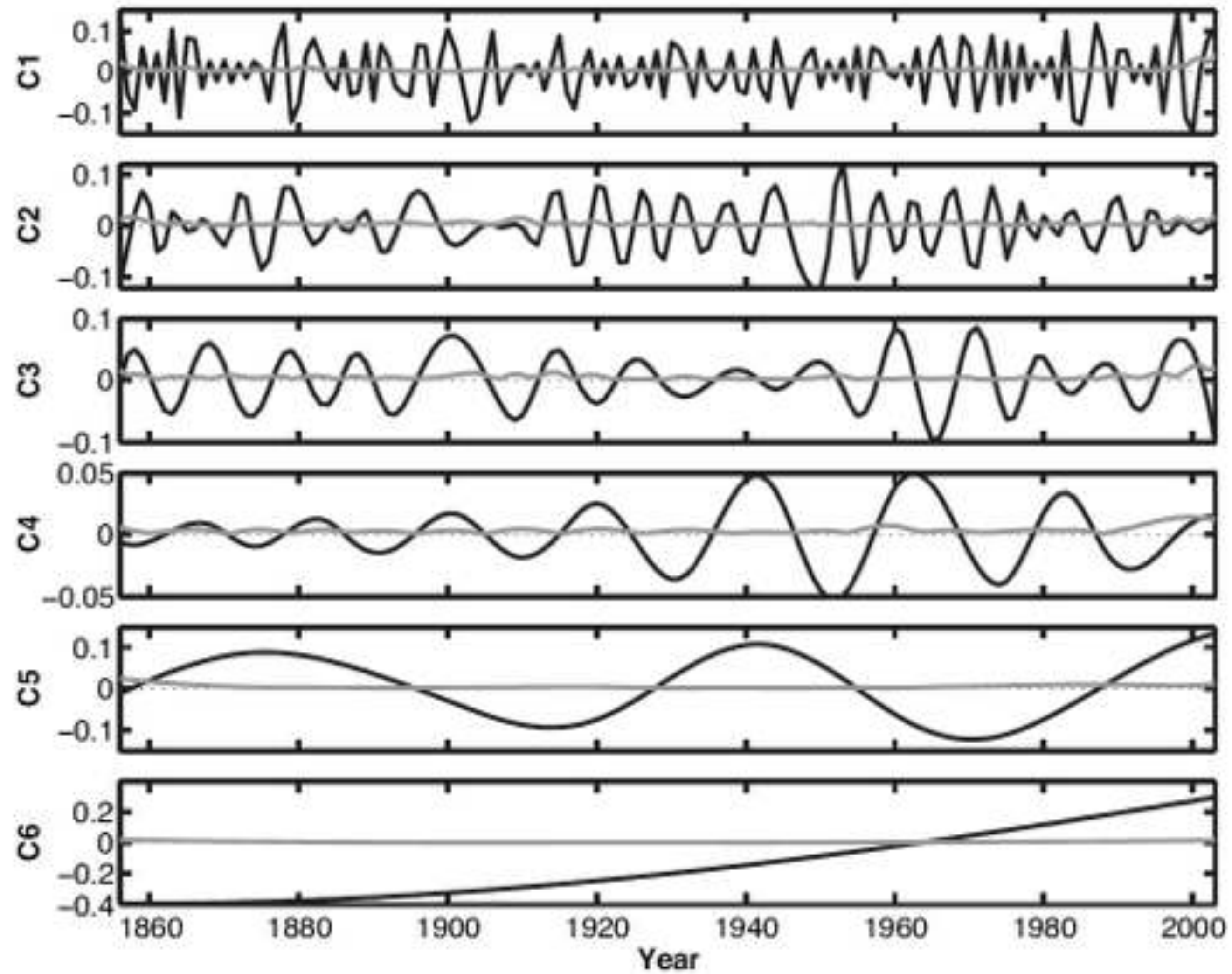


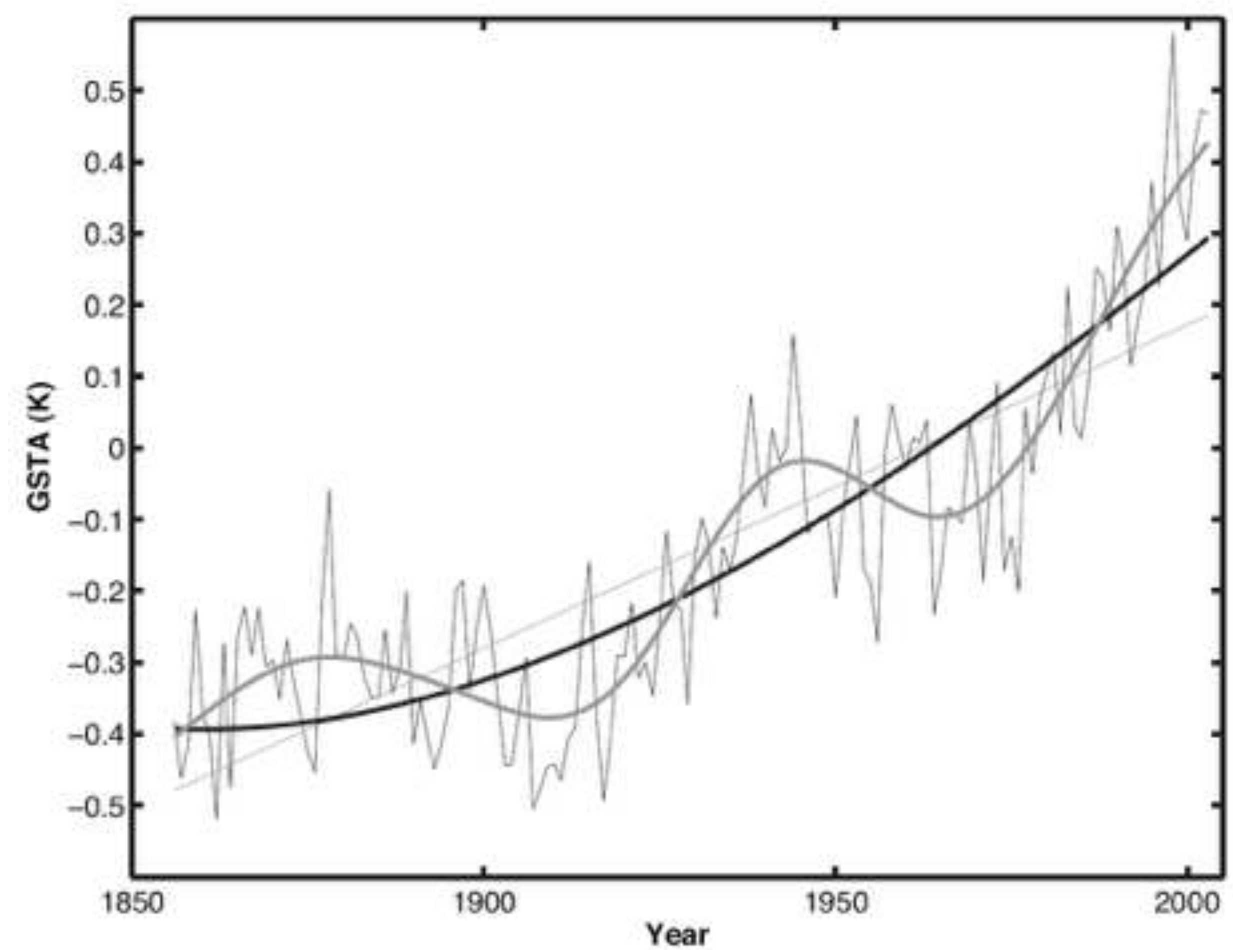
Kim, Donghoh, and Hee-Seok Oh. "EMD: A Package for Empirical Mode Decomposition and Hilbert Spectrum." R J. 1.1 (2009): 40.



Kim, Donghoh, and Hee-Seok Oh. "EMD: A Package for Empirical Mode Decomposition and Hilbert Spectrum." R J. 1.1 (2009): 40.







Wu, Zhaohua, et al. "On the trend, detrending, and variability of nonlinear and nonstationary time series." Proceedings of the National Academy of Sciences 104.38 (2007): 14889-14894.

Part 5:
Wavelet, Curvelet, Ridgelet

Wavelet versus FFT

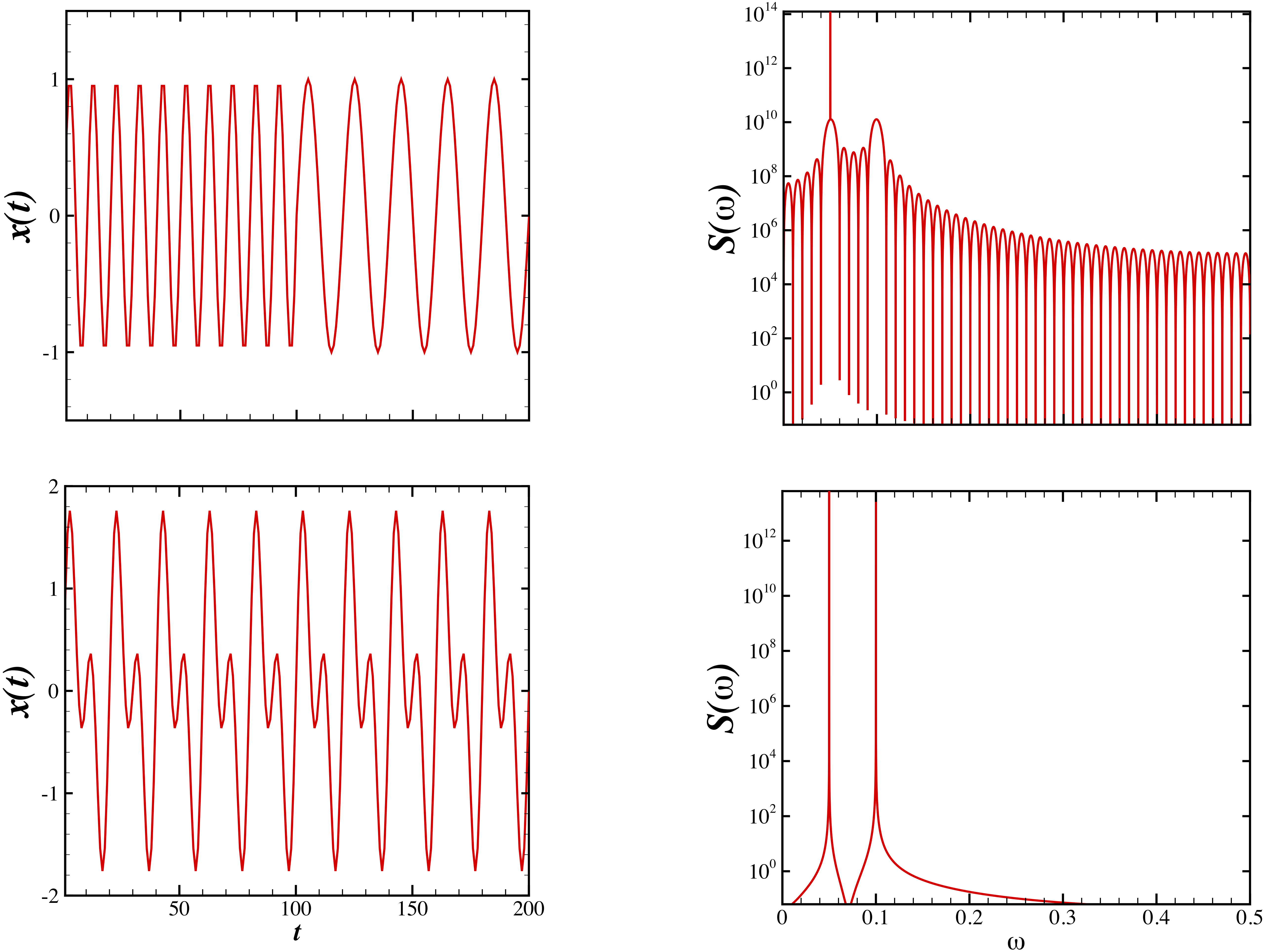
۱) در بسیاری از سری ها که مانا باشند عموماً روش FFT کافی است
۲) با توجه به روشی که درFFT بکار گرفته می شود می توان دریافت که اطلاعاتی از نوع:
مکان (زمان) رخ دادن را نمی دهد
چه نوع رخدادی رخ داده نیز مشخص نمی کند

۳) تبدیلهای مبتنی بر موجک ها یعنی ابزارهایی که در مقابل موجهای تخت بسیار جایگزیده تر می باشند به مراتب اطلاعات بیشتری را منعکس می کنند پس
Wavelet, curvelet, contourlet, Transform
نیاز است

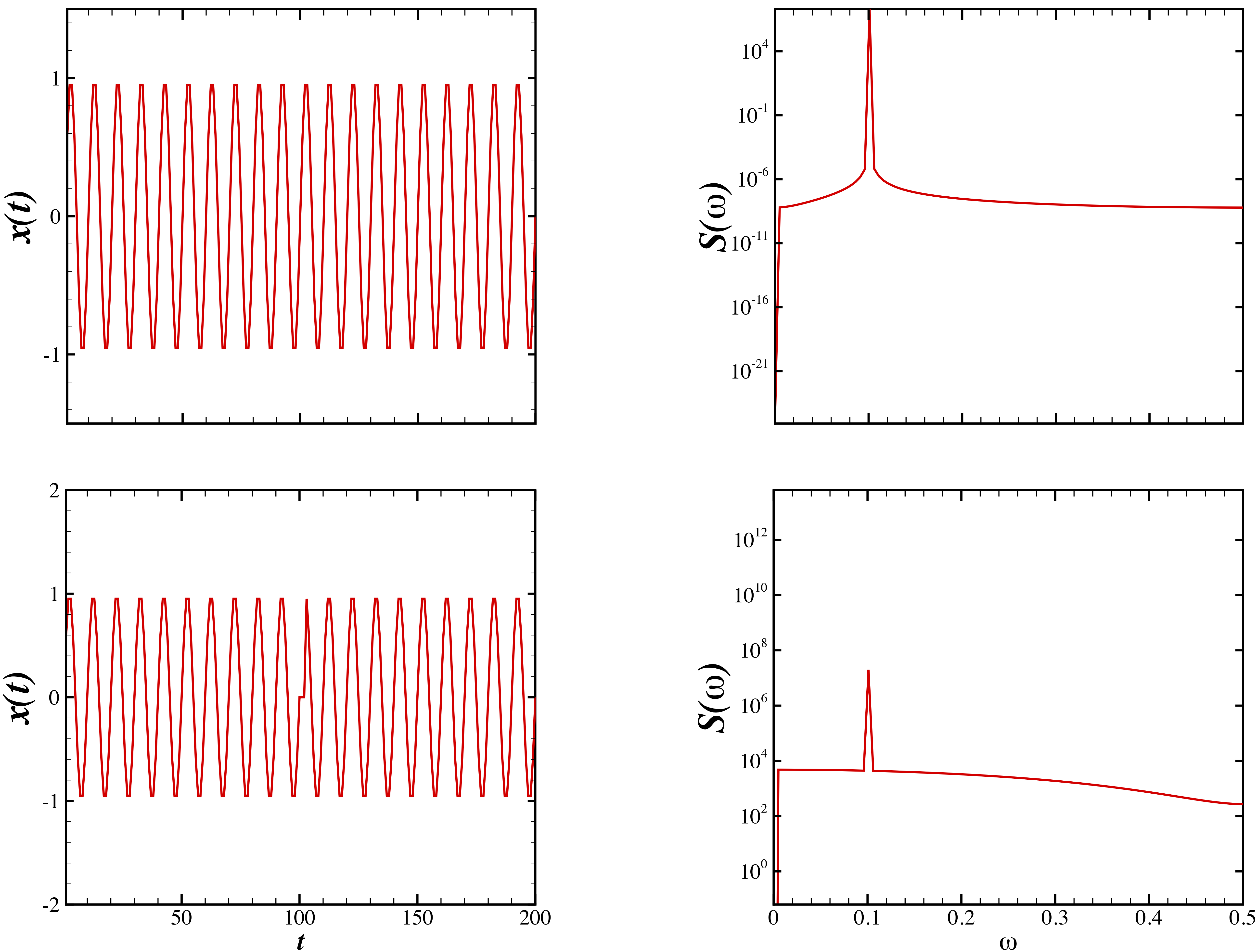
time-frequency analysis techniques: Fast Fourier Transform
Continuous wavelet transform Short-time Fourier transform Chirplet transform

Fractional Fourier transform

چند مثال

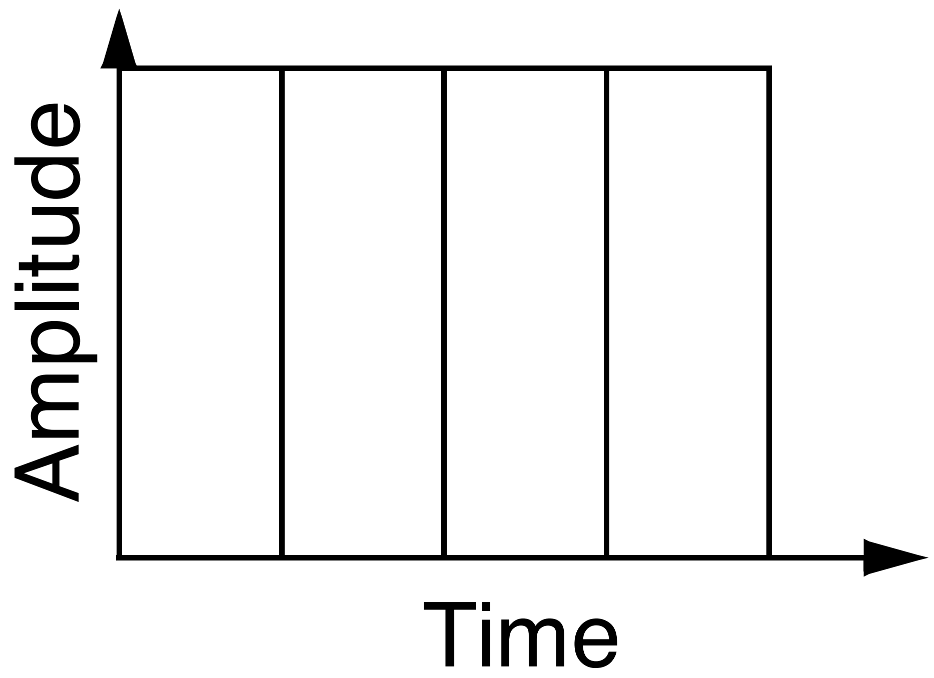


x(t)
S(ω)
t
ω

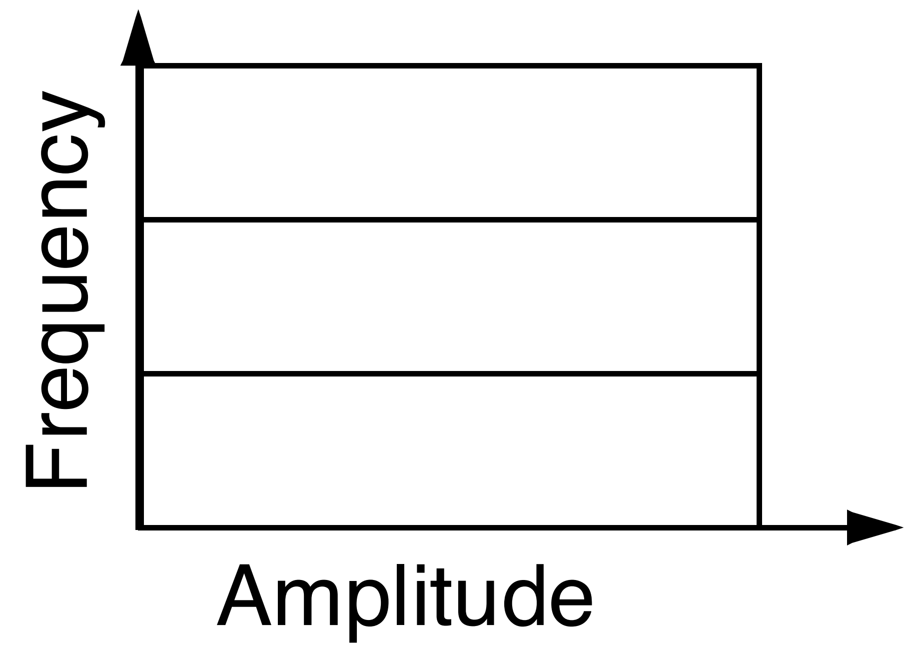


x(t)
1
0
-1
S(ω)
10^4
10^{-1}
10^{-6}
10^{-11}
10^{-16}
10^{-21}
x(t)
2
1
0
-1
-2
50
100
150
200
t
S(ω)
10^{12}
10^{10}
10^8
10^6
10^4
10^2
10^0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
ω

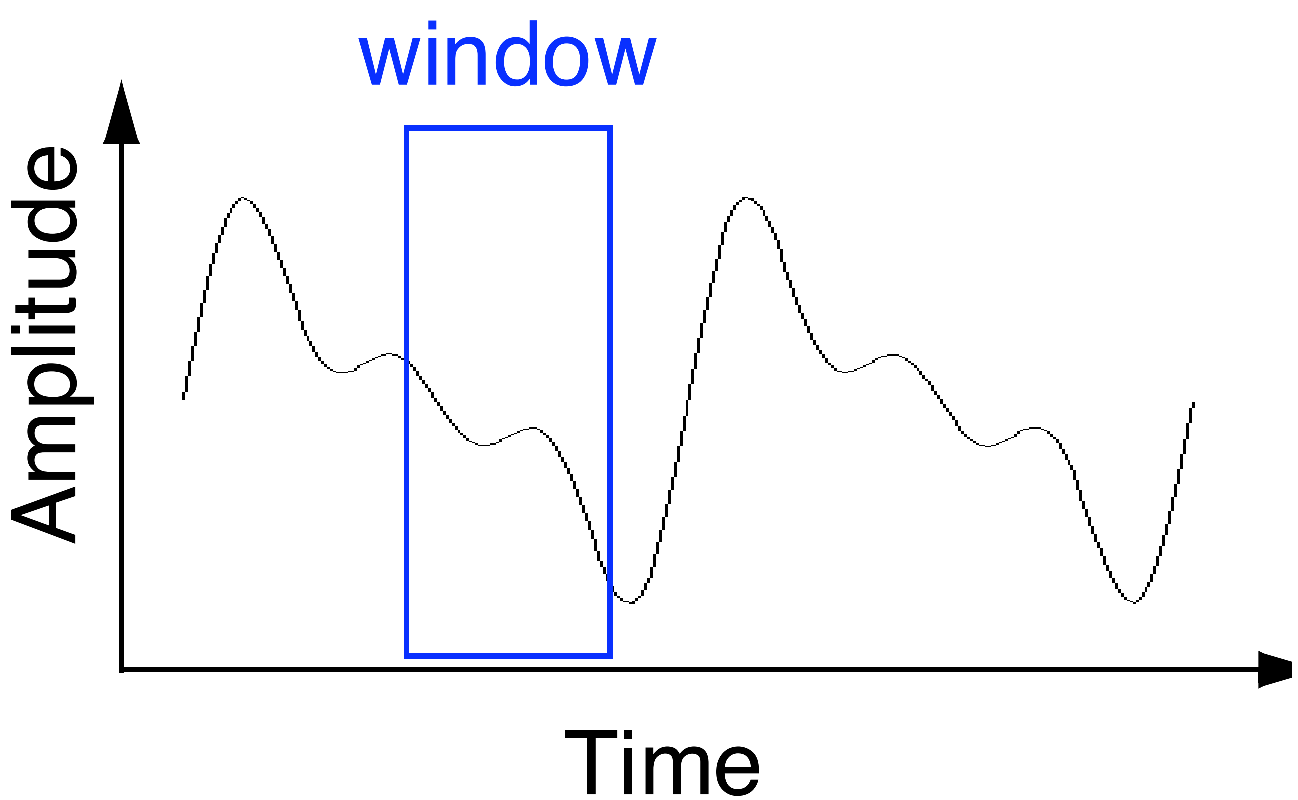
Short time Fourier Transform



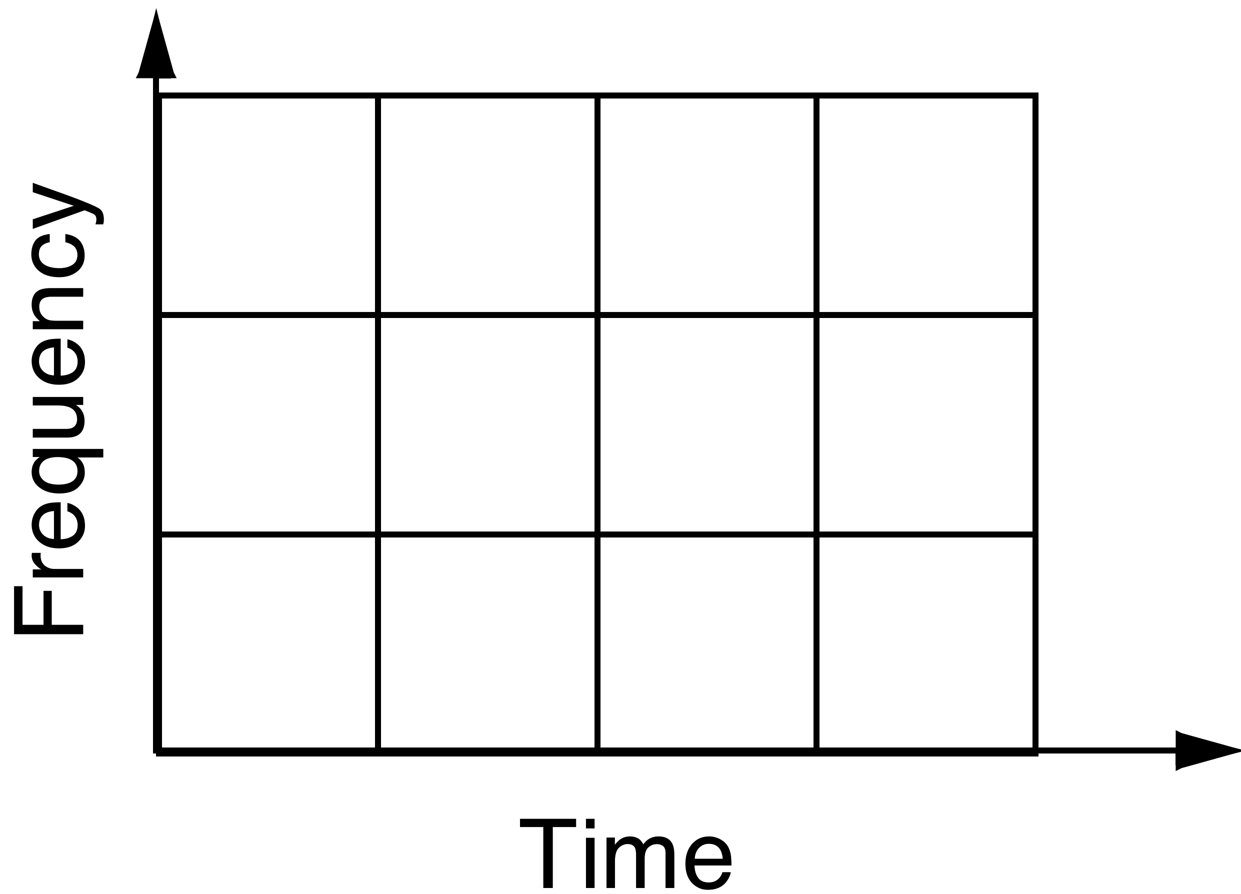
Time Domain (Shannon)



Frequency Domain (Fourier)



Matlab-wavelet package



$$F(u,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{u,s}(t) f(t) dt$$

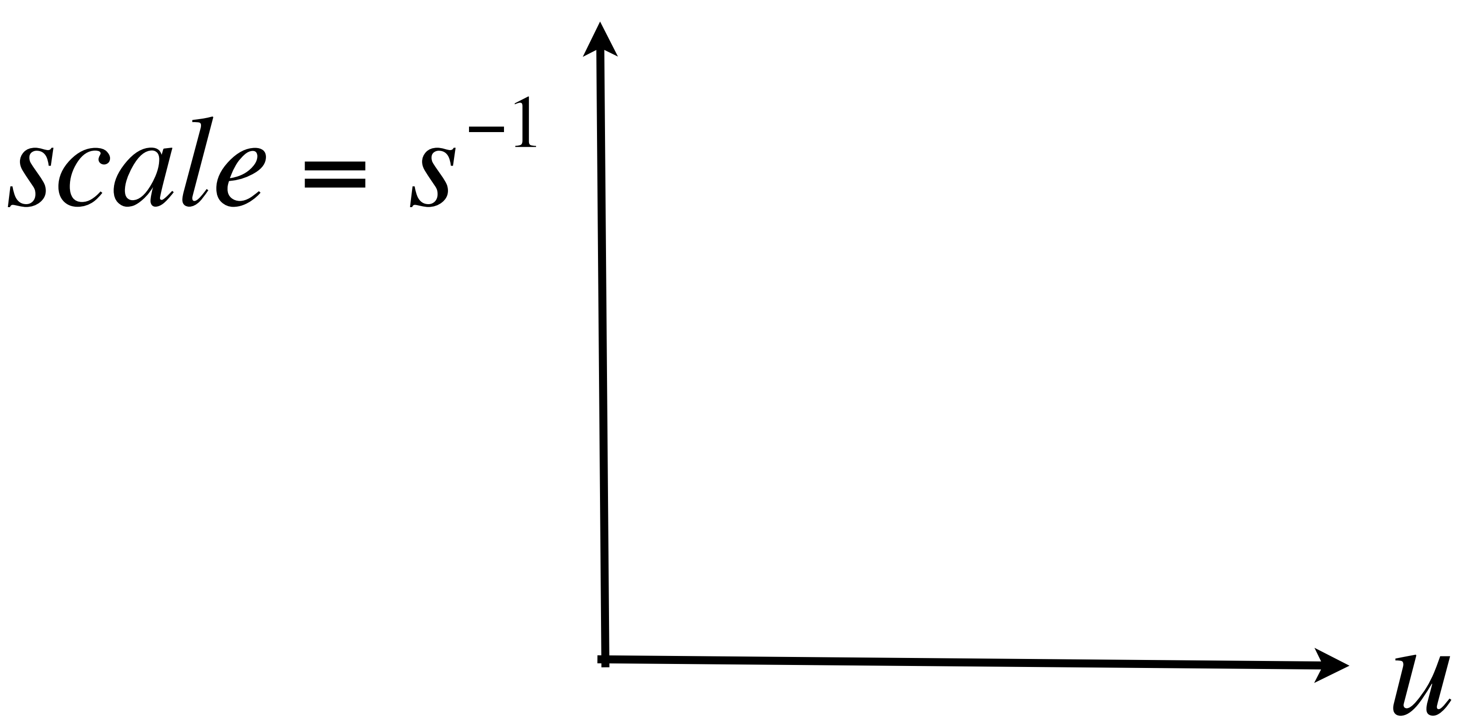
$$for \quad g_{u,s}(t) = e^{ist}$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} f(t) dt$$

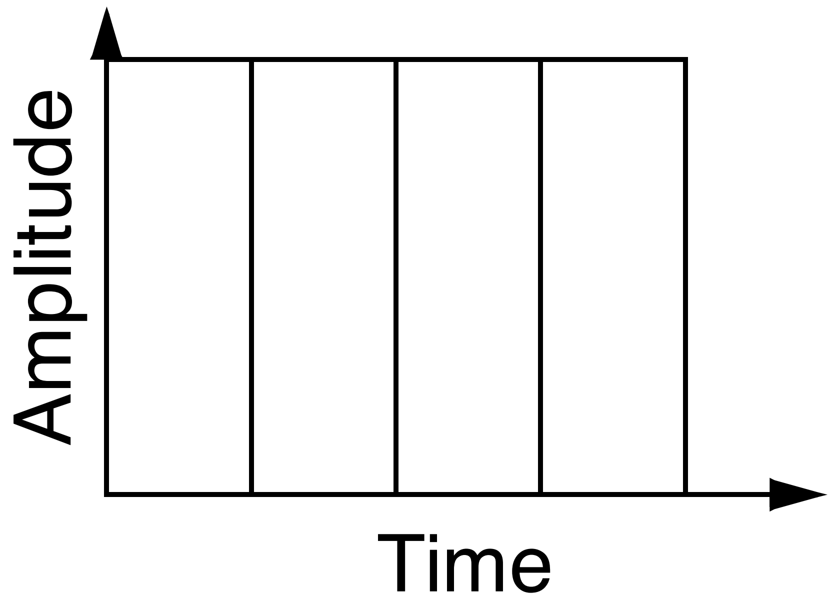
$$g_{u,s}(t) = e^{ist} g(u-t)$$

یک تابع متقارن و جایگزیده در

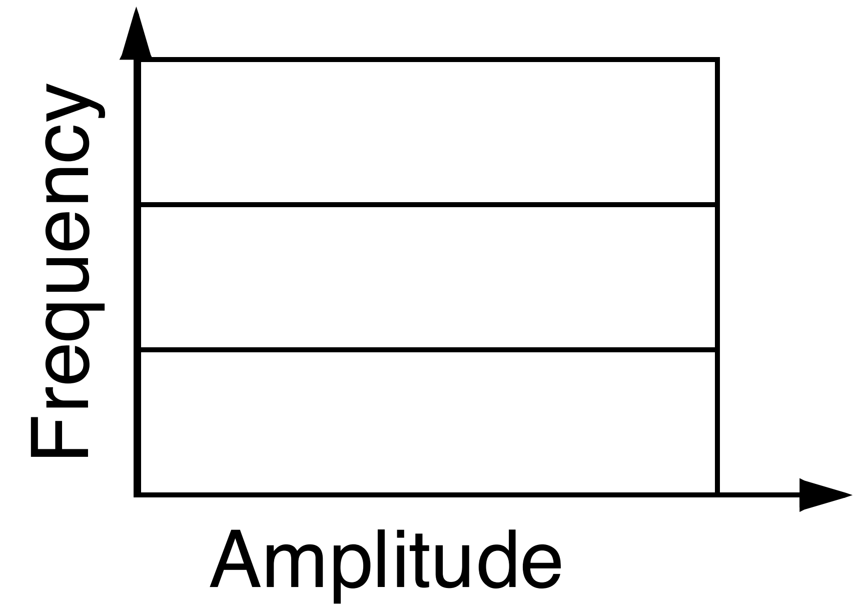
$$u = t$$



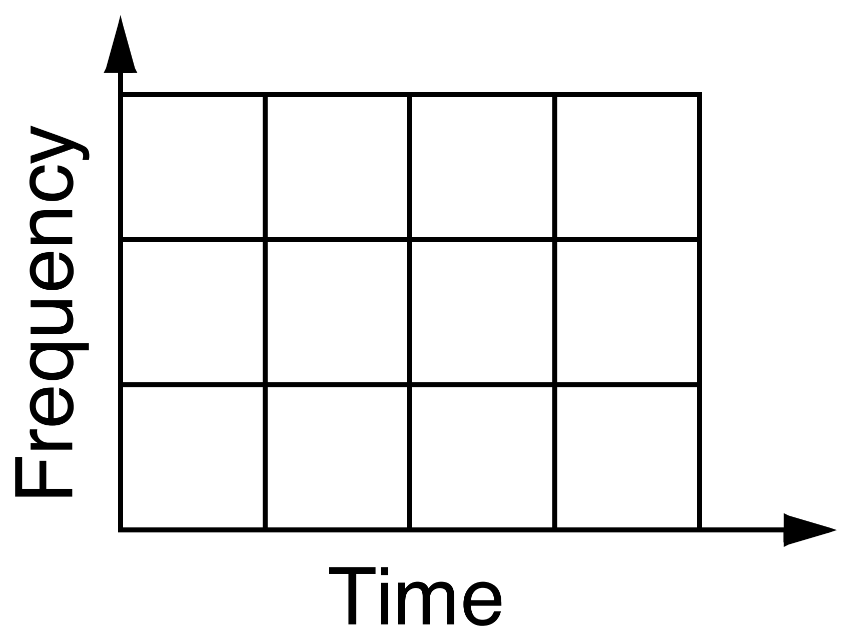
STFA versus Wavelet



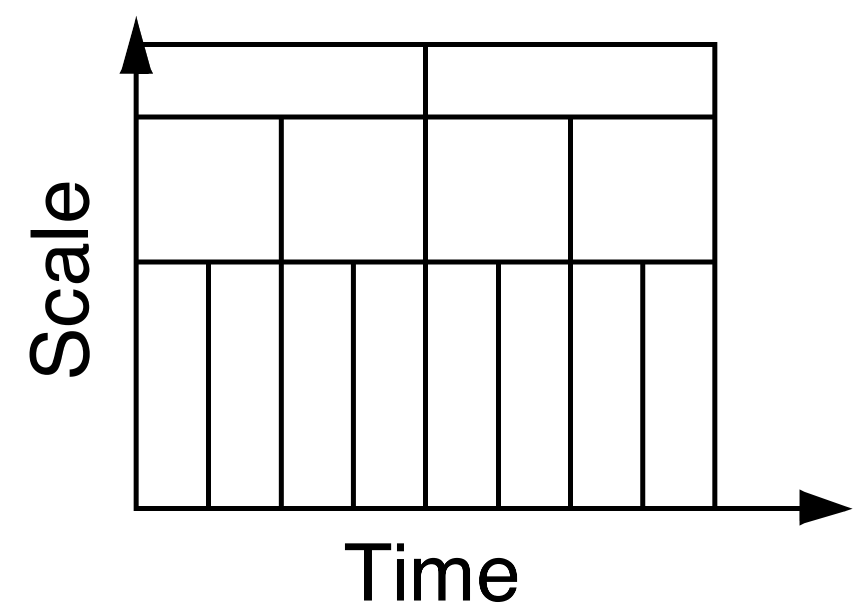
Time Domain (Shannon)



Frequency Domain (Fourier)



STFT (Gabor)



Wavelet Analysis

Matlab-wavelet package

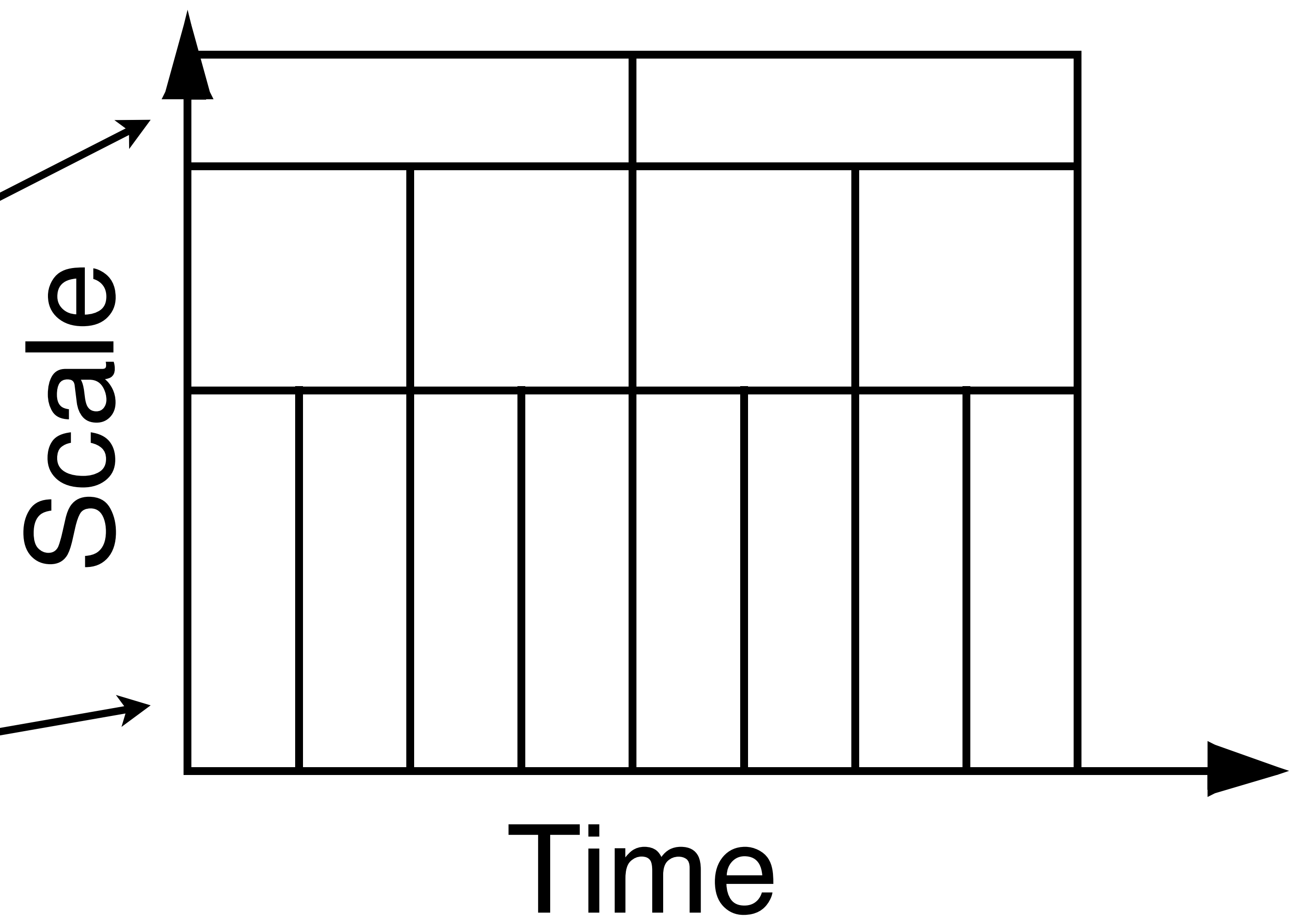
وقتی بخواهیم فرکانسهای کوچک را با دقت اندازه گیری کنیم در زمان گسترده می شویم
وقتی بخواهیم فرکانسهای بزرگ را با دقت اندازه گیری کنیم در آن صورت در زمان باید محدود شویم

فرکانسهای کوچک

$$s : t^{-1}$$

$$scale \equiv s^{-1} = t$$

فرکانسهای بزرگ



Wavelet Analysis

$$\mathrm{CWT}_x^{\psi}(\tau, s) = \Psi_x^{\psi}(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int x(t) \cdot \psi^{\text{¿}}\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt$$

Translation

(The location of the window)

Scale

Mother Wavelet

- Wavelet
  - Small wave
  - Means the window function is of finite length
- Mother Wavelet
  - A prototype for generating the other window functions
  - All the used windows are its dilated or compressed and shifted versions

Credit: S.M. Vaez

High resolution problem in STFA

$$\sigma_{f(t)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)p(t)dt = \int d\omega S(\omega) = \int d\omega \left|F(\omega)\right|^2$$

$$\sigma_t^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} (t-u)^2 \left|g_{u,s}(t)\right|^2 dt$$

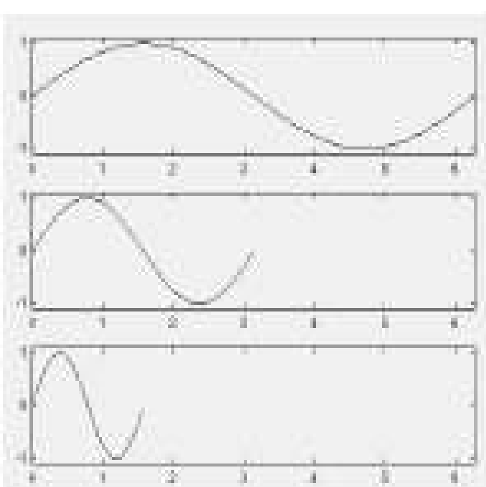
$$\sigma_\omega^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - s)^2 \left|g_{u,s}(t)\right|^2 d\omega$$

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{2}$$

با توجه به انتخاب پایه در این روش برای فرکانسهای پایین که گسترگی فضایی پایه زیاد تر است و بنابراین ناحیه بزرگتری از سیگنال اولیه باید مورد بررسی قرار گیرد تا نتیجه به دست آمده برای ضریب قابل اعتماد باشد لحاظ نمی گردد. همچنین برای فرکانسهای بالا نیز به گستردگی فضایی کوچکتری هستیم تا نتیجه مورد اعتماد باشد در این رهیافت این توانایی به دست نمی آید

Scales

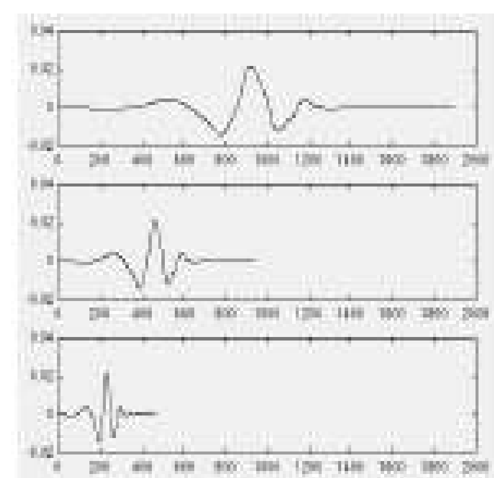
- Scale
  - S>1: dilate the signal
  - S<1: compress the signal
- Low Frequency -> High Scale -> Non-detailed Global View of Signal -> Span Entire Signal
- High Frequency -> Low Scale -> Detailed View Last in Short Time
- Only Limited Interval of Scales is Necessary



$f(t) = \sin(t) \quad ; \quad a = 1$

$f(t) = \sin(2t) \quad ; \quad a = \frac{1}{2}$

$f(t) = \sin(4t) \quad ; \quad a = \frac{1}{4}$

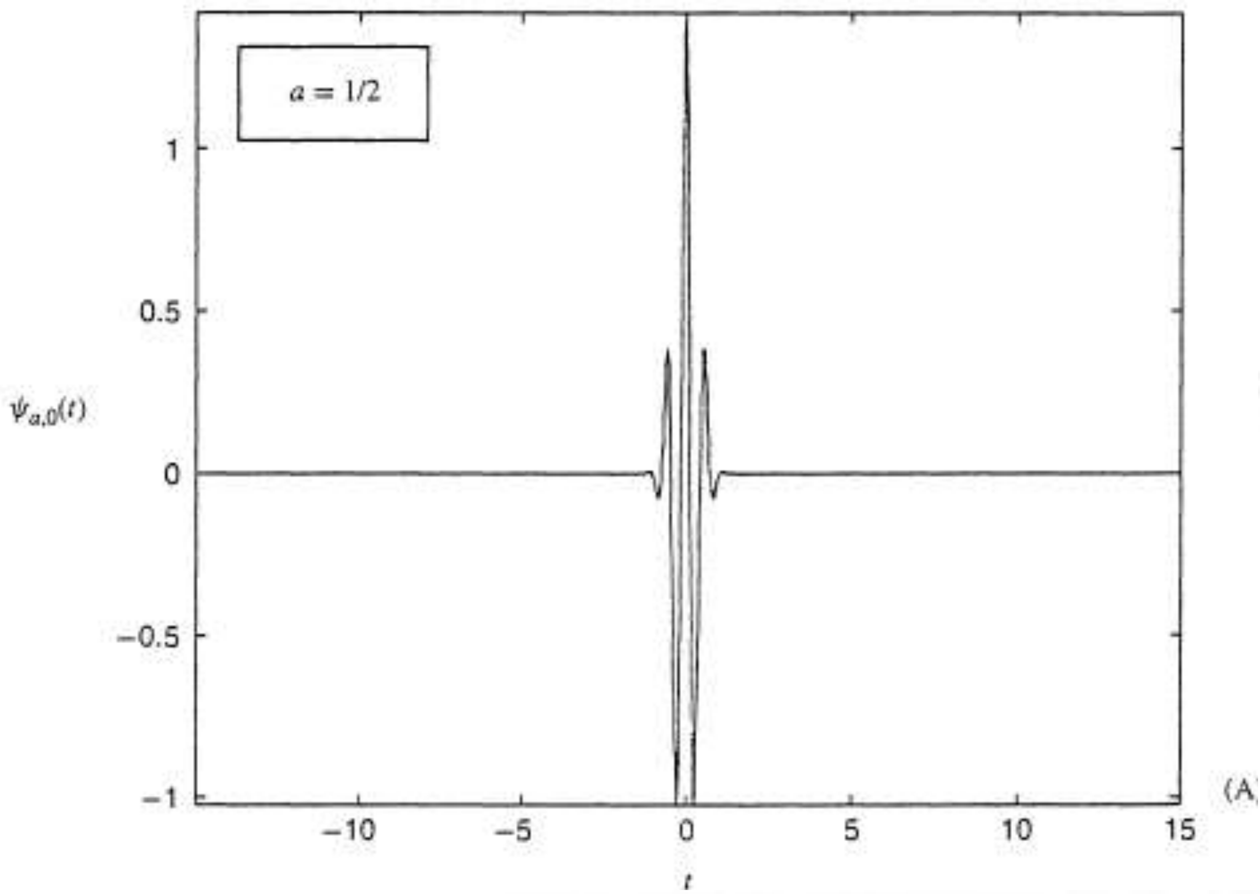


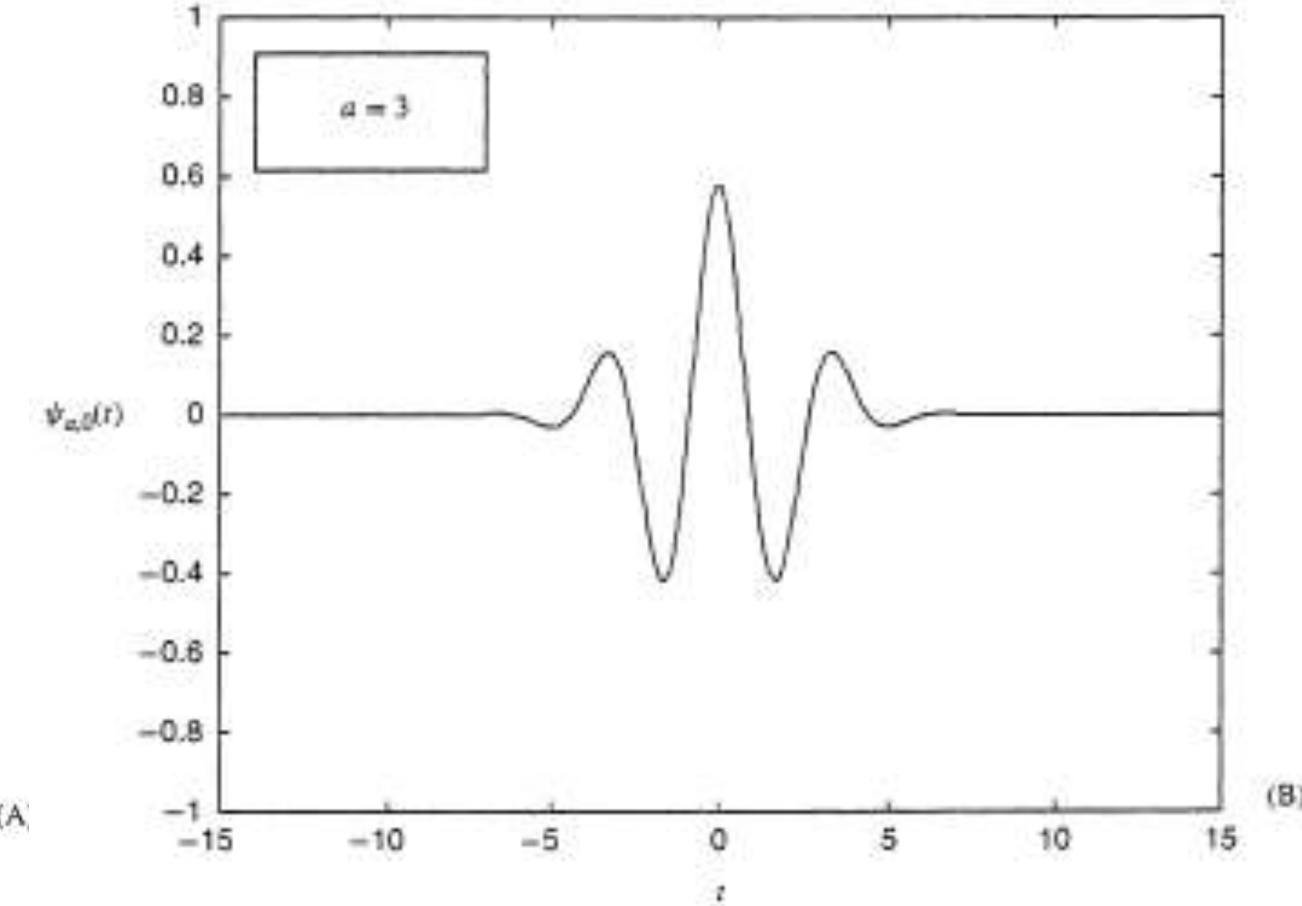
$f(t) = \psi(t) \quad ; \quad a = 1$

$f(t) = \psi(2t) \quad ; \quad a = \frac{1}{2}$

$f(t) = \psi(4t) \quad ; \quad a = \frac{1}{4}$

Credit: S.M. Vaez





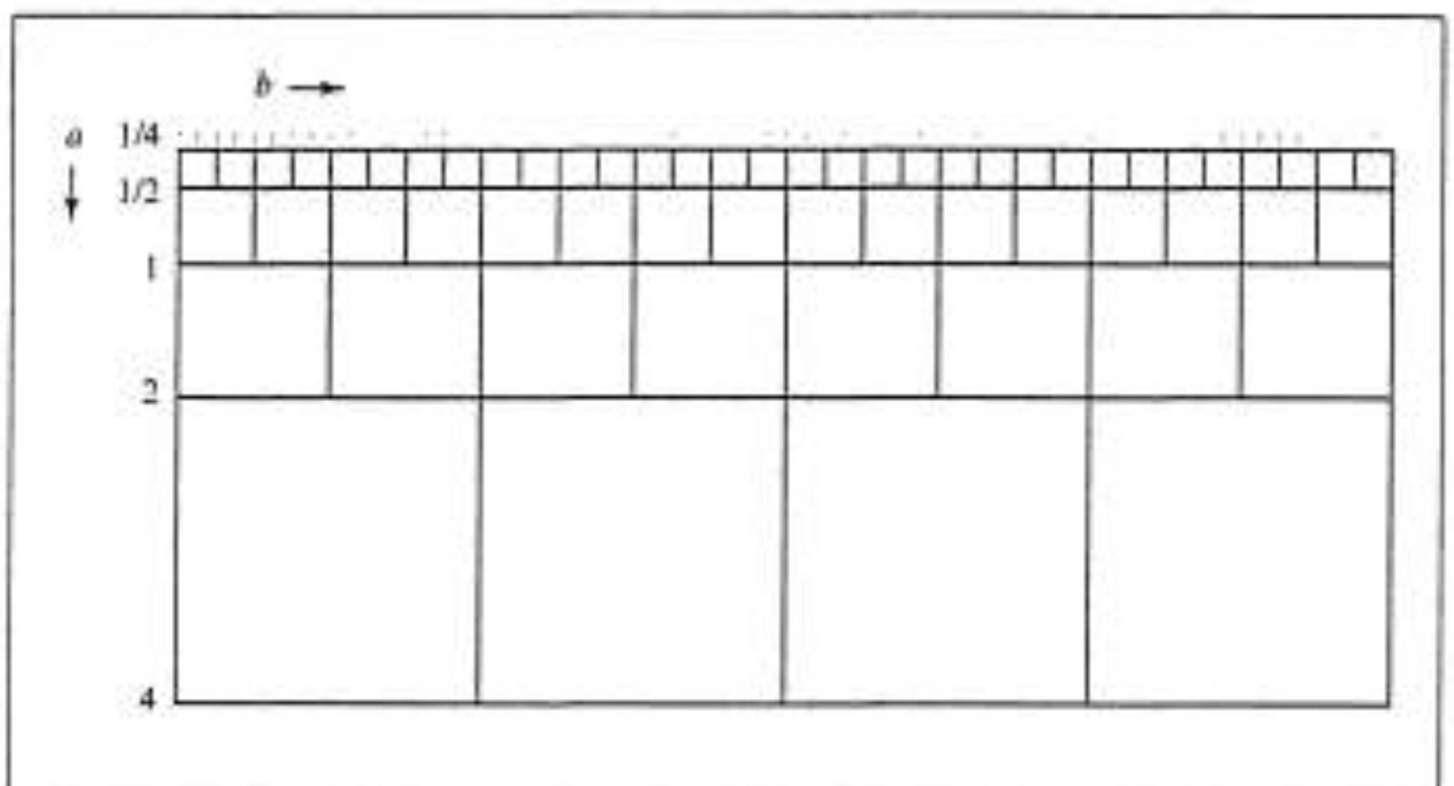
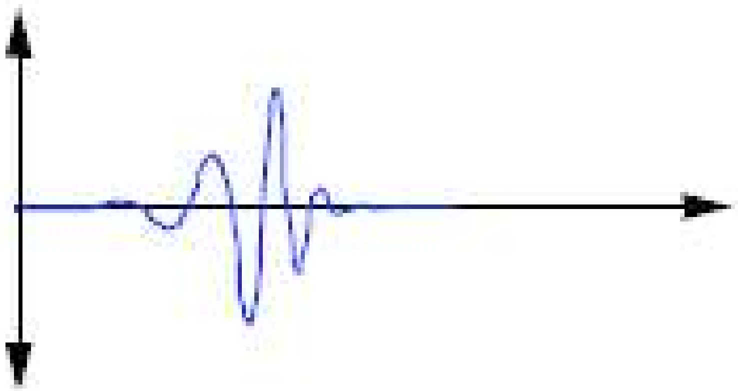


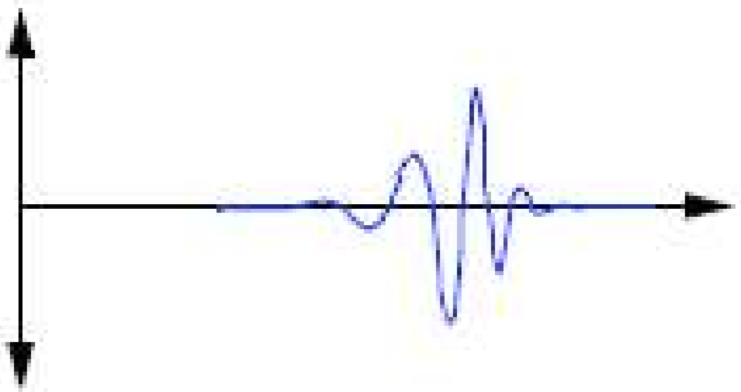
Figure 2.3 The time-frequency cells that correspond to dyadic sampling.

Rao, R. M. "Wavelet Transforms: Introdu-ction to Theory and Applications." Addision Wesley (1998).

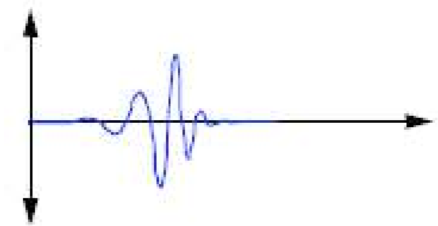
Shifting



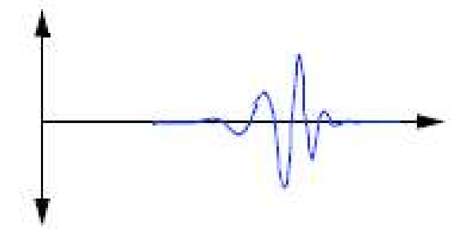
تابع موجک $\Psi(t)$



تابع موجک $\Psi(u-t)$



تابع موجک $\Psi(t)$



تابع موجک $\Psi(u-t)$

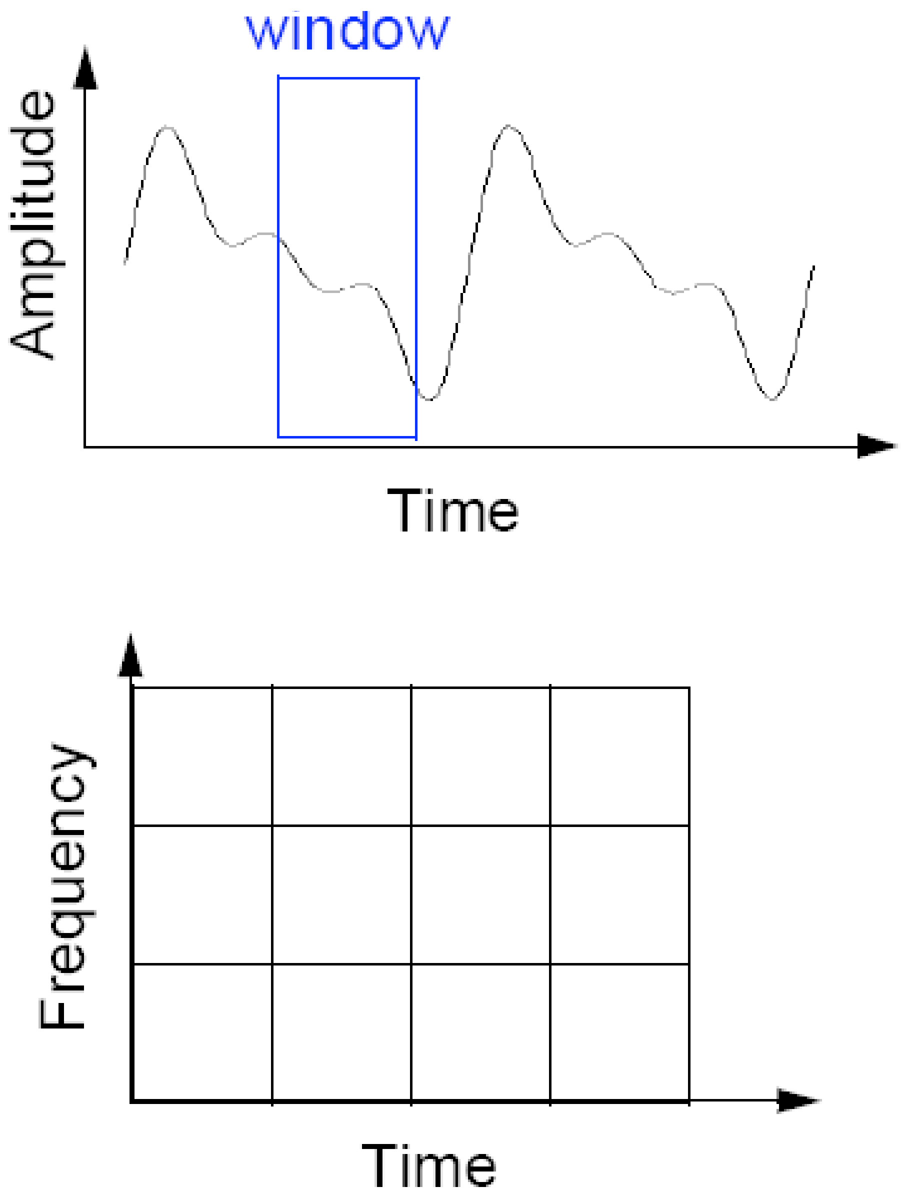
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (۱۷)$$

در صورتی که در تبدیل موجک داریم:

$$C(scale, position)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\Psi(scale,u)du \qquad (۱۸)$$

که در معادله بالا $\Psi(scale,u)$ تابع موجک نام دارد. شکل عمومی این تابع به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\Psi(scale,u) &\equiv \Psi(\lambda,u)\\ &=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Psi\left(\frac{u-t}{\lambda}\right)\end{aligned} \qquad (۱۹)$$



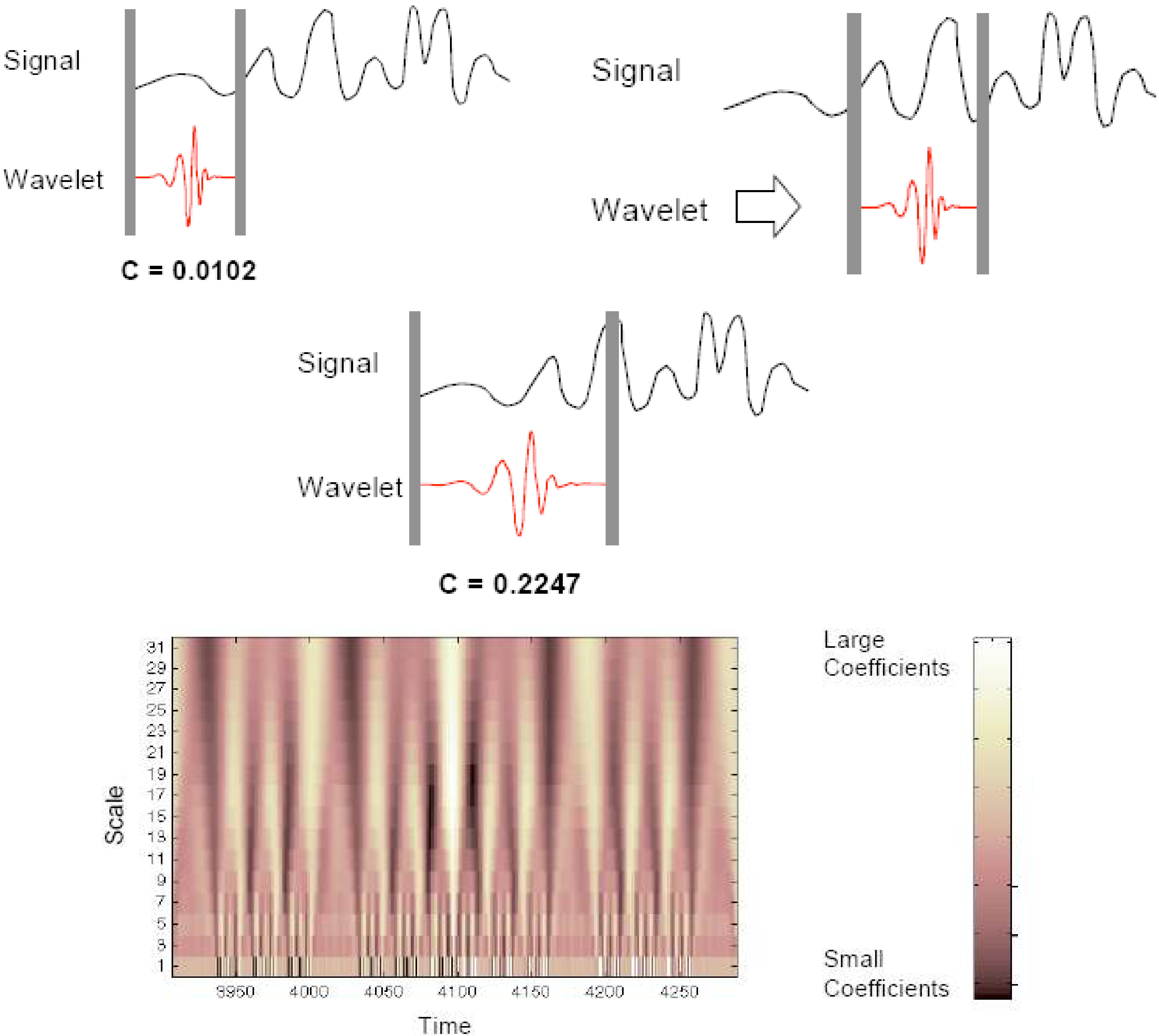
شکل ۱۹: بخش بالا به صورت شماتیک روش تحلیل فوریه زمان کوتاه و بخش پایین نتیجه حاصل از این تحلیل

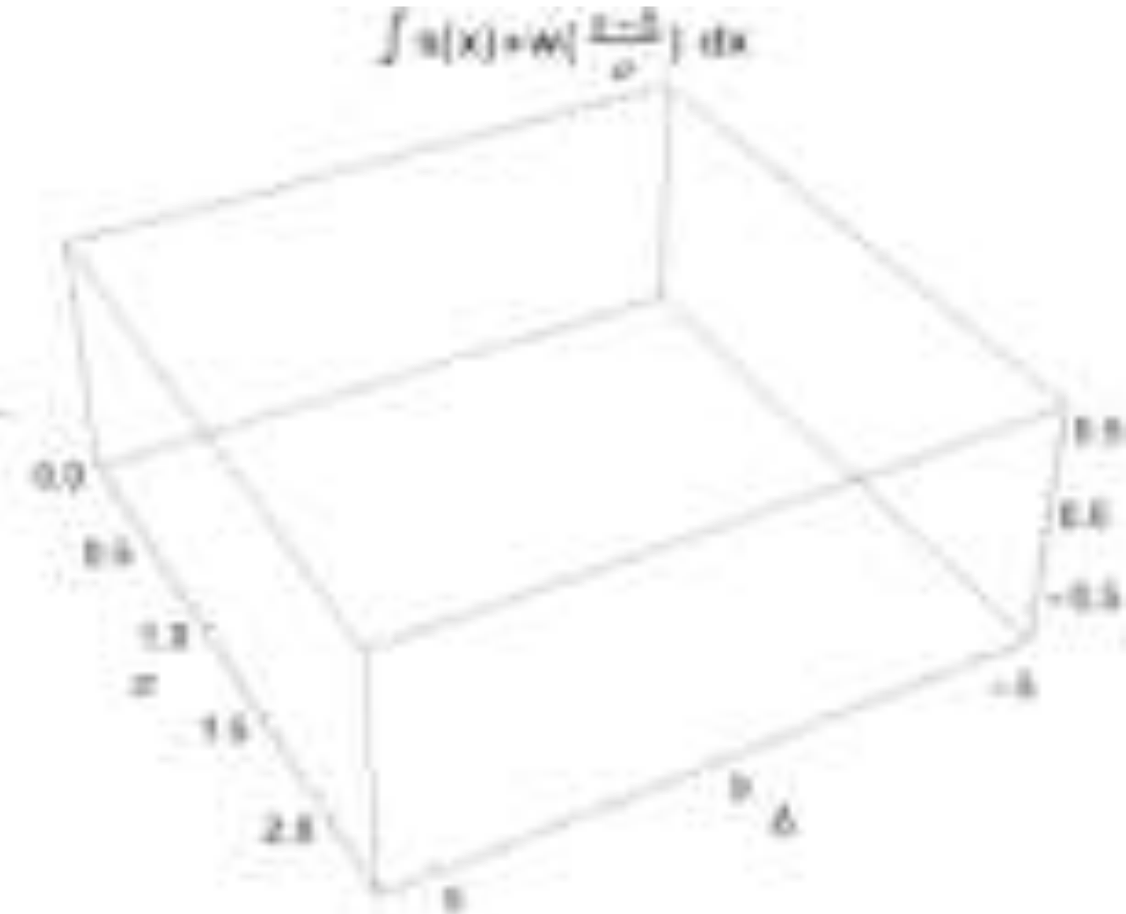
این روش به دنبال پاسخ به دو سئوال زیر است:

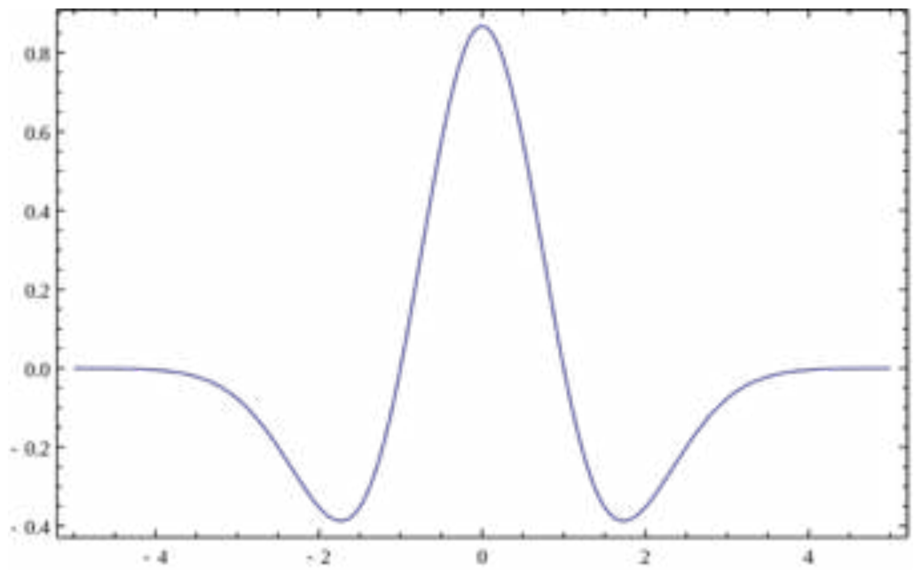
۱) در چه زمانی ؟

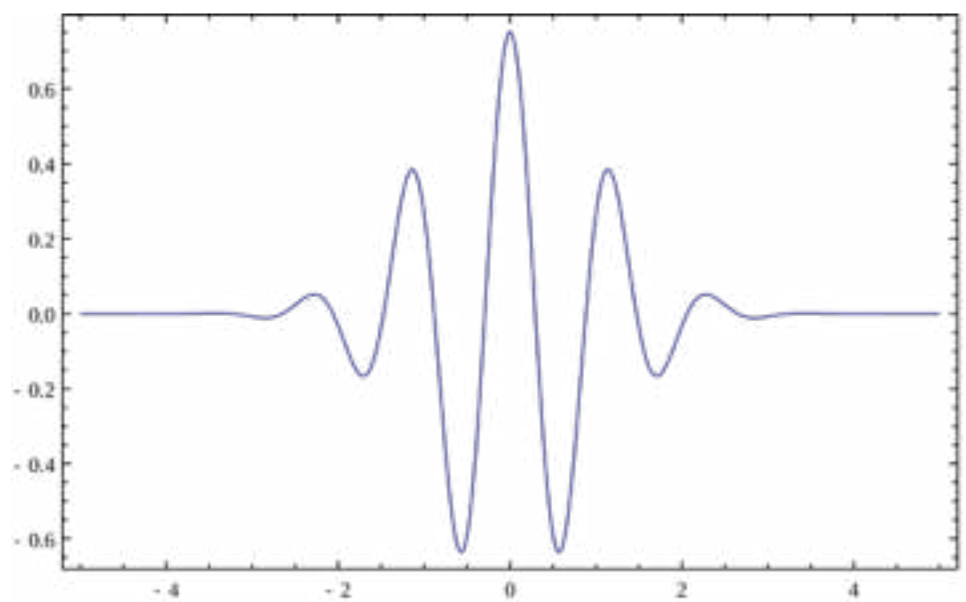
۲) و چه رخدادی روی داده است؟

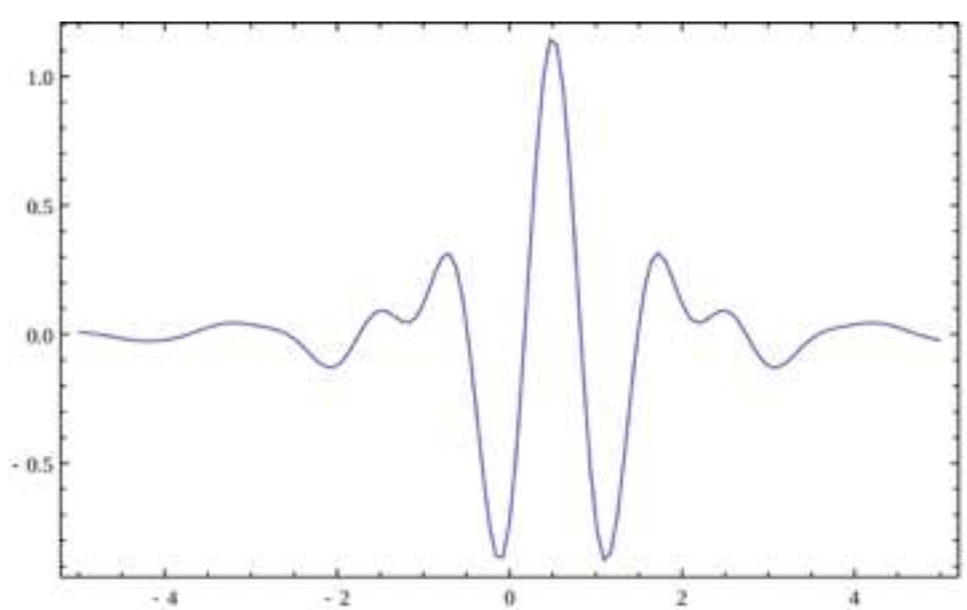
با این روش دقت محدودی بسته به اندازه پنجره در نظر گرفته شده به دست می‌آید. برای بسیاری از سری‌های زمانی نیاز به انعطاف بیشتری در انتخاب اندازه پنجره در زمانهای مختلف داریم که در این روش به دست نمی‌آید. قدم منطقی بعدی استفاده از رهیافت تبدیل موجک است.

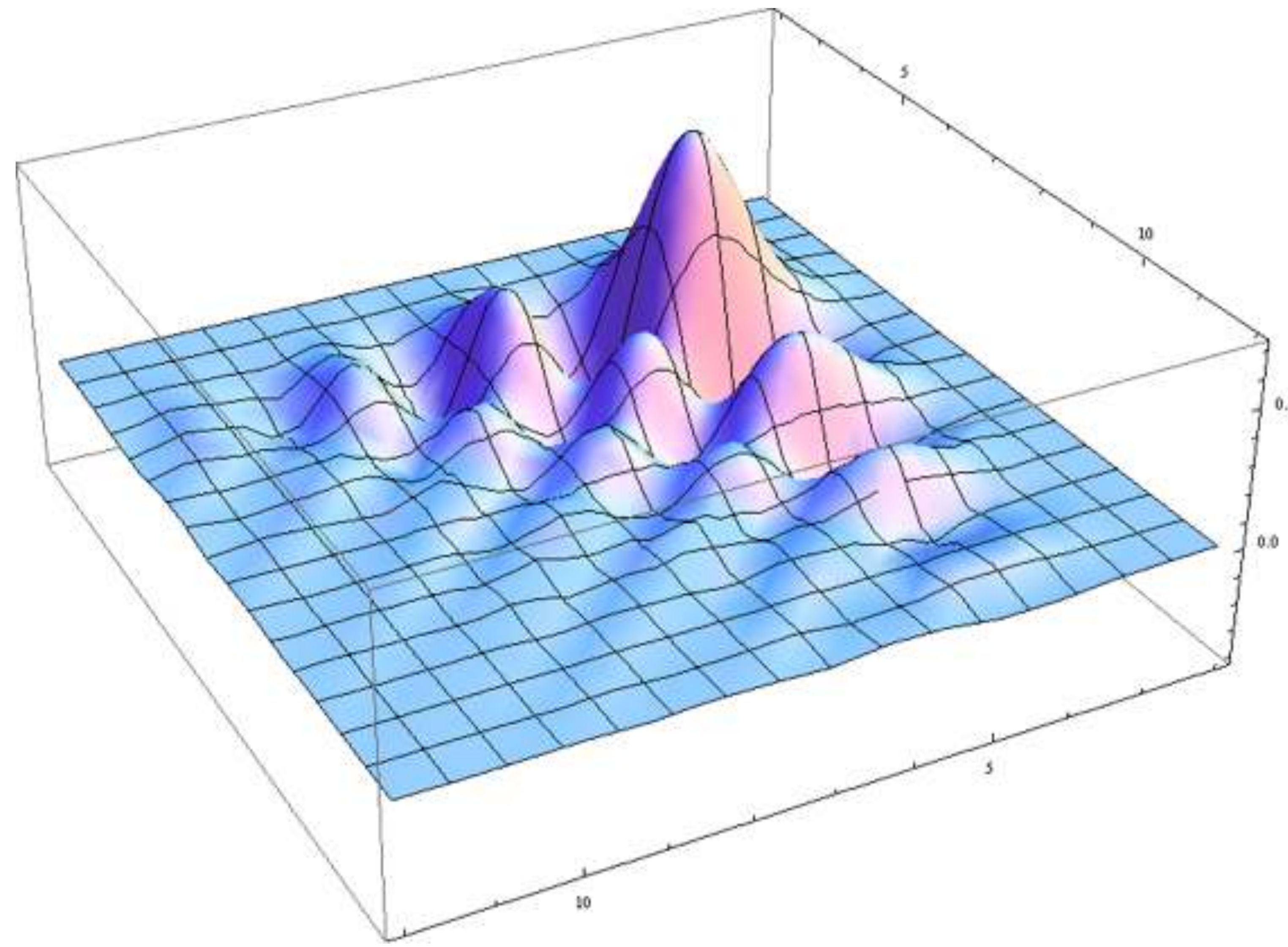

Signal
Wavelet
C = 0.0102
Signal
Wavelet
Signal
Wavelet
C = 0.2247
Scale
31
29
27
25
23
21
19
17
15
13
11
9
7
5
3
1
3950
4000
4050
4100
4150
4200
4250
Time
Large Coefficients
Small Coefficients



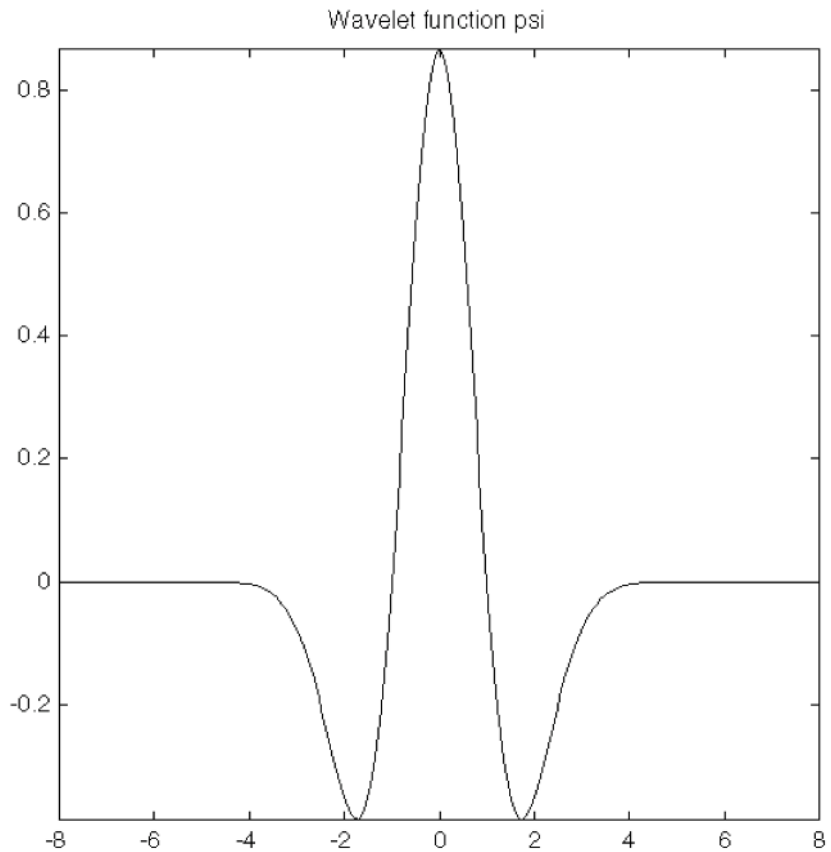

0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4
-4
-2
0
2
4


0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-4
-2
0
2
4

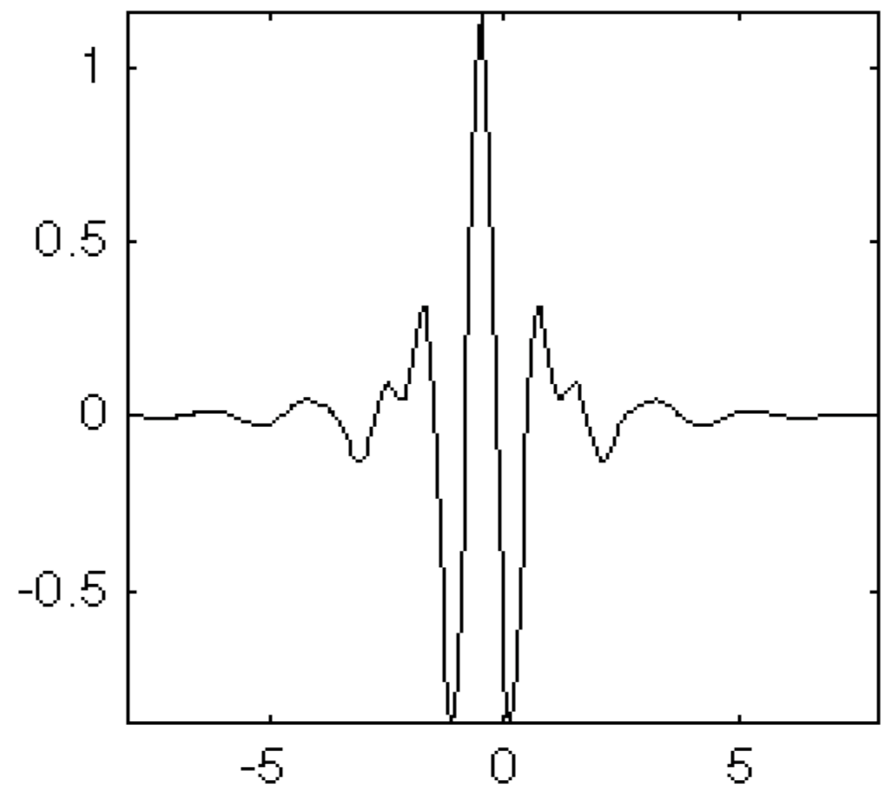

1.0
0.5
0.0
-0.5
-4
-2
0
2
4


5
10
0.5
0.0
5
10

$$\Psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3\sigma}\pi^{\frac{1}{4}}}\left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2}\right)e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

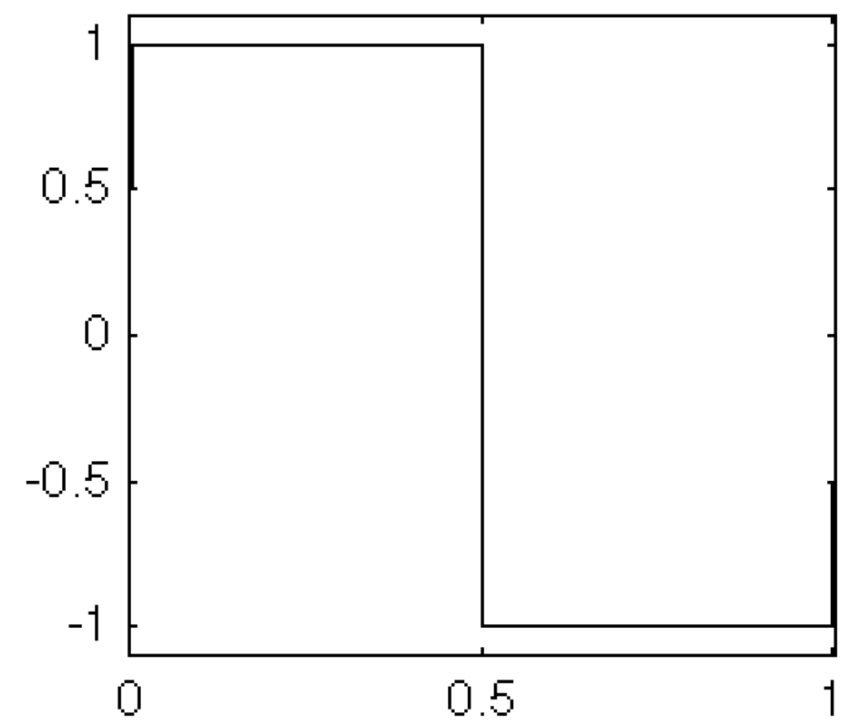


شکل۳۴: تابع موجک **Mexican Hat**



شکل۳۵ تابع موجک **Meyer**

$$\Psi(t) = \begin{cases} +1 & for \quad 0 \le t < \frac{1}{2} \\ -1 & for \quad \frac{1}{2} \le t < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

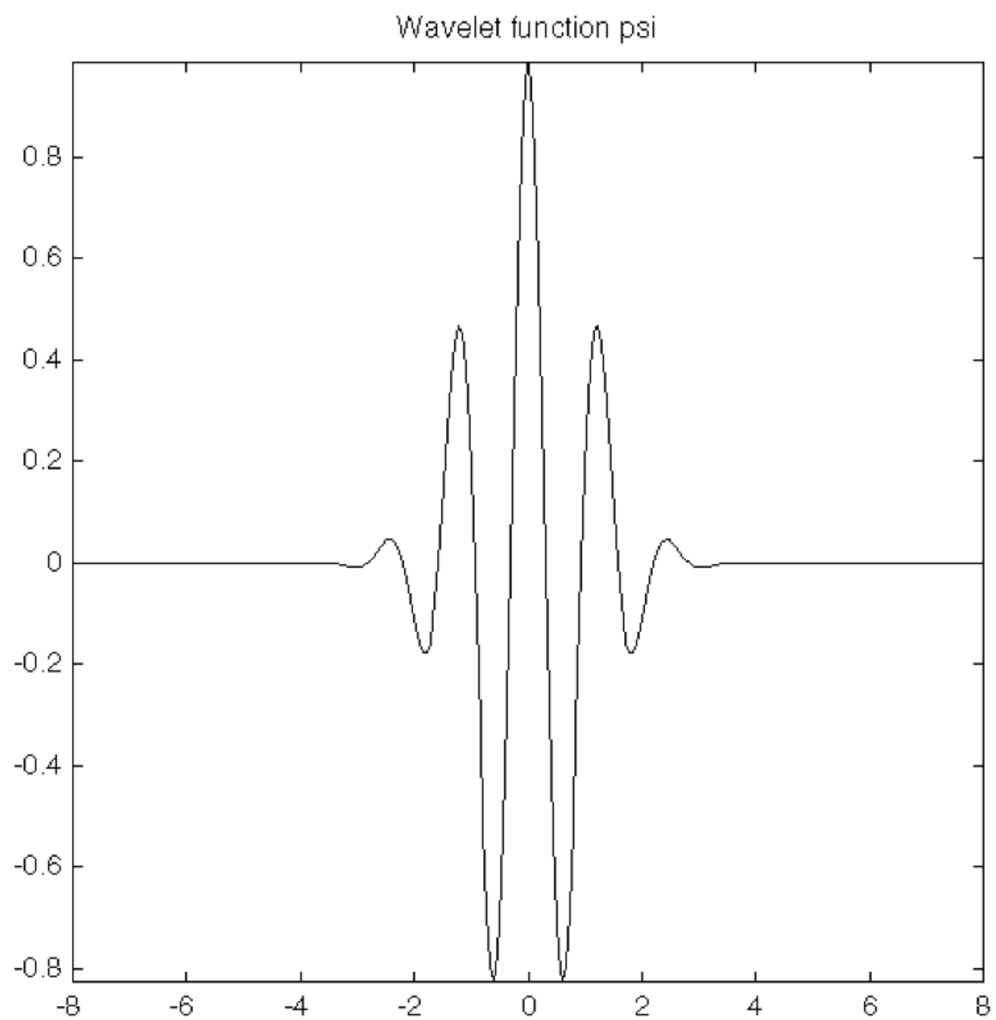


شکل۳۶: تابع موجک **Haar**

$$\Psi(\lambda,t) = c_\lambda \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}} \left(e^{i\lambda t} - \kappa_\lambda\right)$$

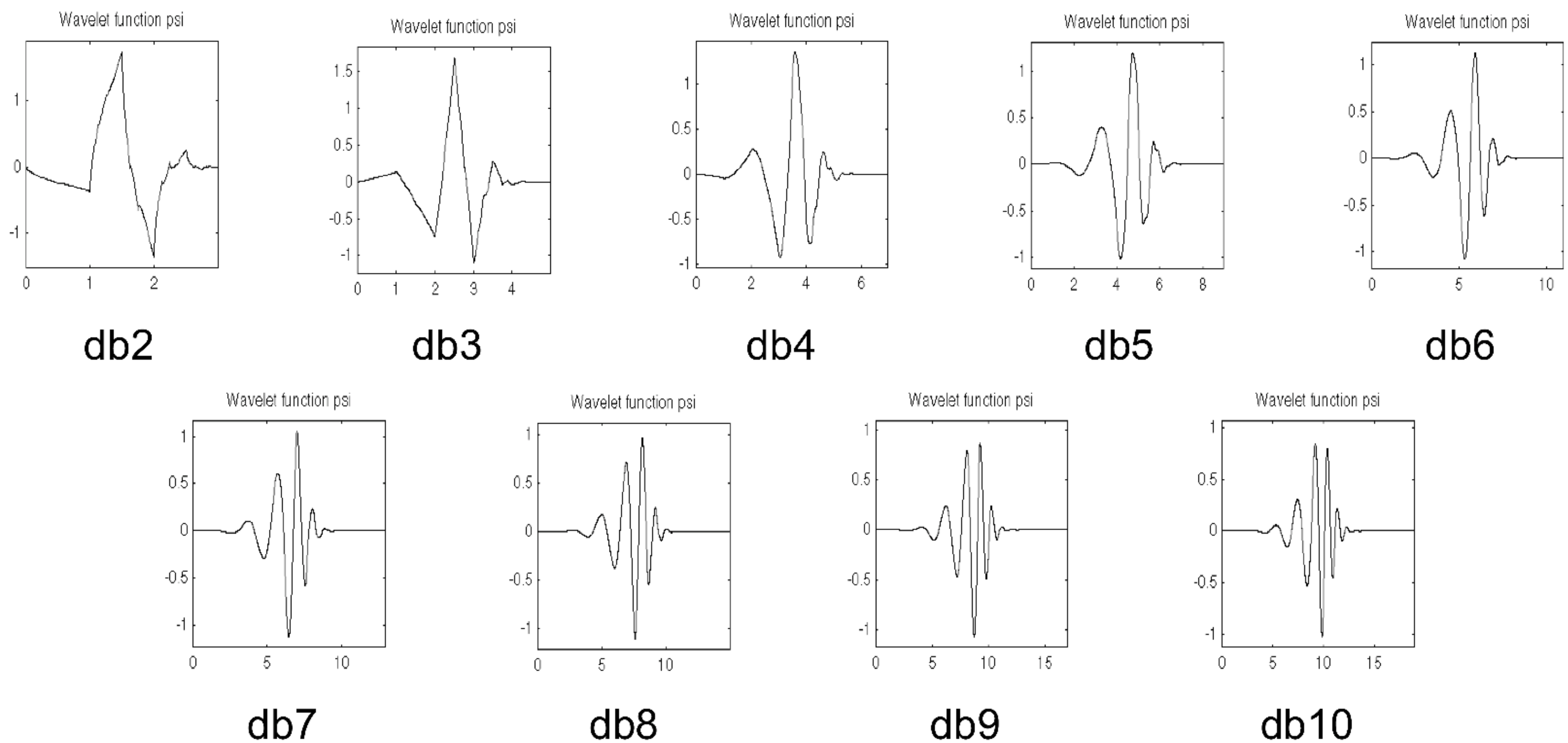
$$c_\lambda \equiv \left(1 + e^{-\lambda^2} - 2e^{-\frac{3}{4}\lambda^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\kappa_\lambda \equiv e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$



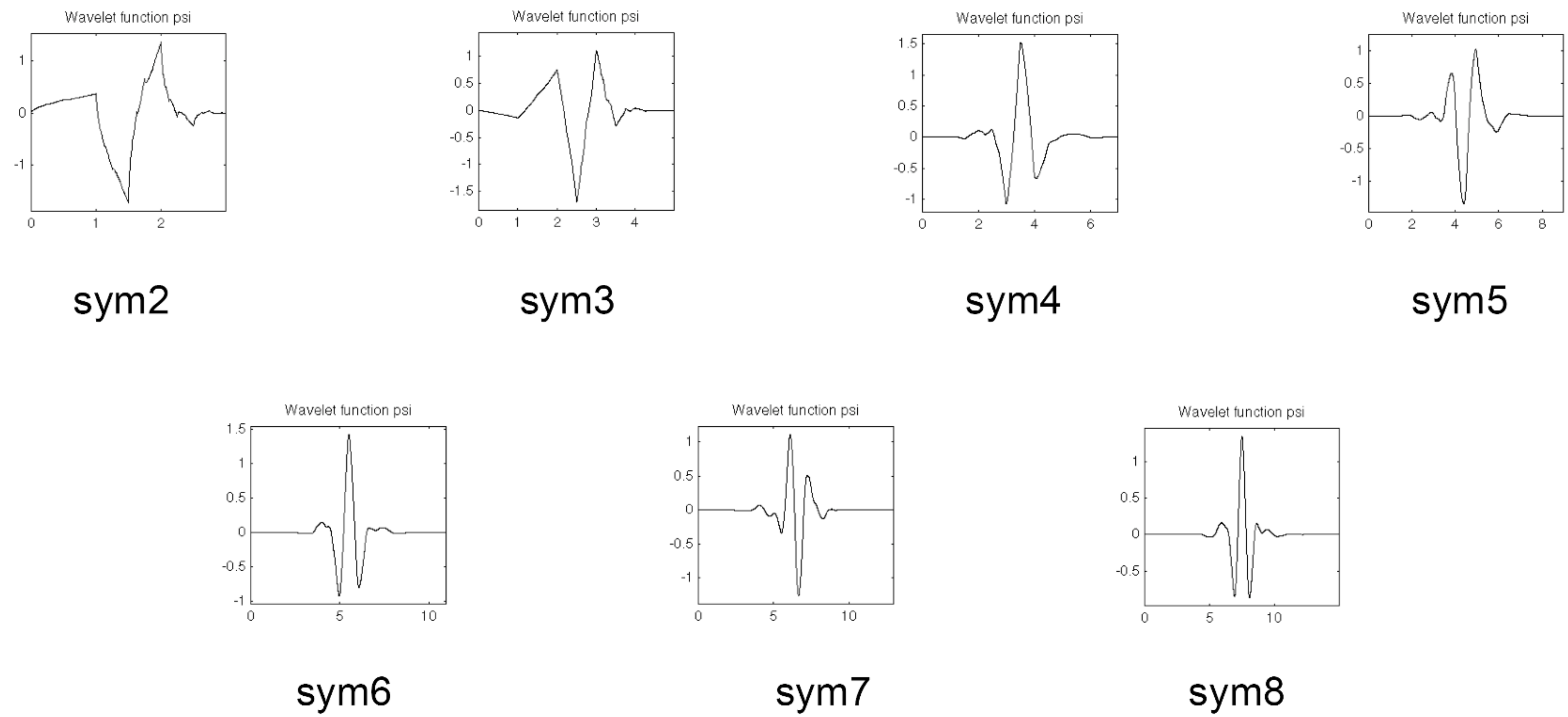
شکل۳۲: تابع موجک Morlet

الف: تابع موجک Daubechie که در شکل زیر این خانواده معرفی شده‌است:



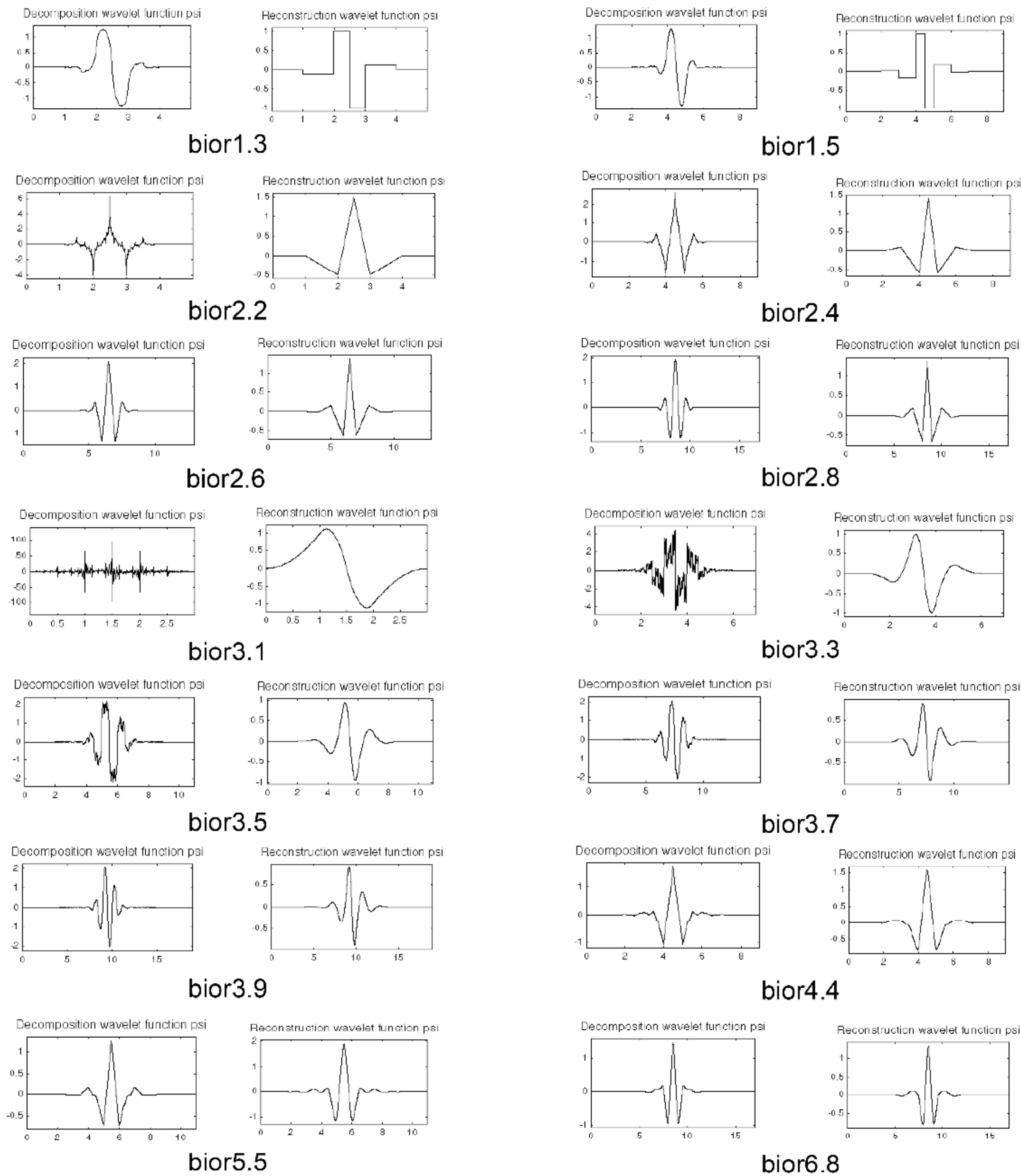
شکل ۲۹: خانواده موجک Duabechie

ج: تابع موجک Symlet

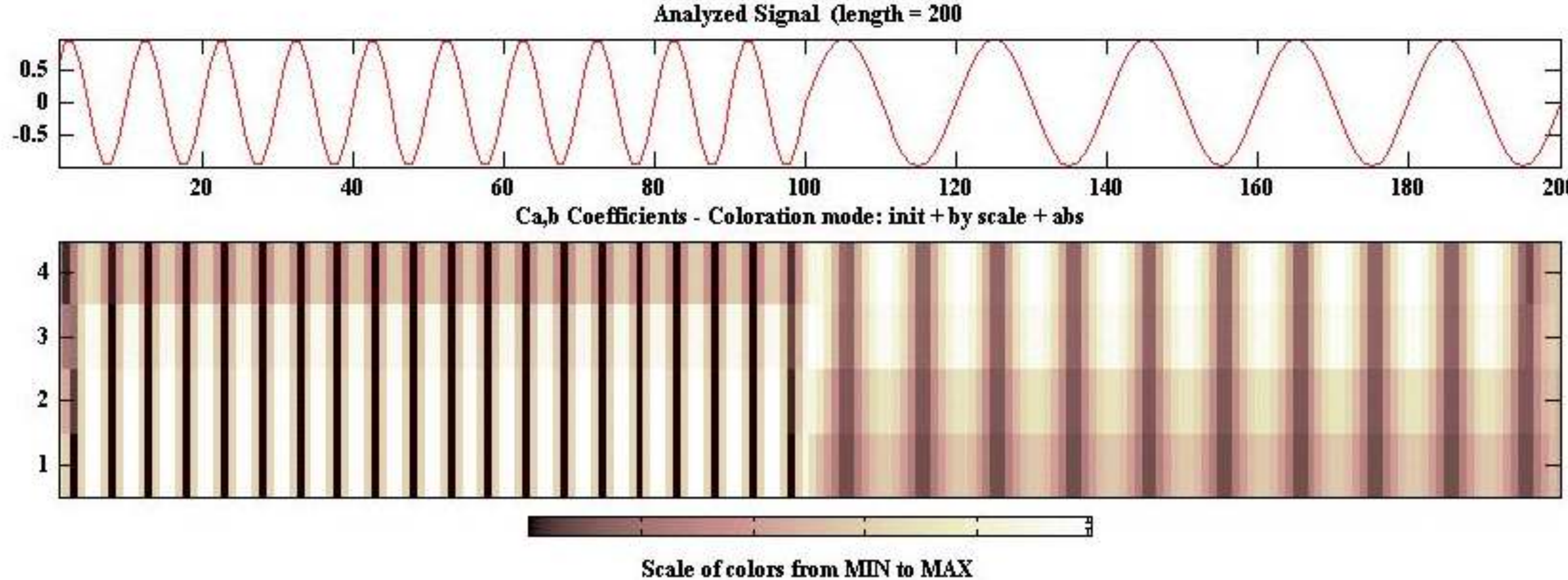


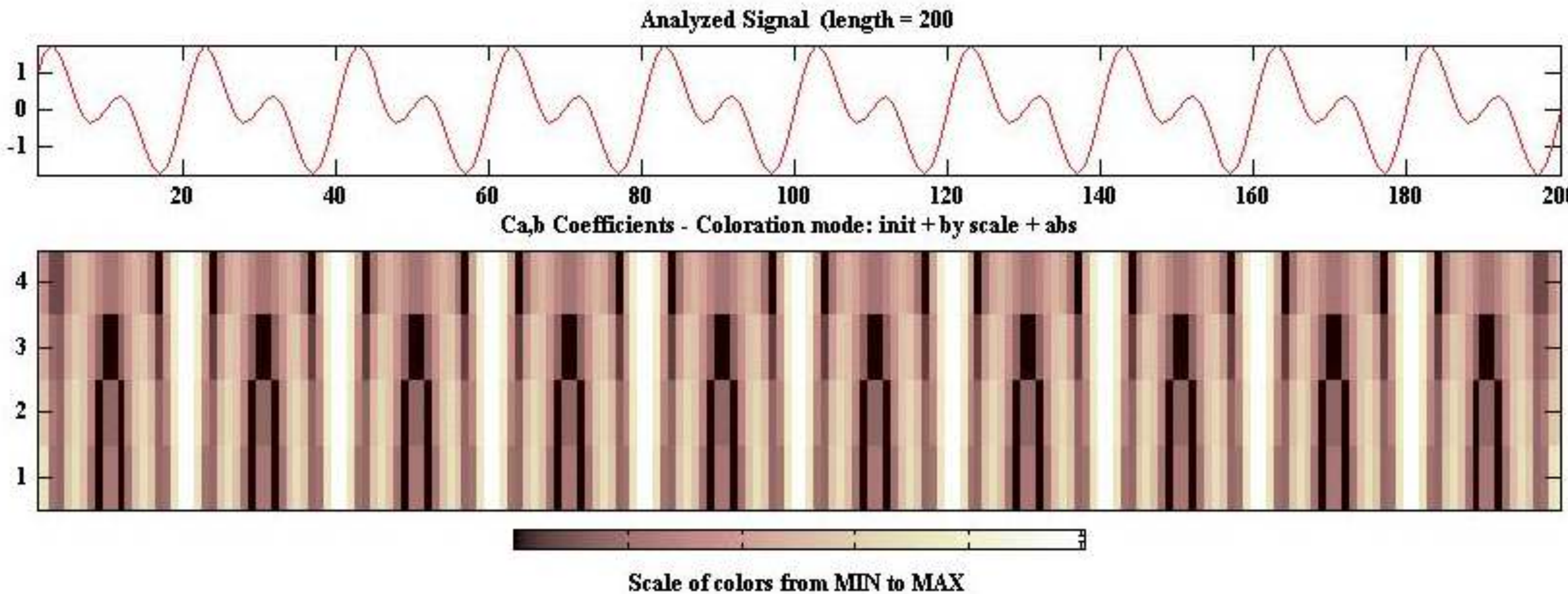
شکل ۳۱: خانواده موجک Symlets

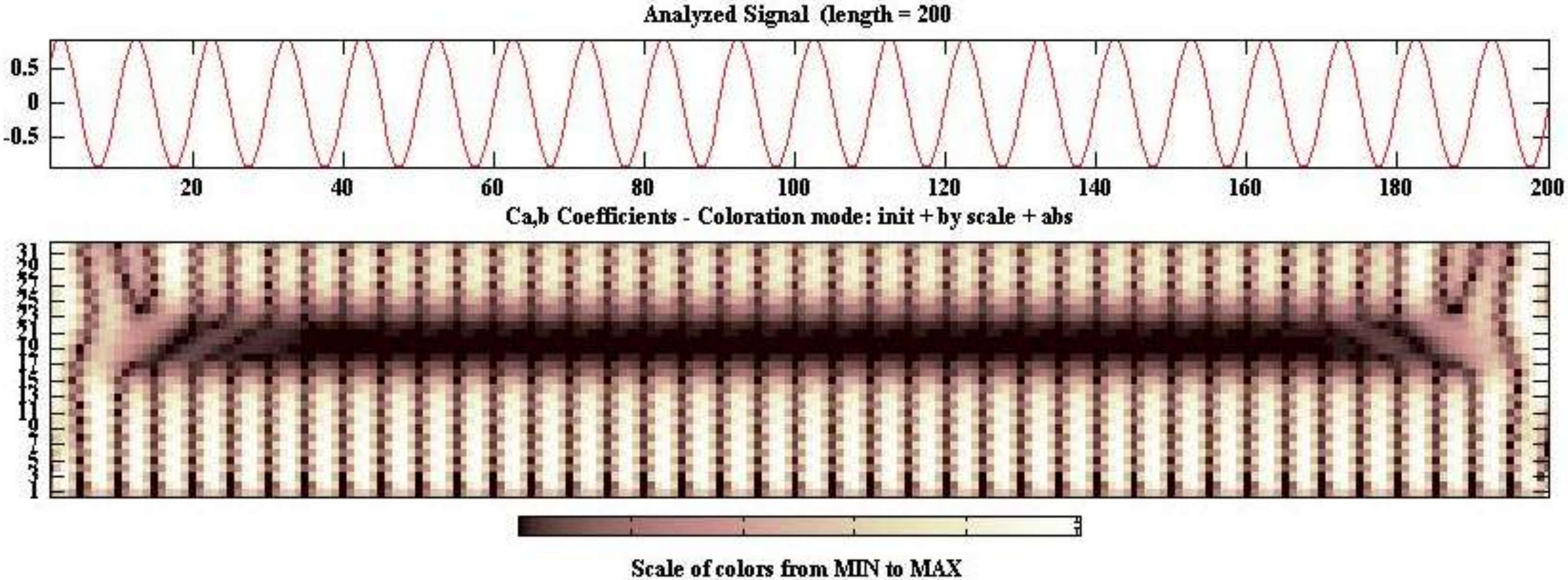
د: تابع موجک Biorthogonal نیز به صورت زیر است:

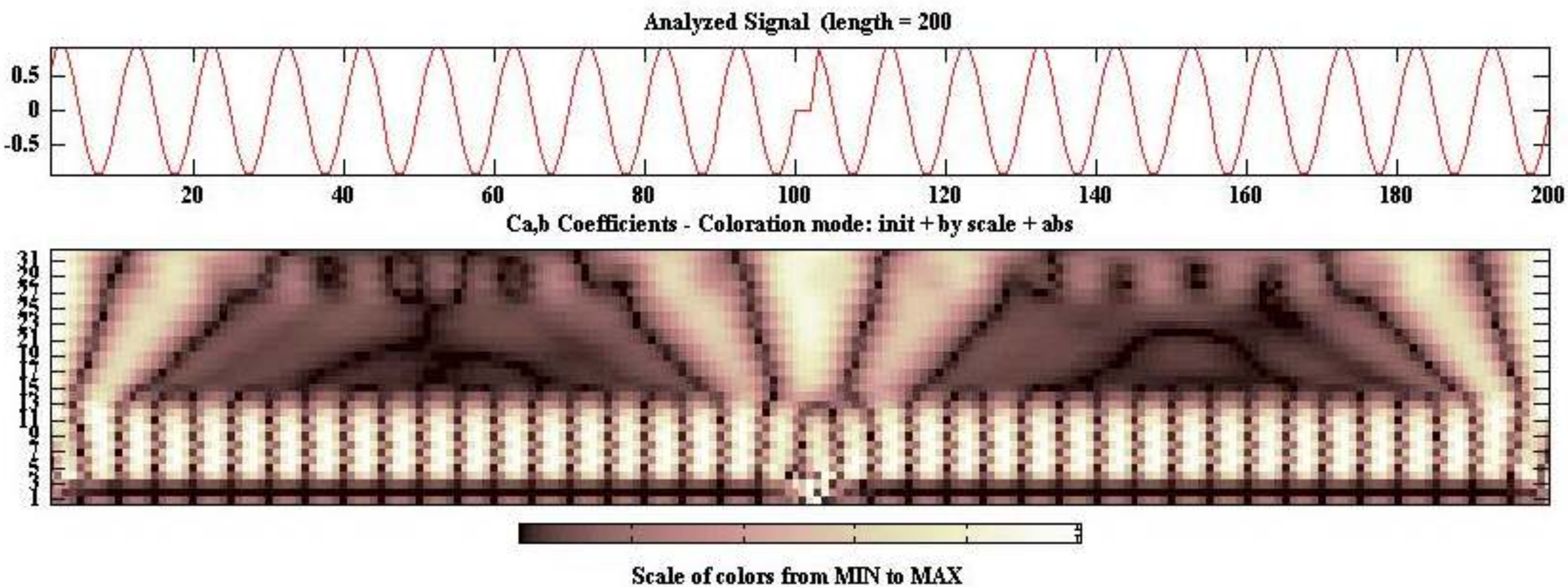


شکل۳۳: خانواده موجک Biorthogonal

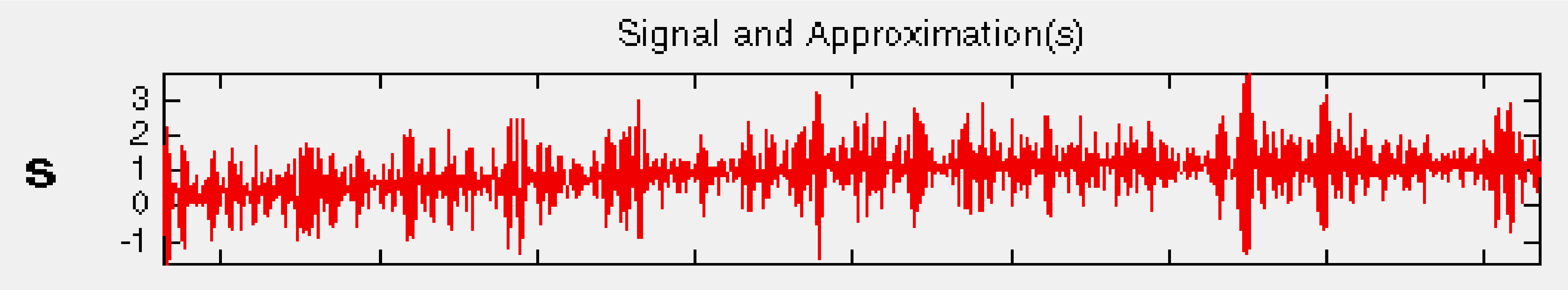

Analyzed Signal (length = 200
0.5
0
-0.5
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
Ca,b Coefficients - Coloration mode: init + by scale + abs
4
3
2
1
Scale of colors from MIN to MAX


Analyzed Signal (length = 200
1
0
-1
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
Ca,b Coefficients - Coloration mode: init + by scale + abs
4
3
2
1
Scale of colors from MIN to MAX

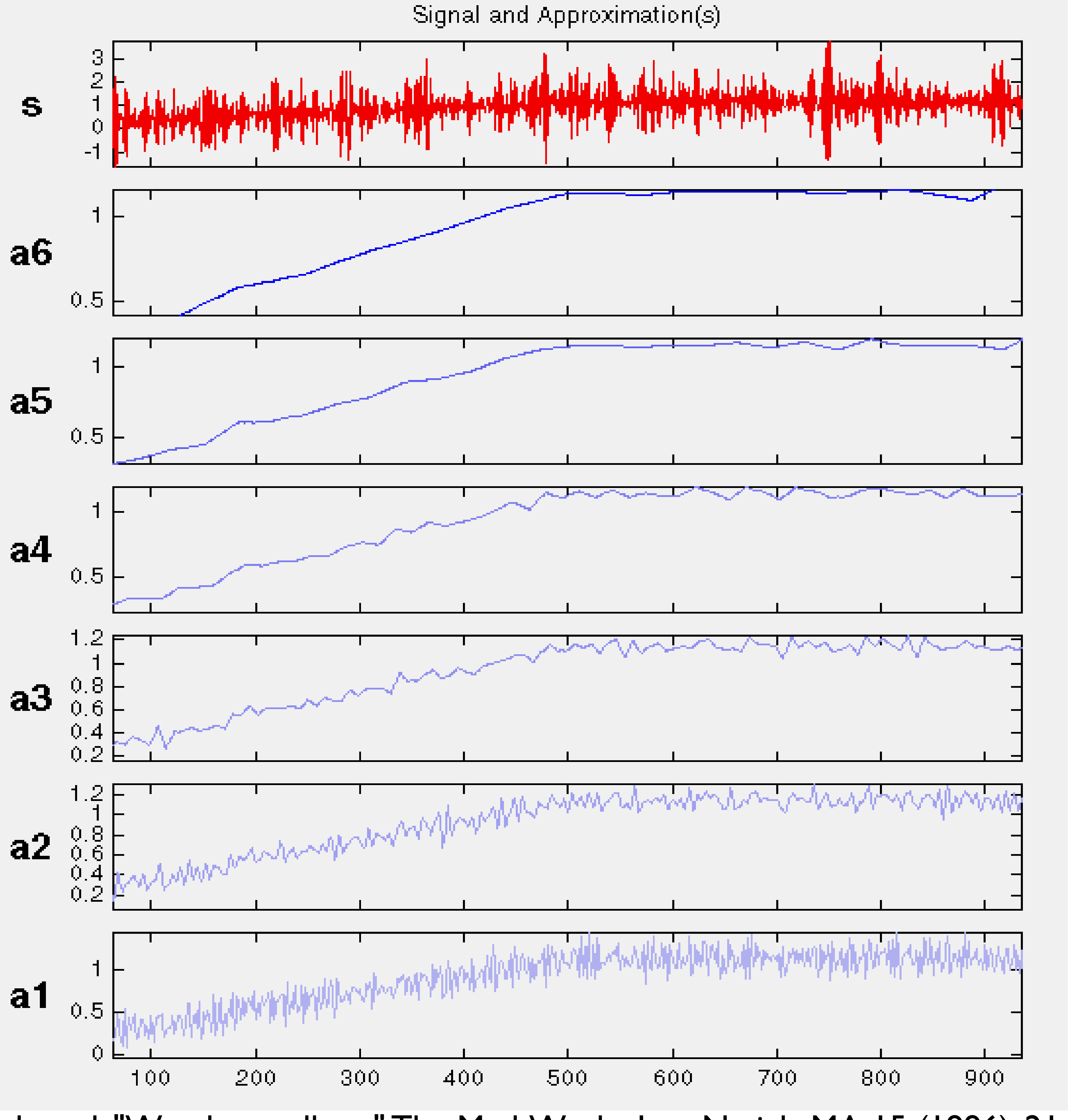

Analyzed Signal (length = 200
0.5
0
-0.5
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
Ca,b Coefficients - Coloration mode: init + by scale + abs
31
1
Scale of colors from MIN to MAX


Analyzed Signal (length = 200
0.5
0
-0.5
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
Ca,b Coefficients - Coloration mode: init + by scale + abs
31
1
Scale of colors from MIN to MAX

Non-stationary detection

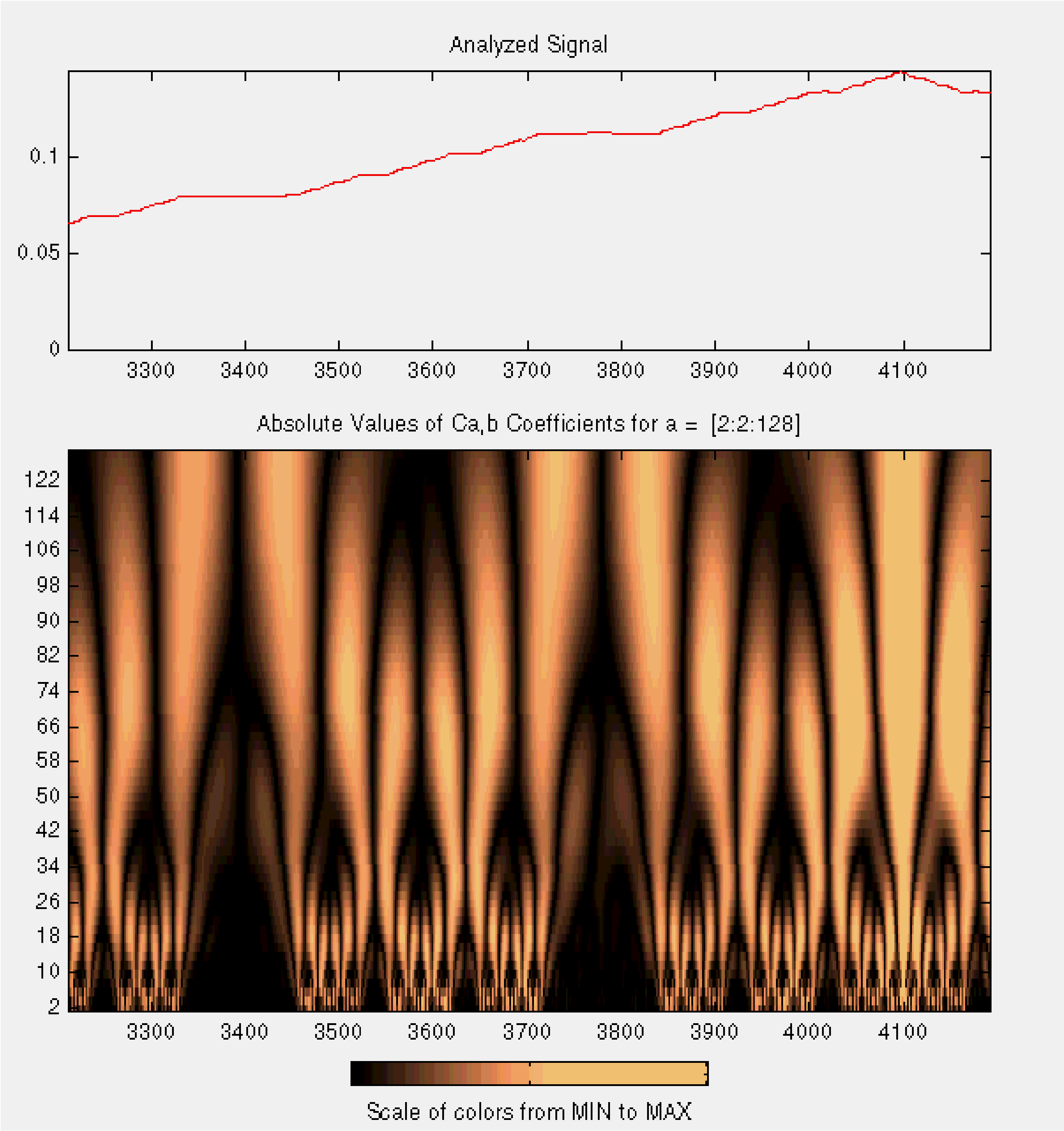


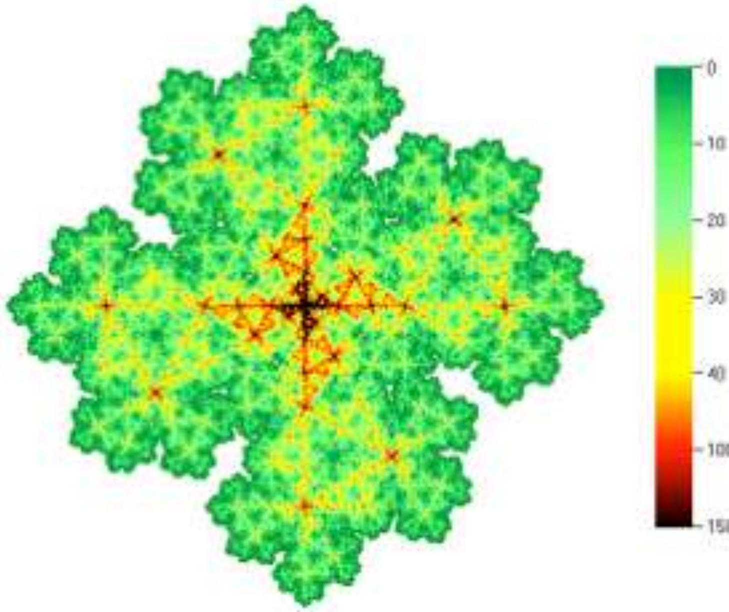
Misiti, Michel, et al. "Wavelet toolbox." The MathWorks Inc., Natick, MA 15 (1996): 21.



Misiti, Michel, et al. "Wavelet toolbox." The MathWorks Inc., Natick, MA 15 (1996): 21.

Self-similarity detection





Demo Analysis:
Koch curve

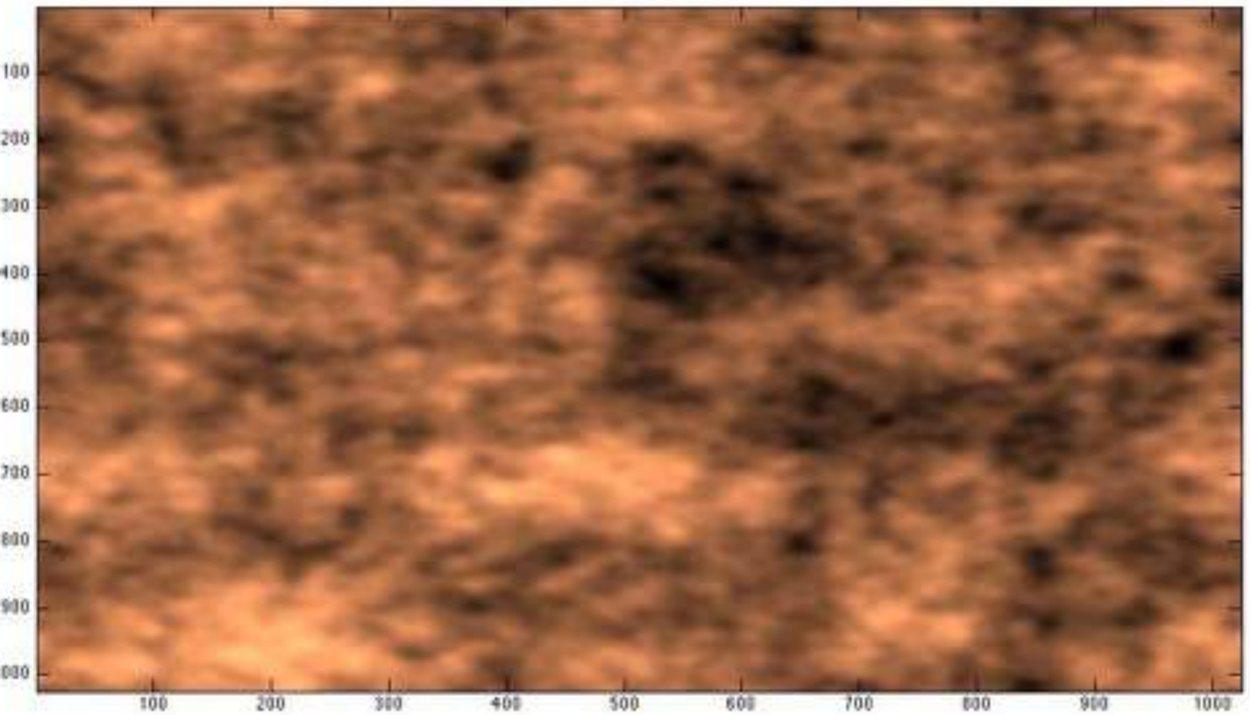
MAT-file:
vonkoch.mat

Wavelet:
coif3

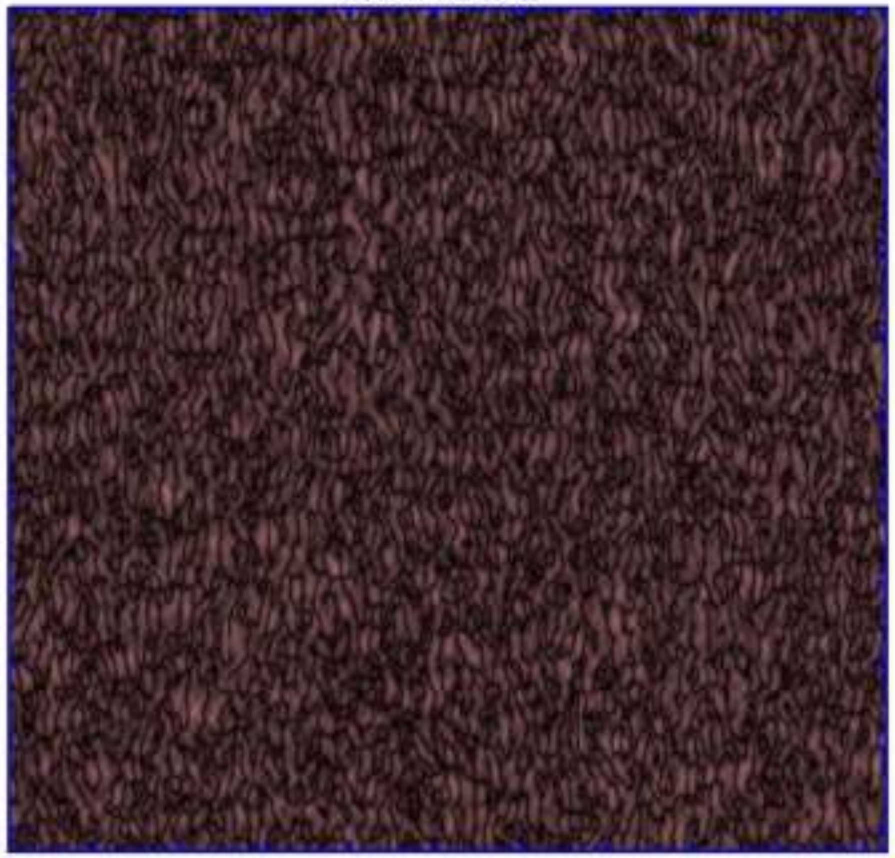
Level:
Continuous, 2:2:128

Misiti, Michel, et al. "Wavelet toolbox." The MathWorks Inc., Natick, MA 15 (1996): 21.

G by sym 3_2



100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000



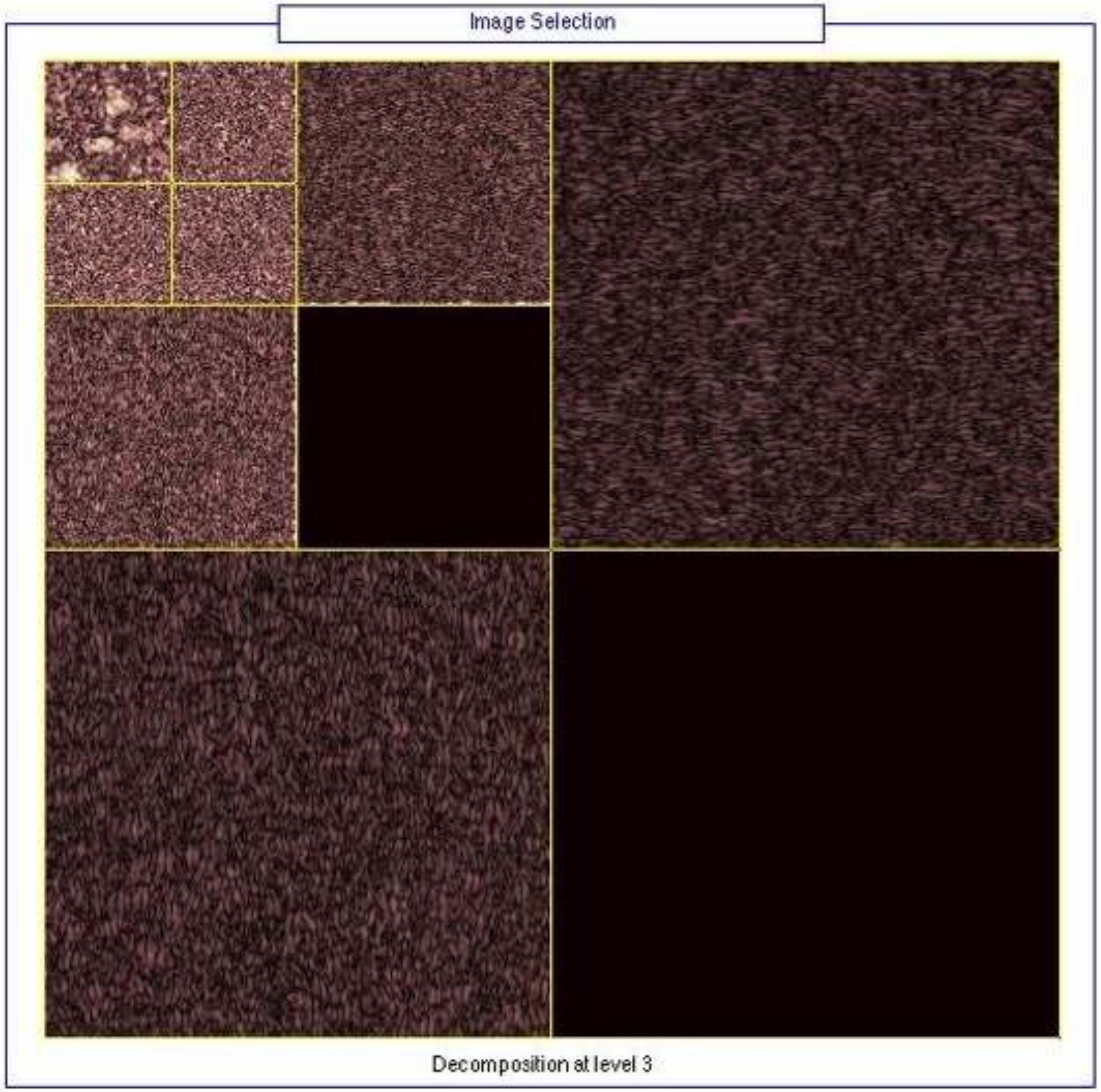
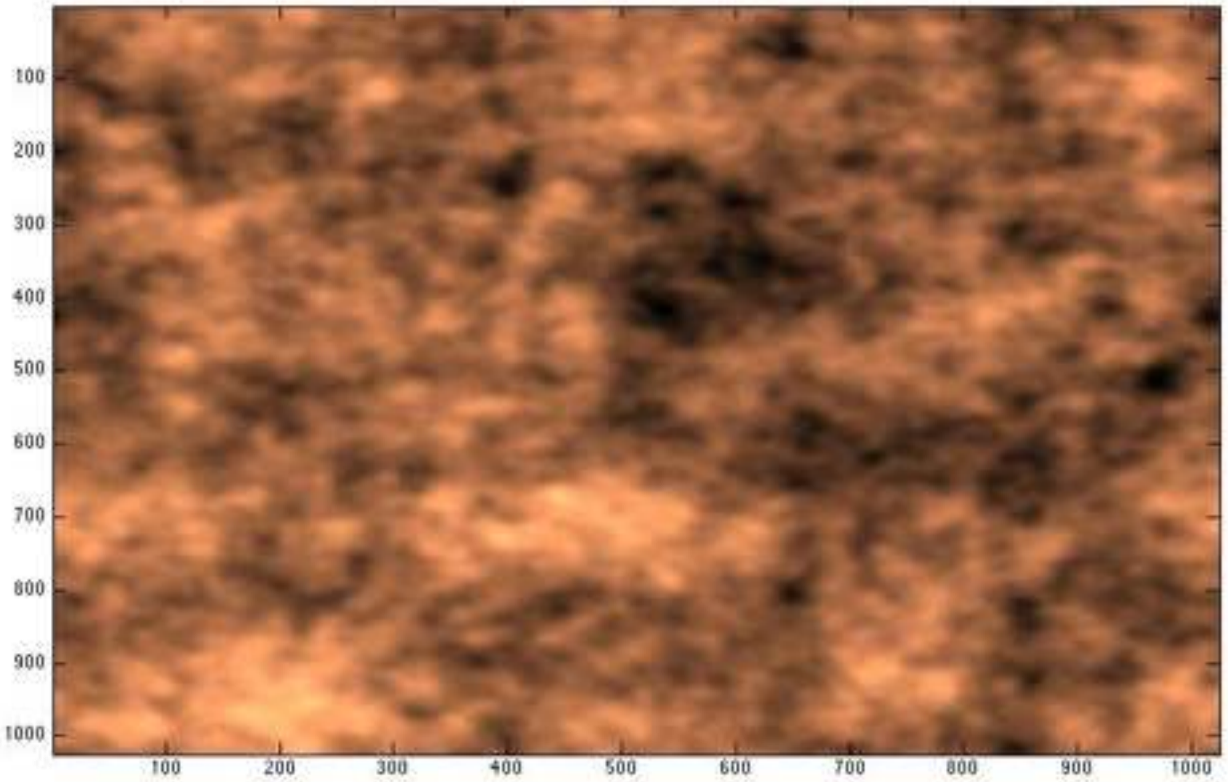


Image Selection
Decomposition at level 3

GS by sym 3_2


100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

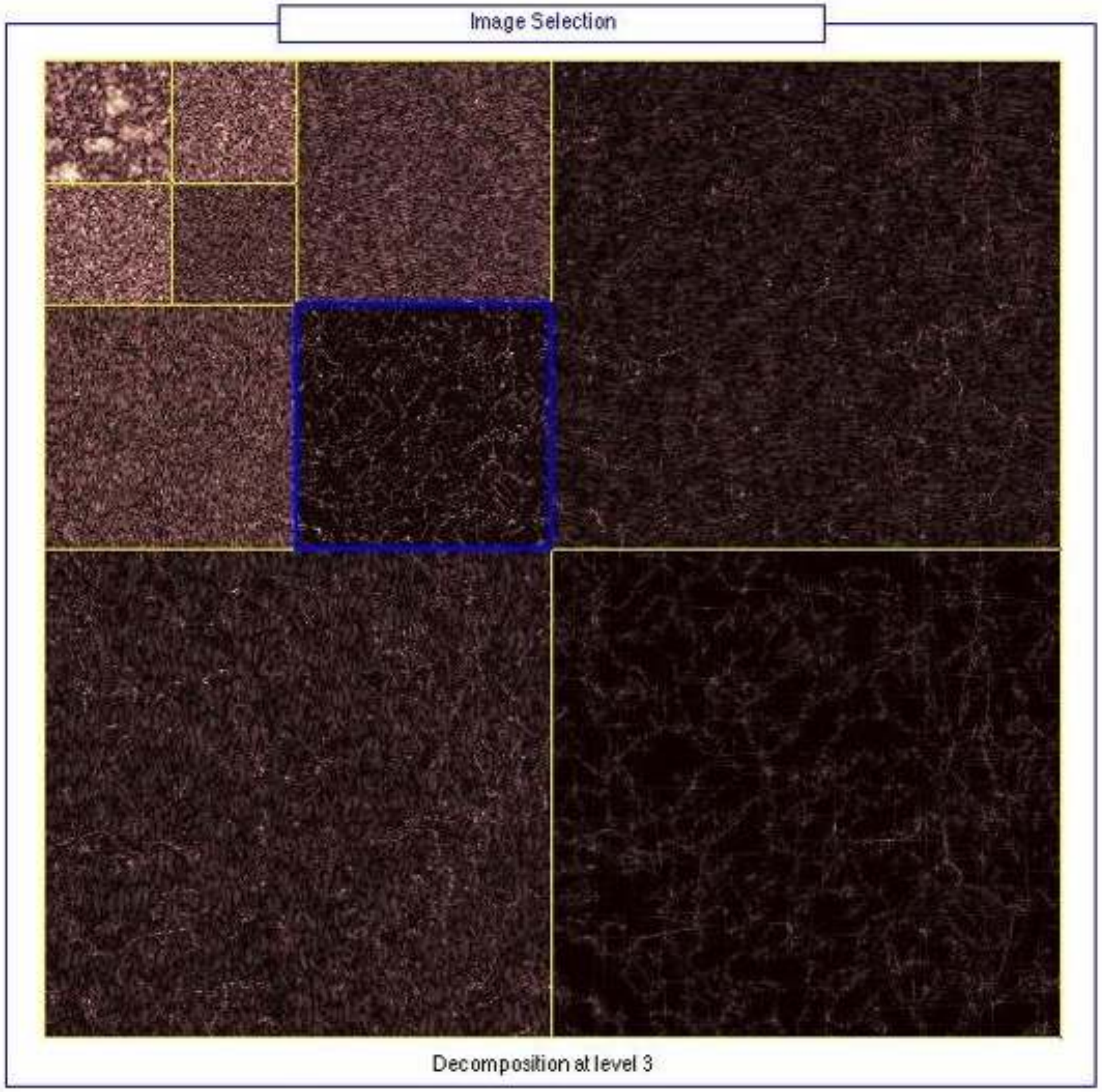
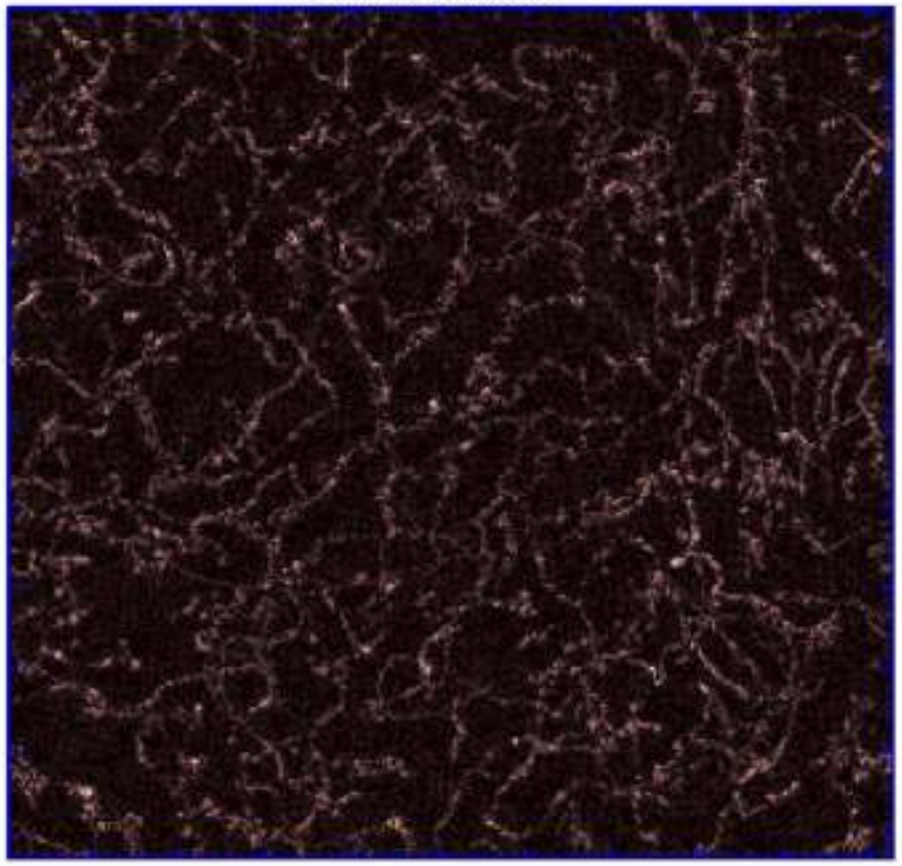
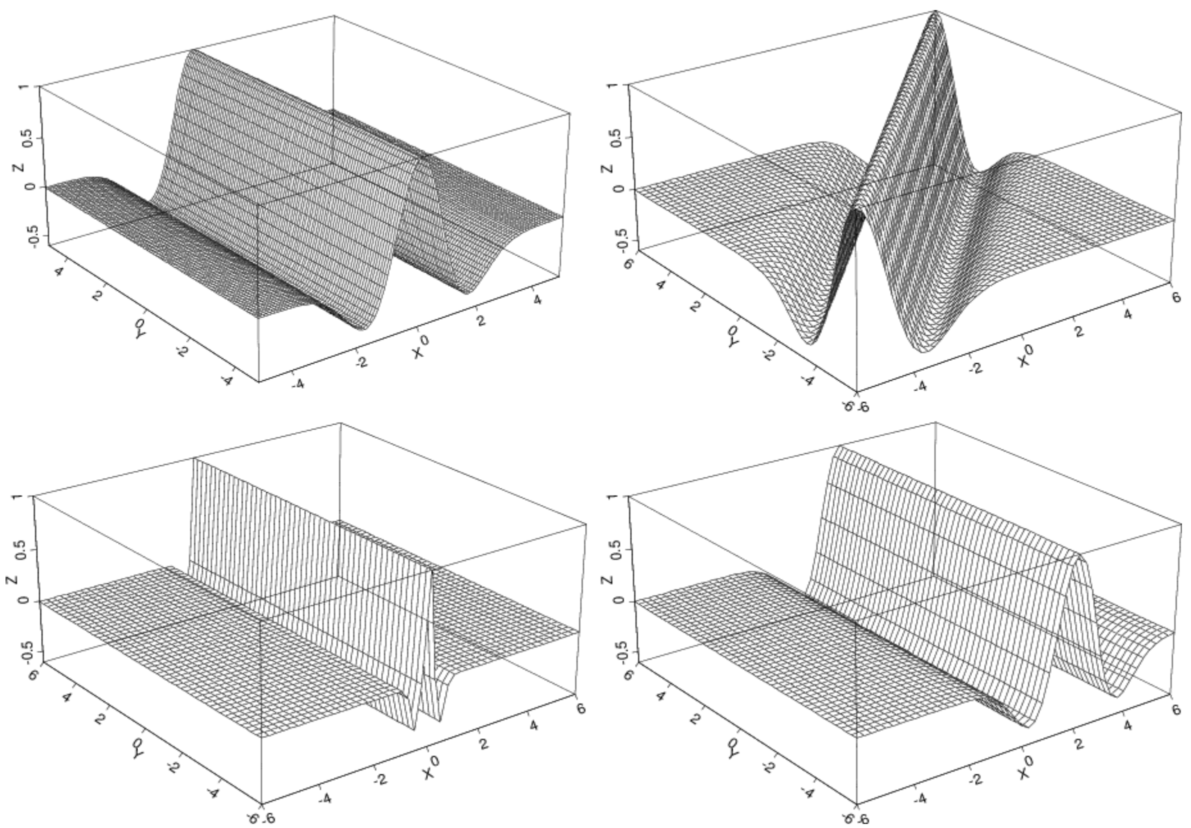
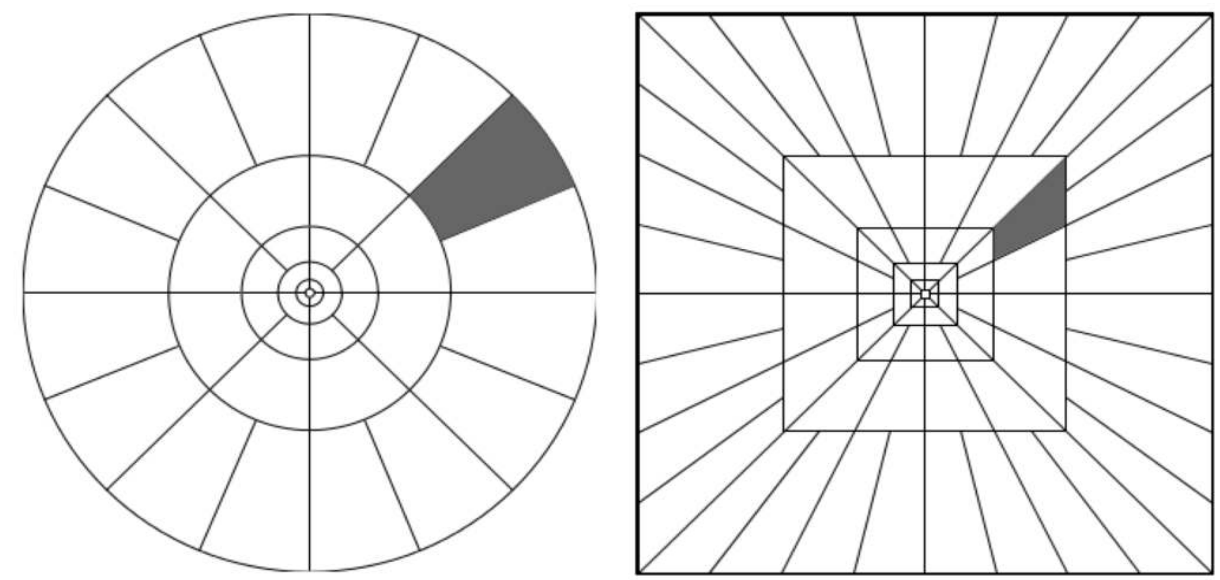


Image Selection
Decomposition at level 3



Multiscaling method: Curvelet

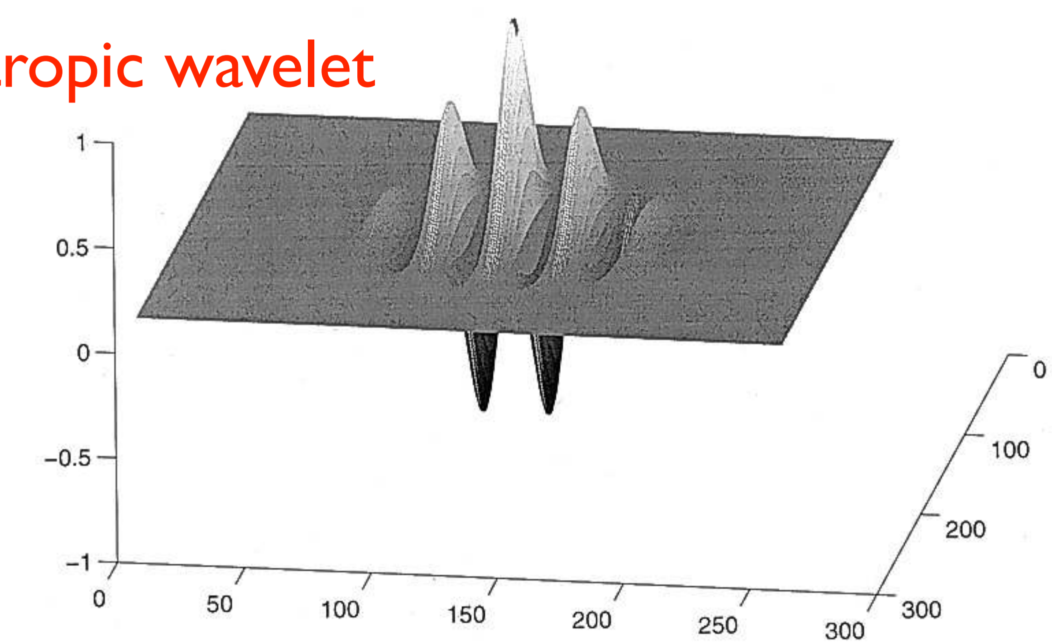


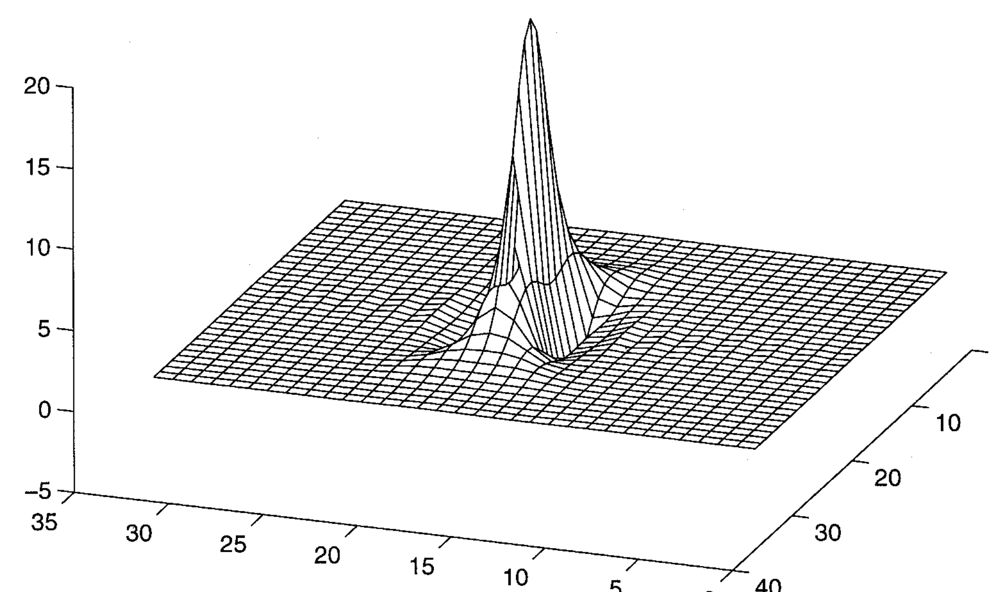


(a) (b)

The 2-D wavelet transform 33

Localized and Isotropic wavelet





Van den Berg, J. C. "Wavelets in physics." Wavelets in physics (2004).

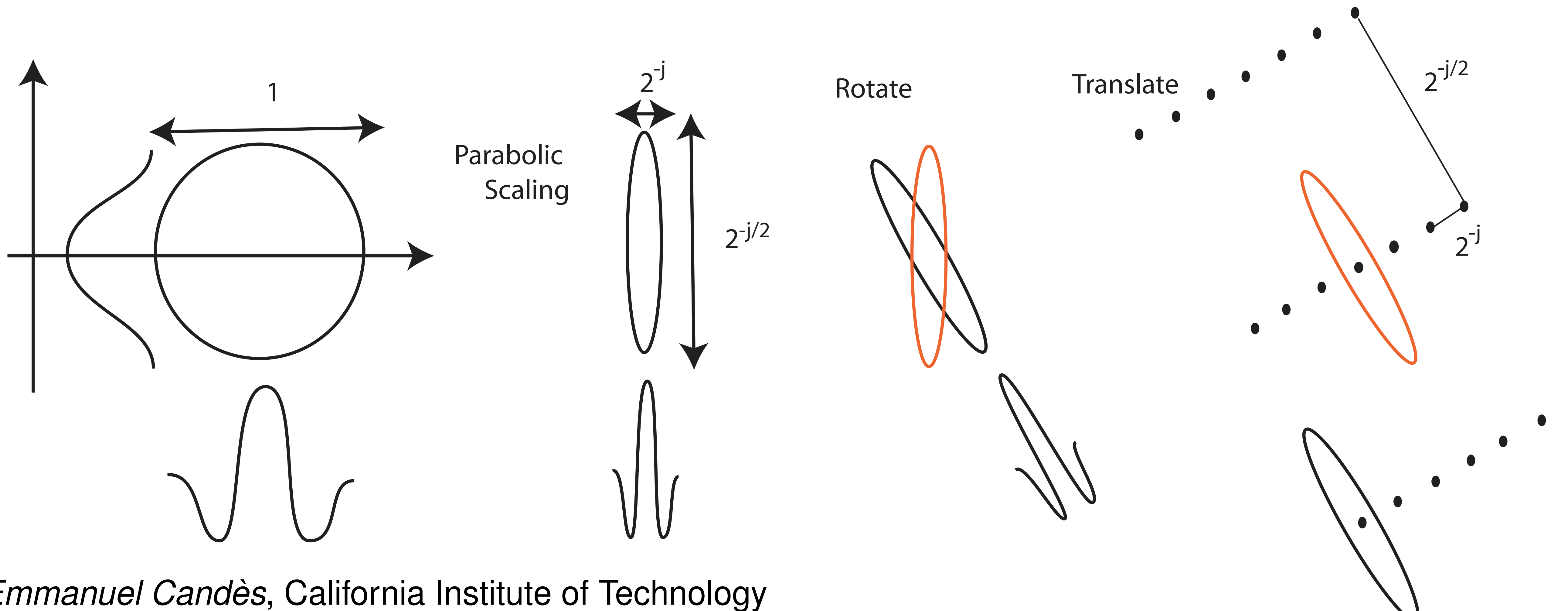
Curvelet Transformation

$$\hat{\varphi}_\mu(\xi) = w(2^{-j}|\xi|)\nu(2^{\lfloor j/2 \rfloor}\theta - \pi\ell)e^{i\langle k^{j,\ell},\xi\rangle}$$

$w(\cdot) =$ window for scale j

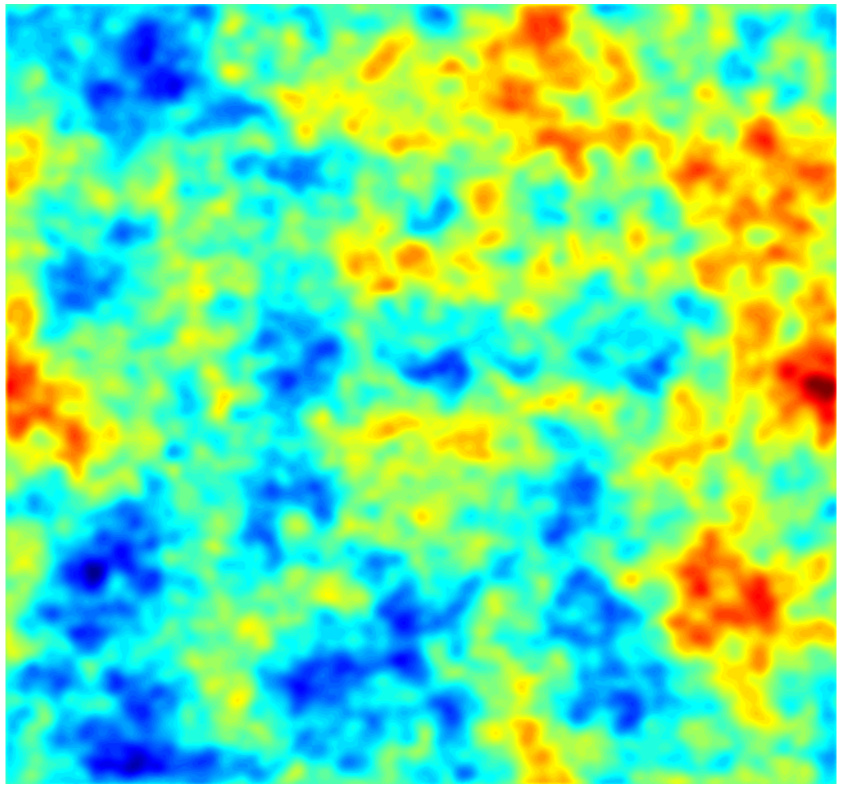
$\nu(\cdot) =$ window for orientation θ

$e^{i\langle k^{j,\ell},\xi\rangle}$ shifts to location (k,ℓ)

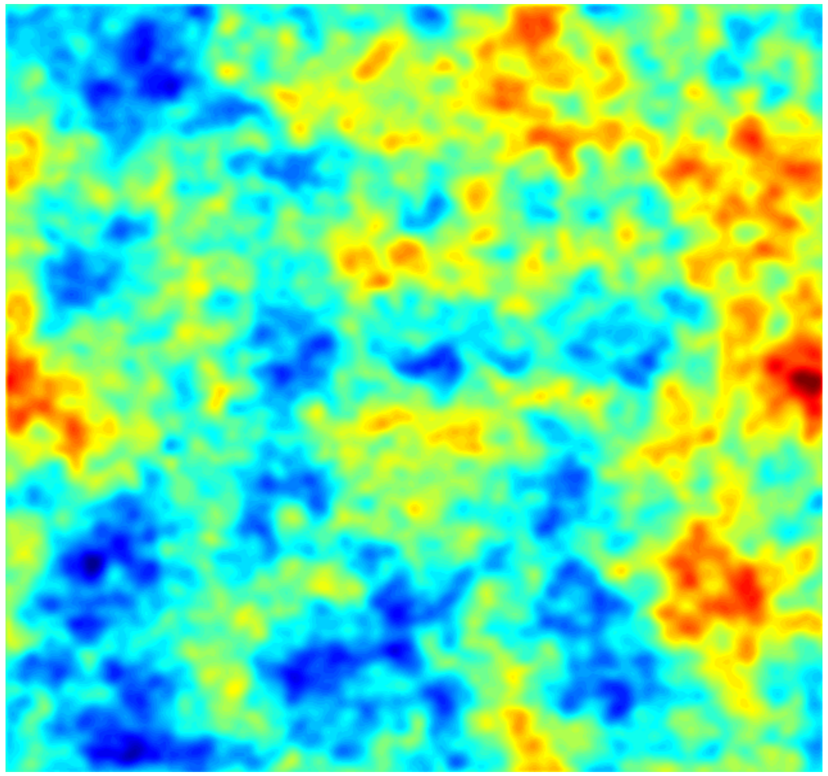


Emmanuel Candès, California Institute of Technology

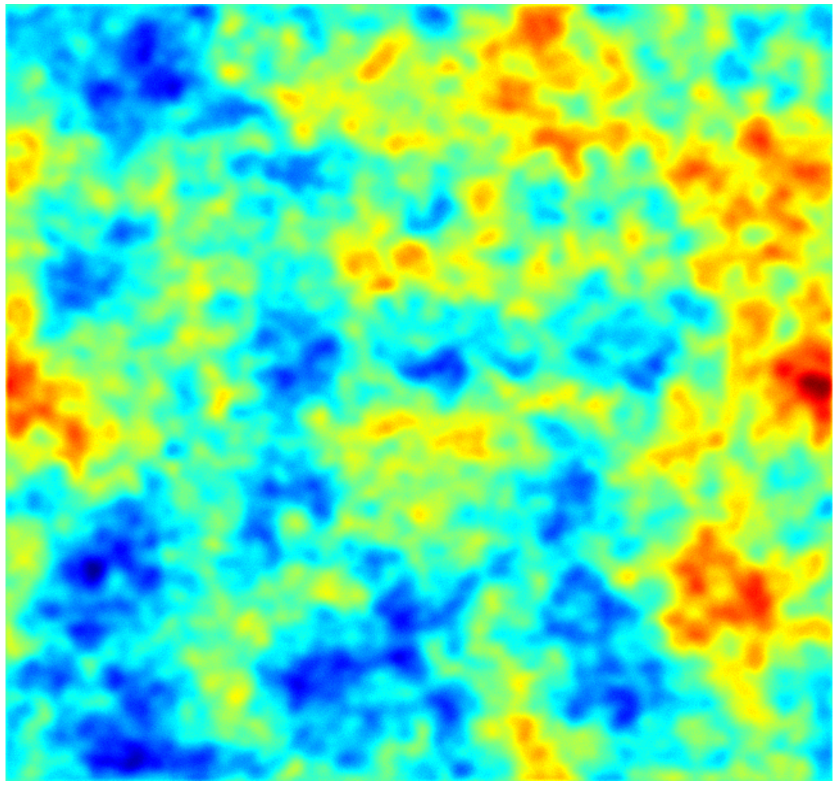
Our search proposal



Pure CMB+Beam



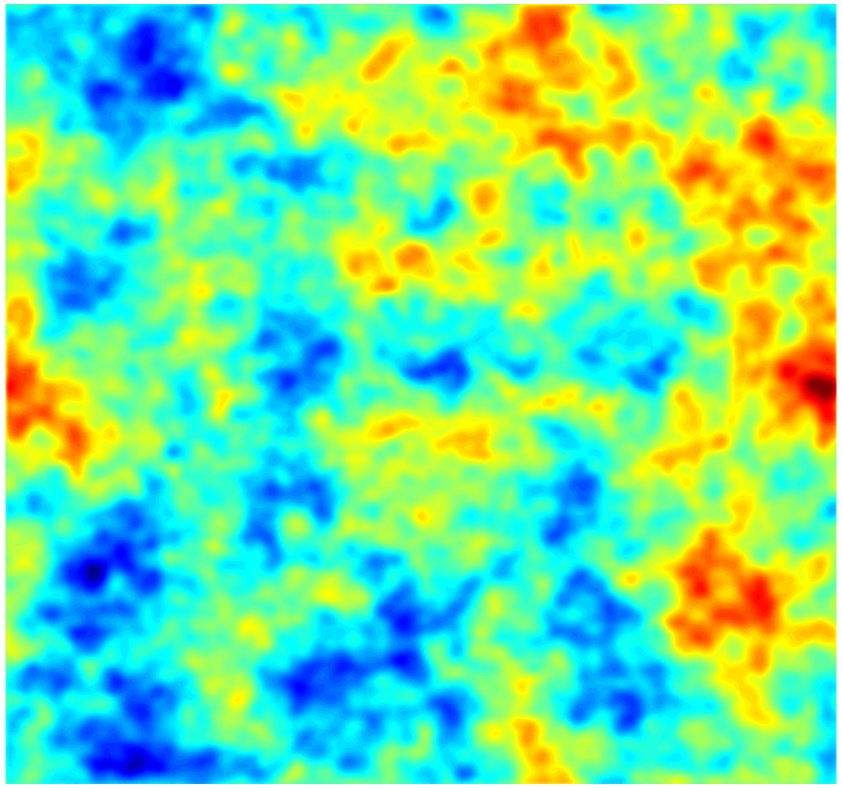
Pure CMB+CS+Beam



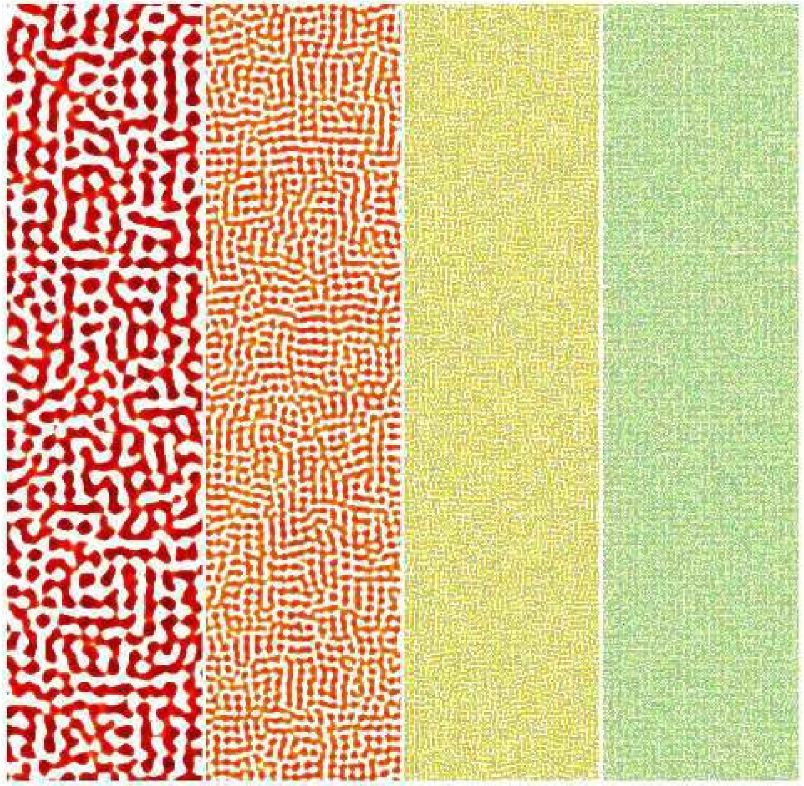
Pure CMB+CS+Beam+Noise

Finding a needle in haystack

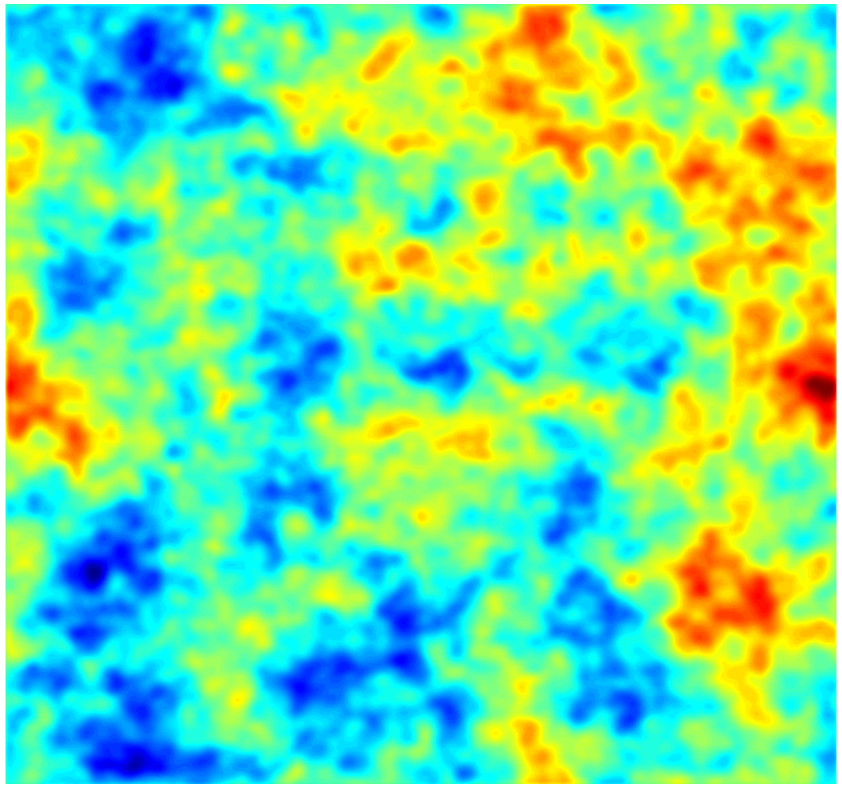
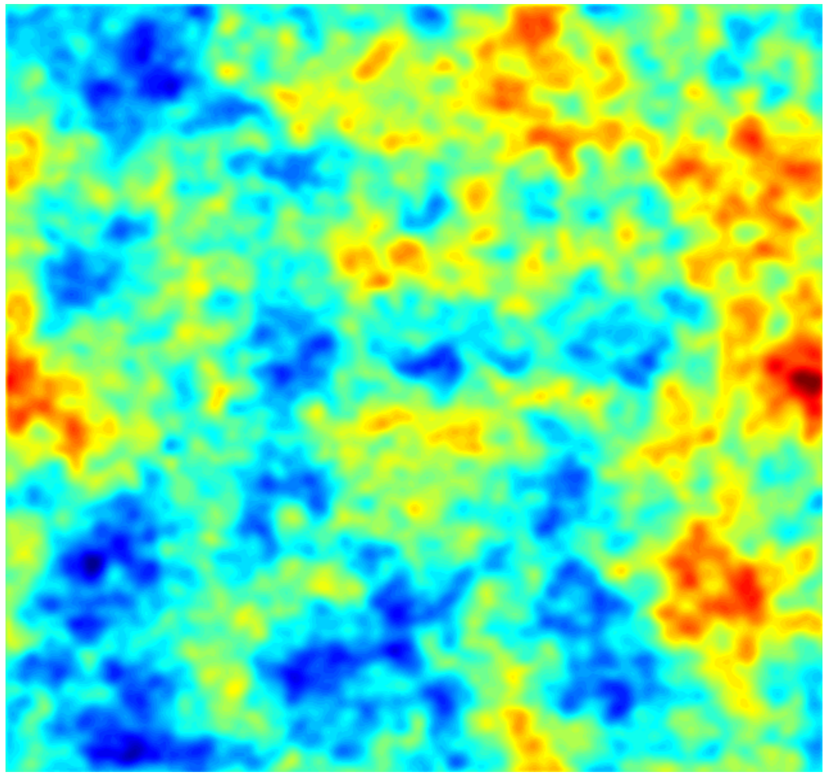
Curvelet Decomposition



Pure CMB+Beam

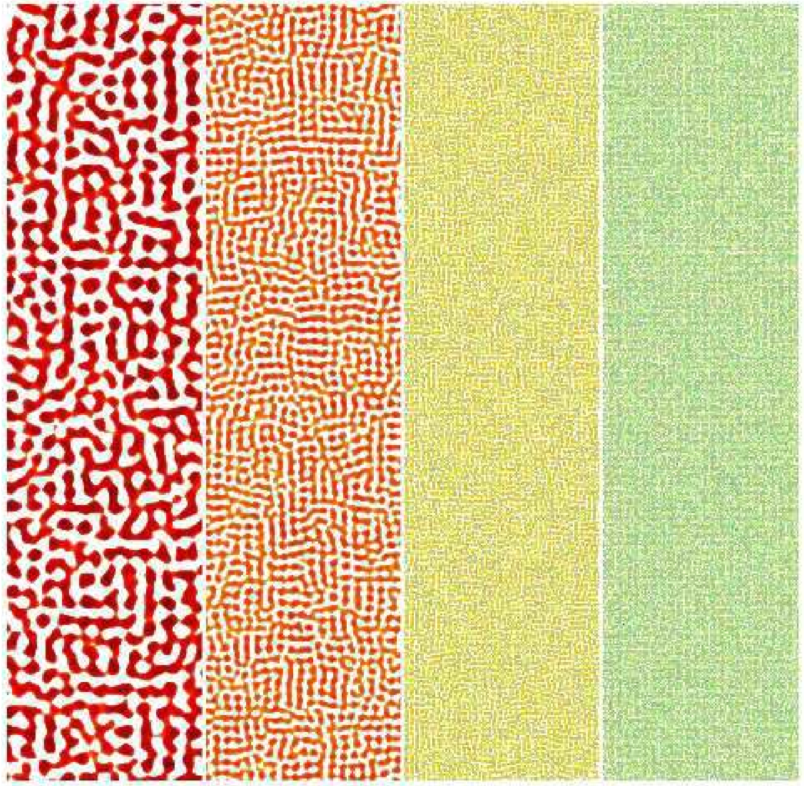
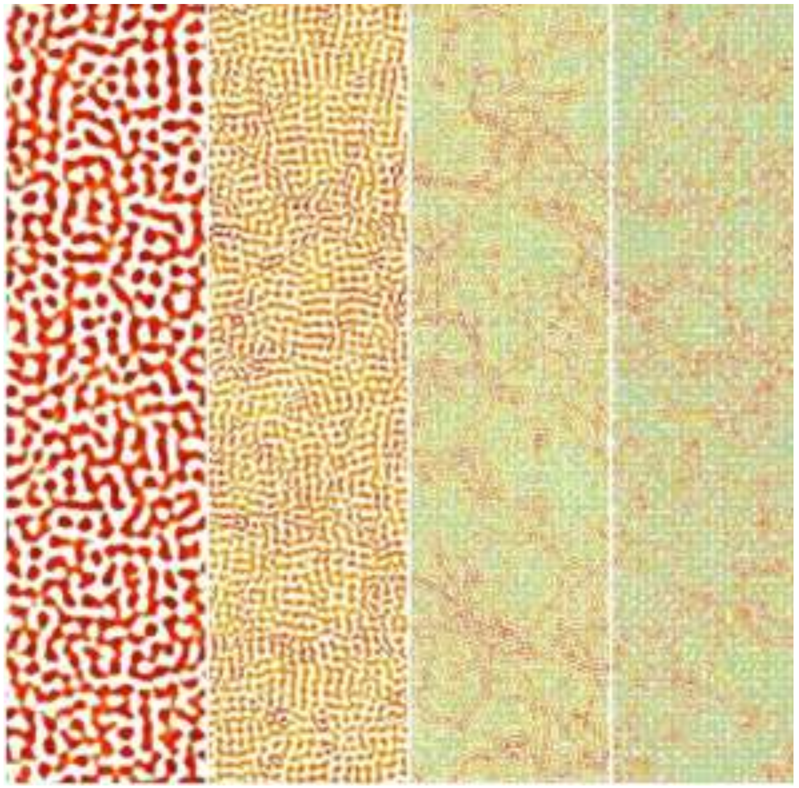


Curvelet Decomposition

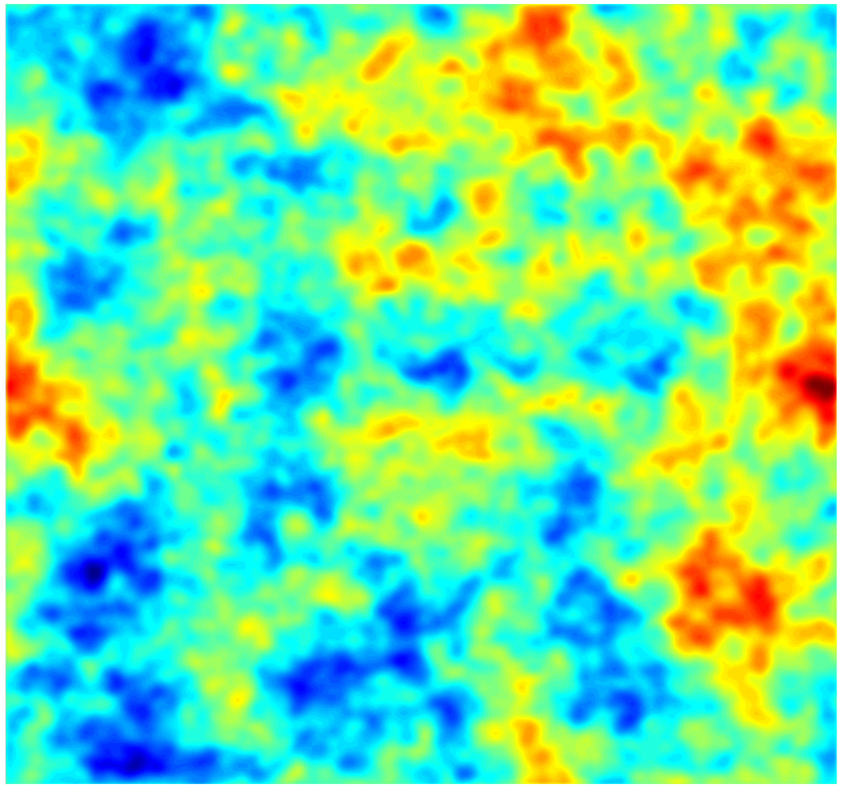



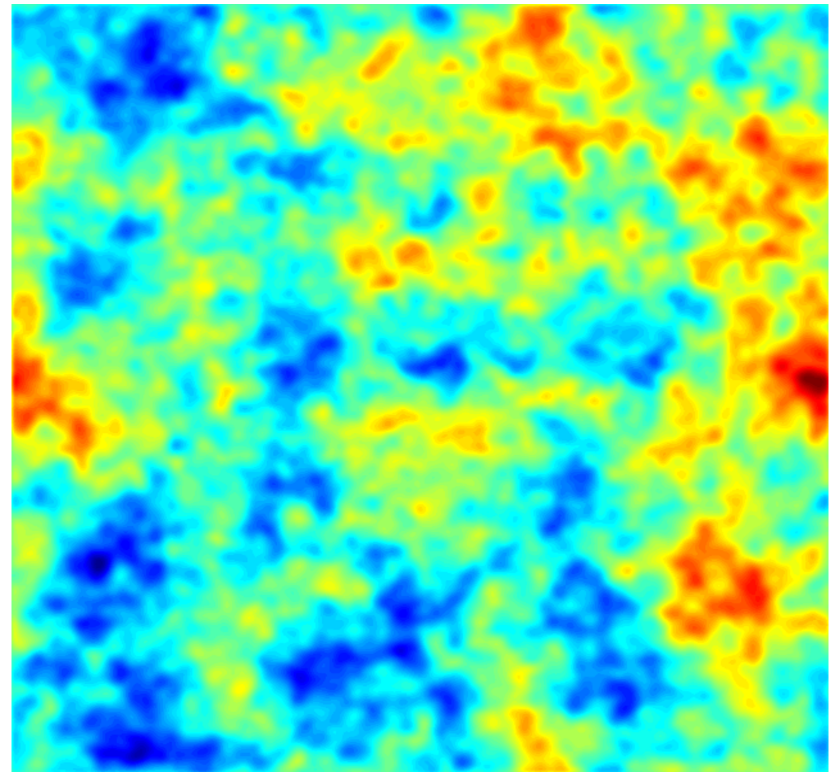
Pure CMB+Beam

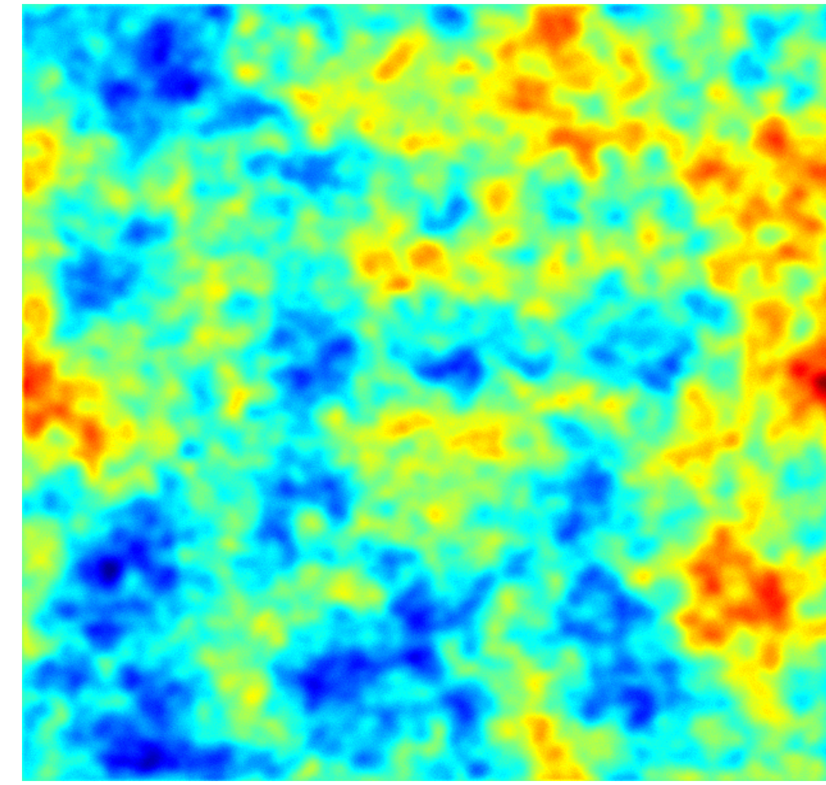
Pure CMB+CS+Beam

Curvelet Decomposition



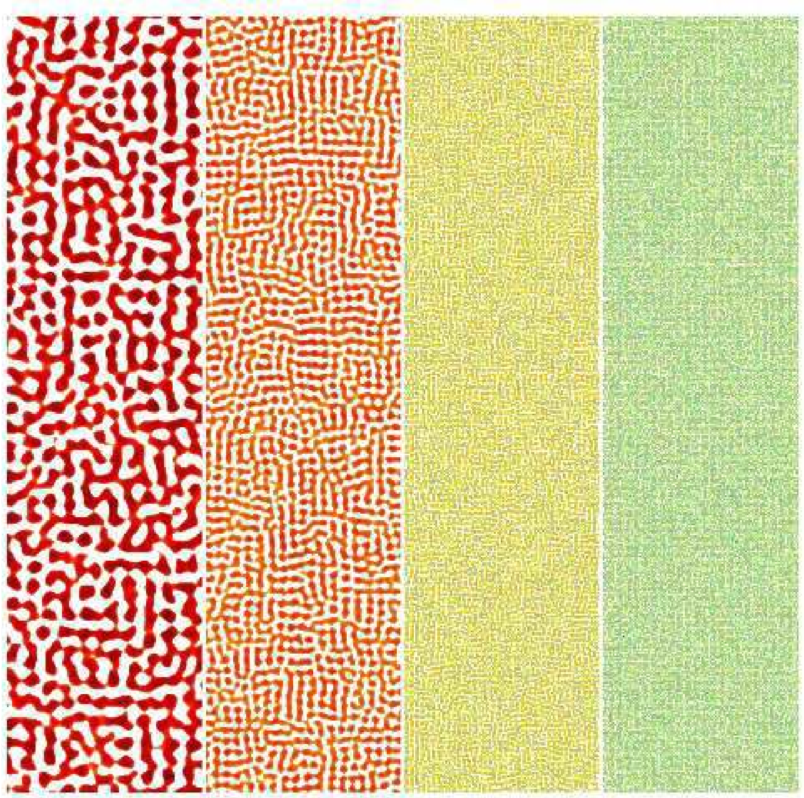


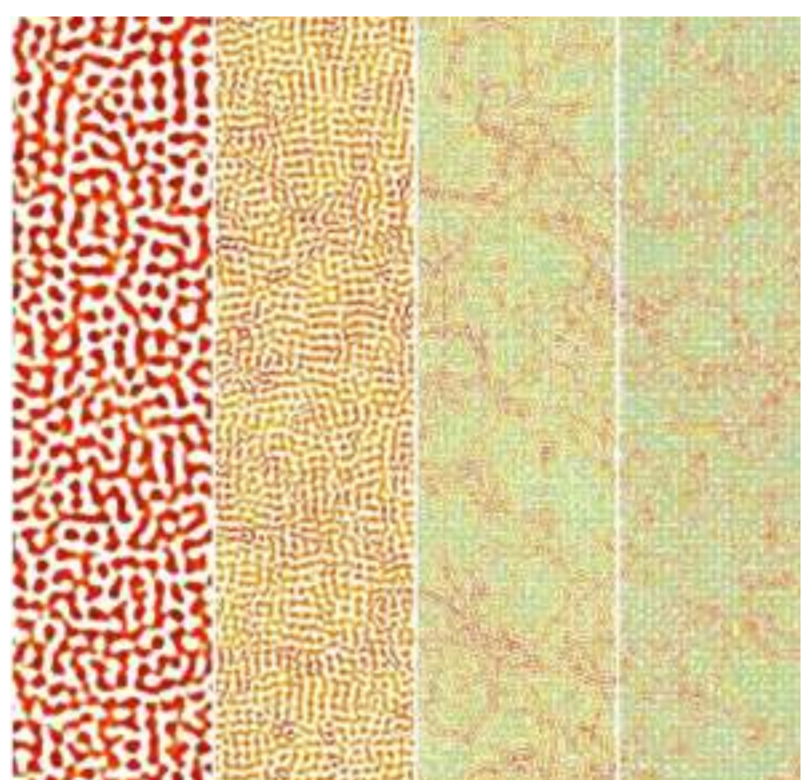


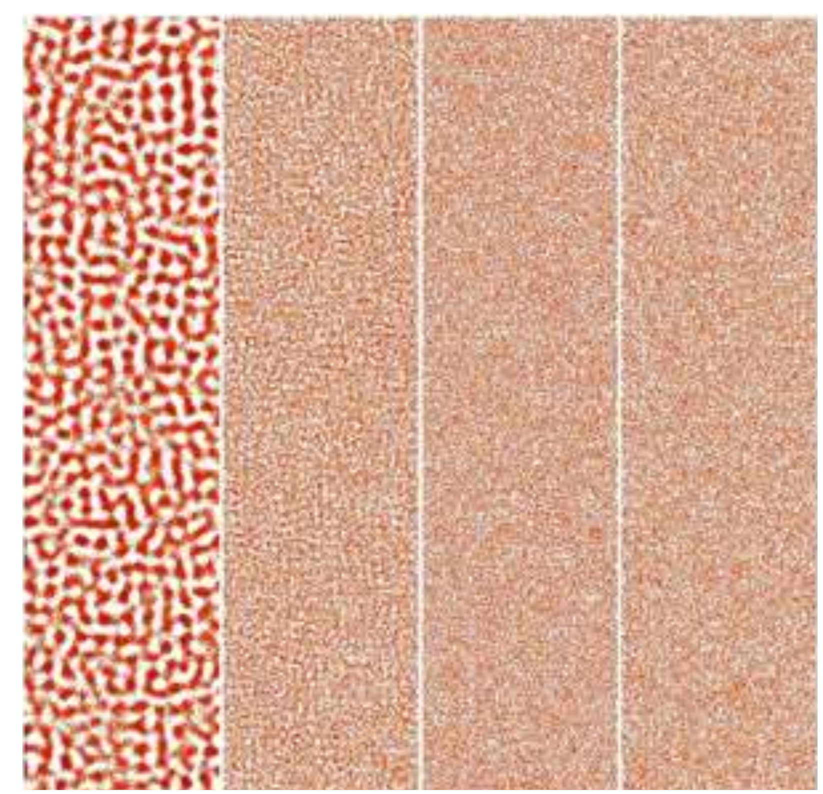
Pure CMB+Beam

Pure CMB+CS+Beam

Pure CMB+CS+Beam+Noise

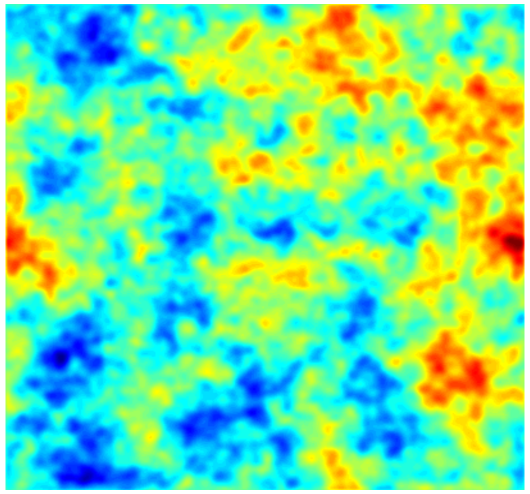


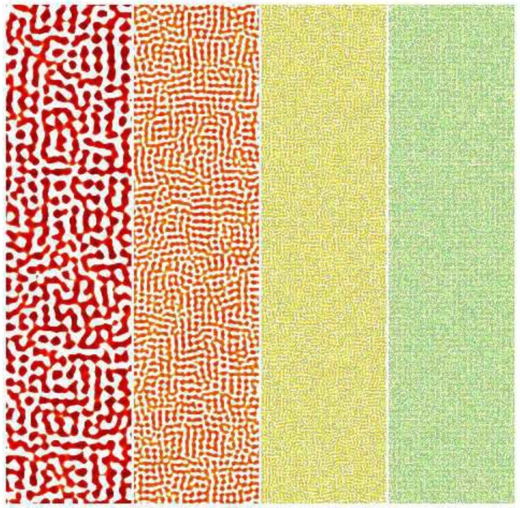


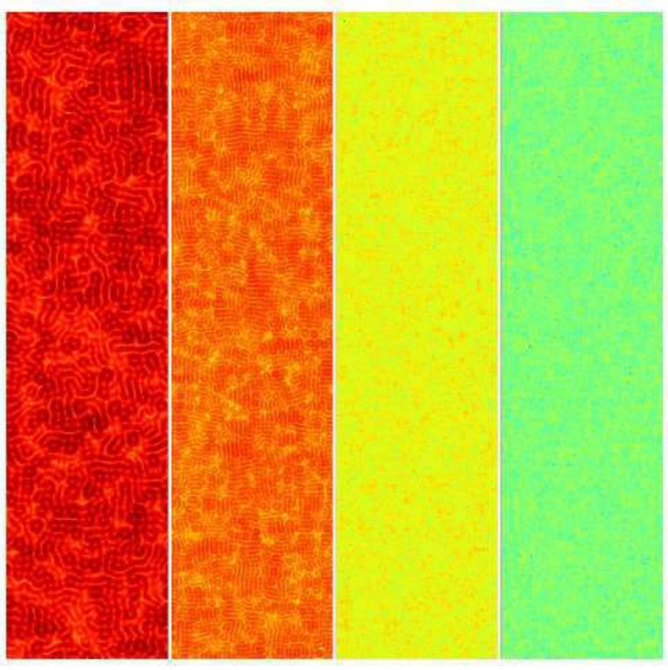


Extended Canny algorithm

Pure CMB+Beam

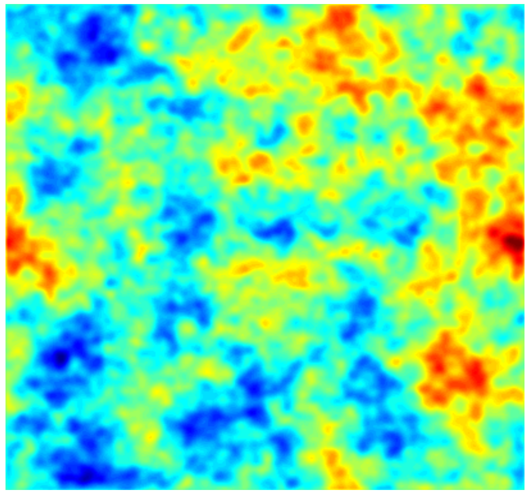


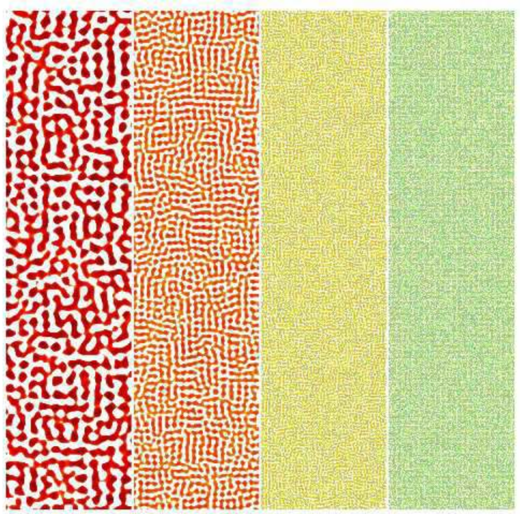


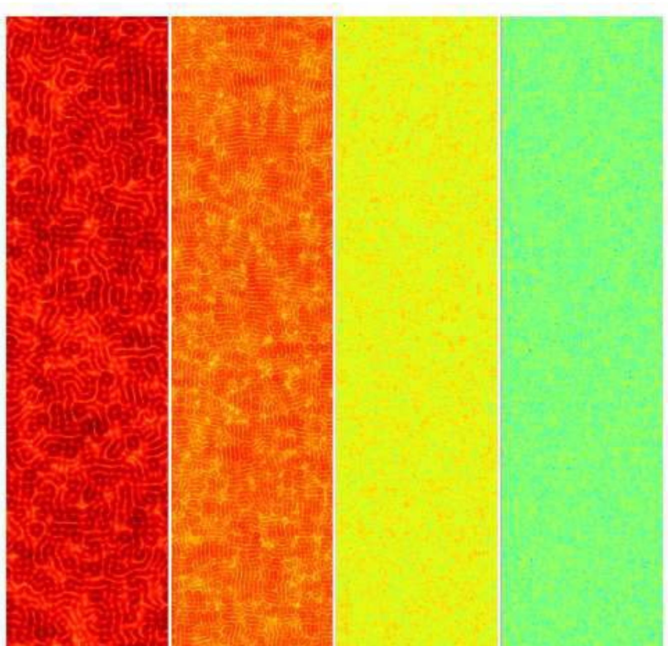


Extended Canny algorithm

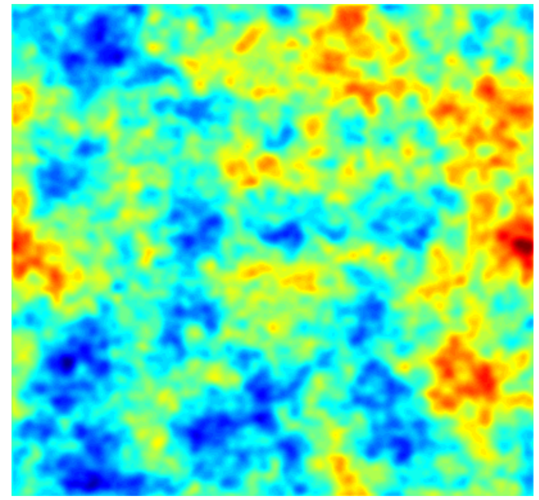
Pure CMB+Beam

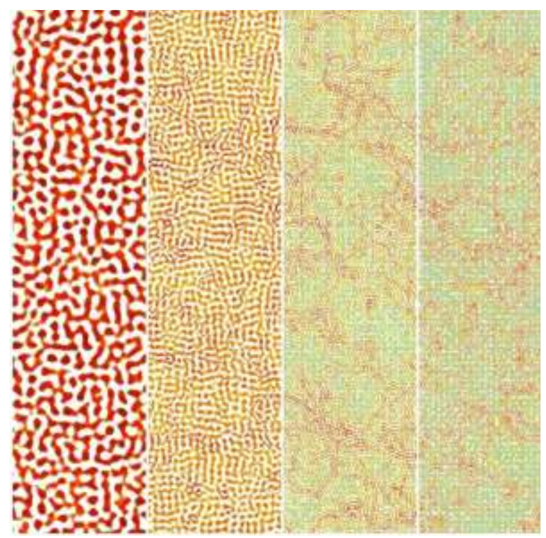


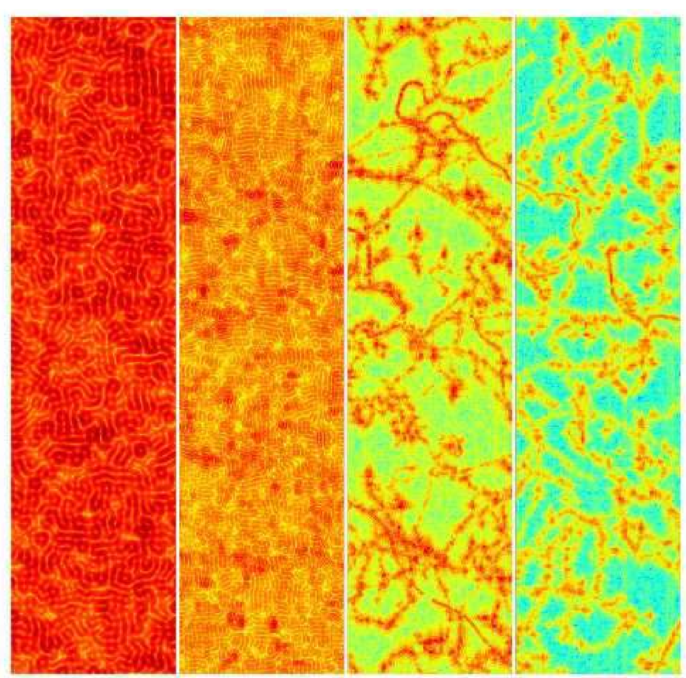




Pure CMB+CS+Beam

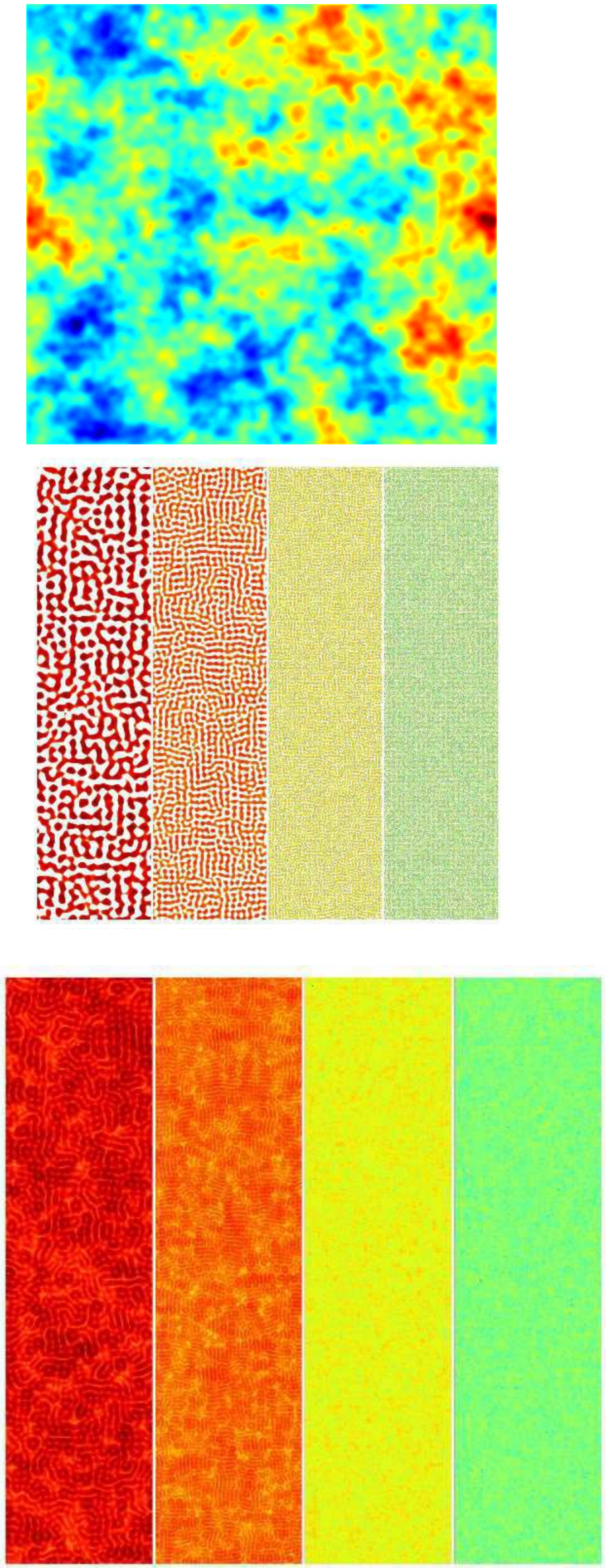




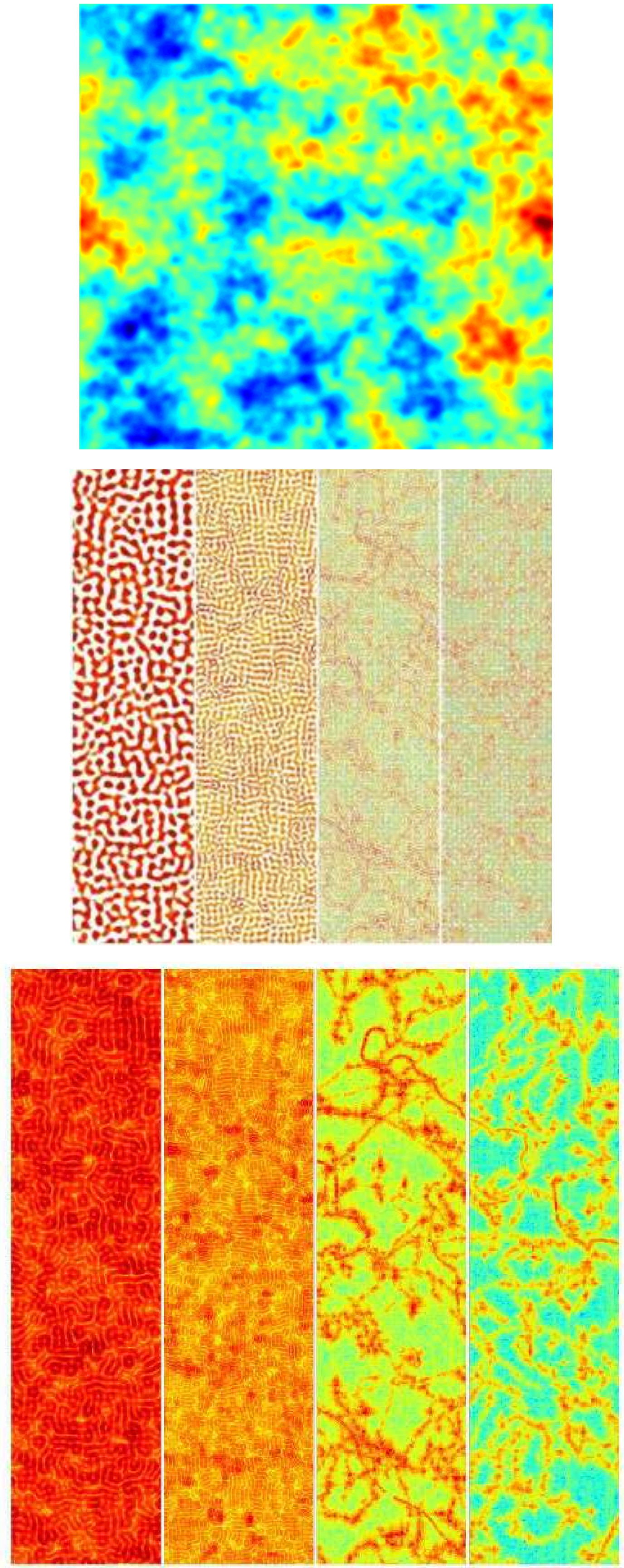


Extended Canny algorithm

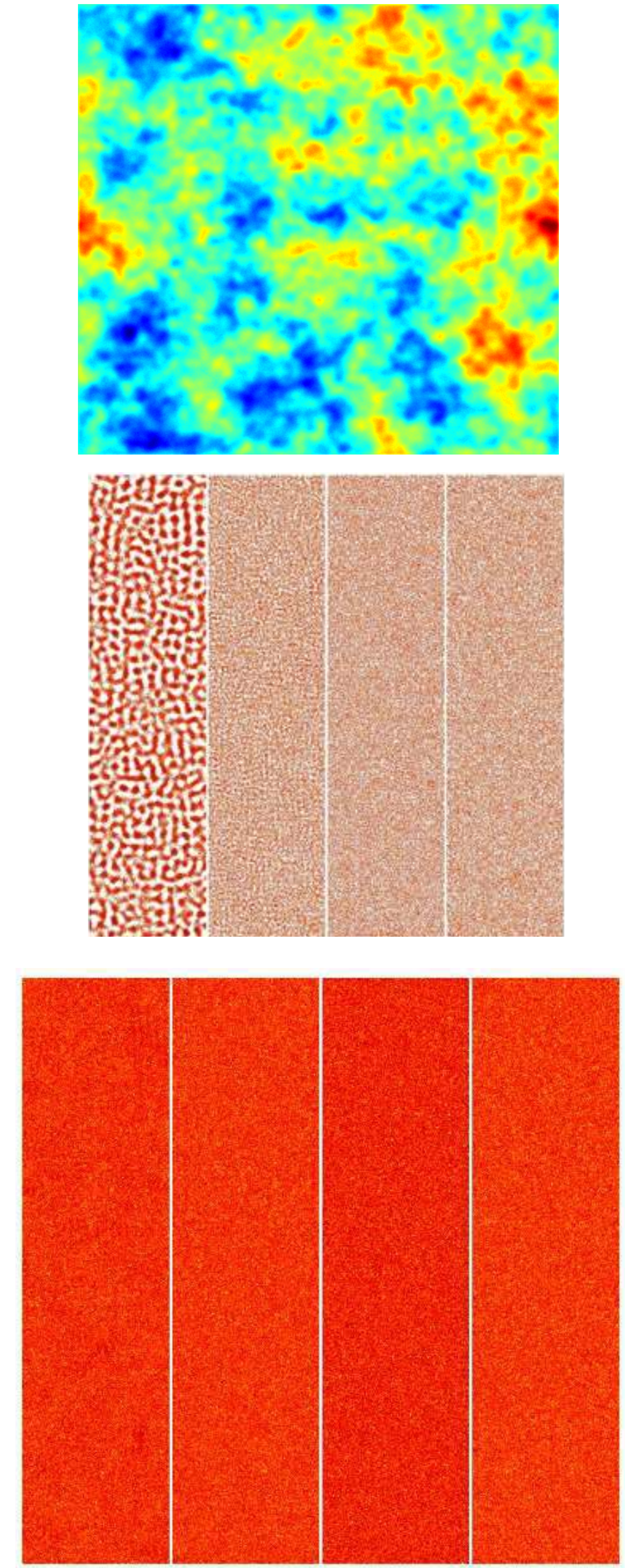
Pure CMB+Beam



Pure CMB+CS+Beam

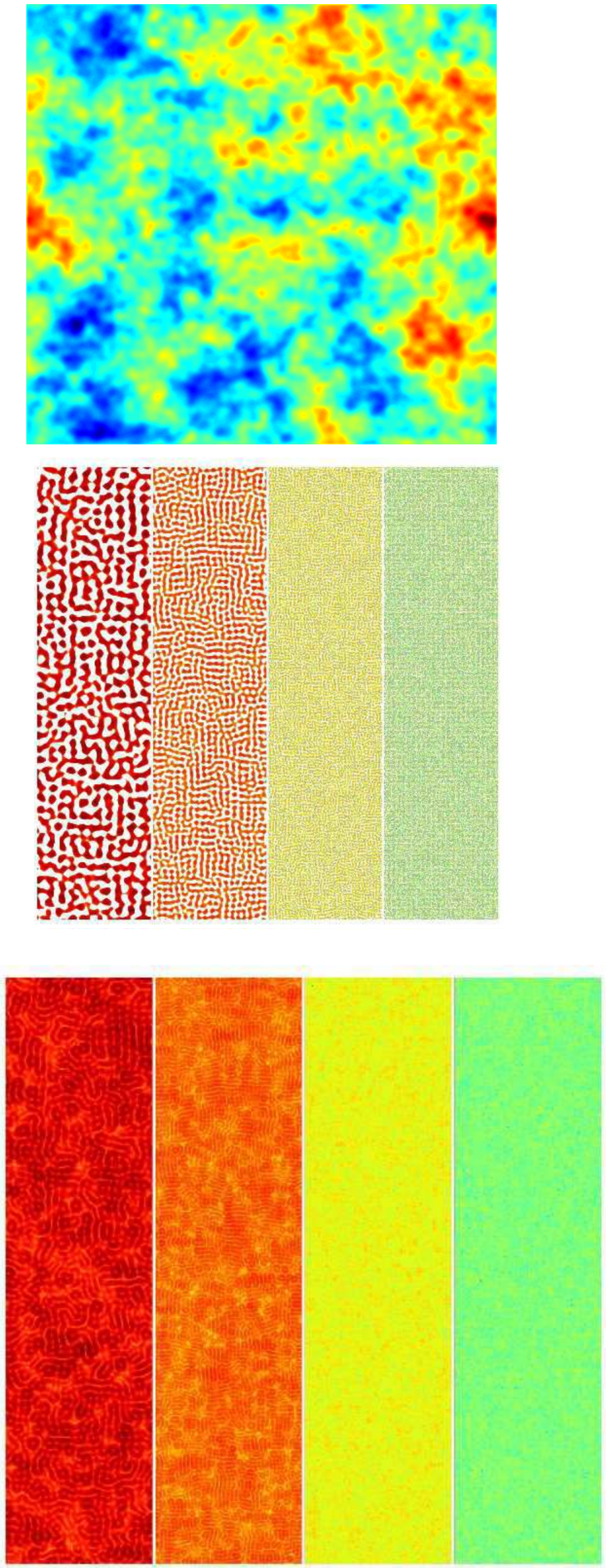


Pure CMB+CS+Beam+Noise

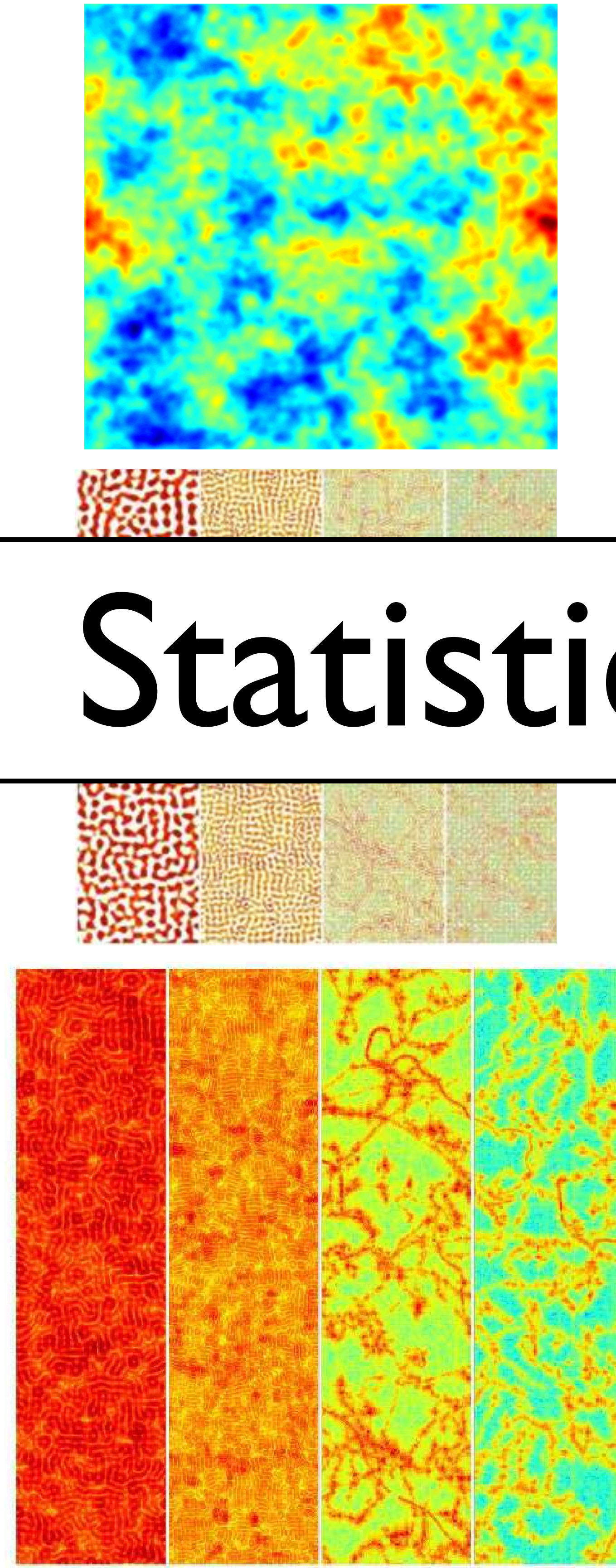


Extended Canny algorithm

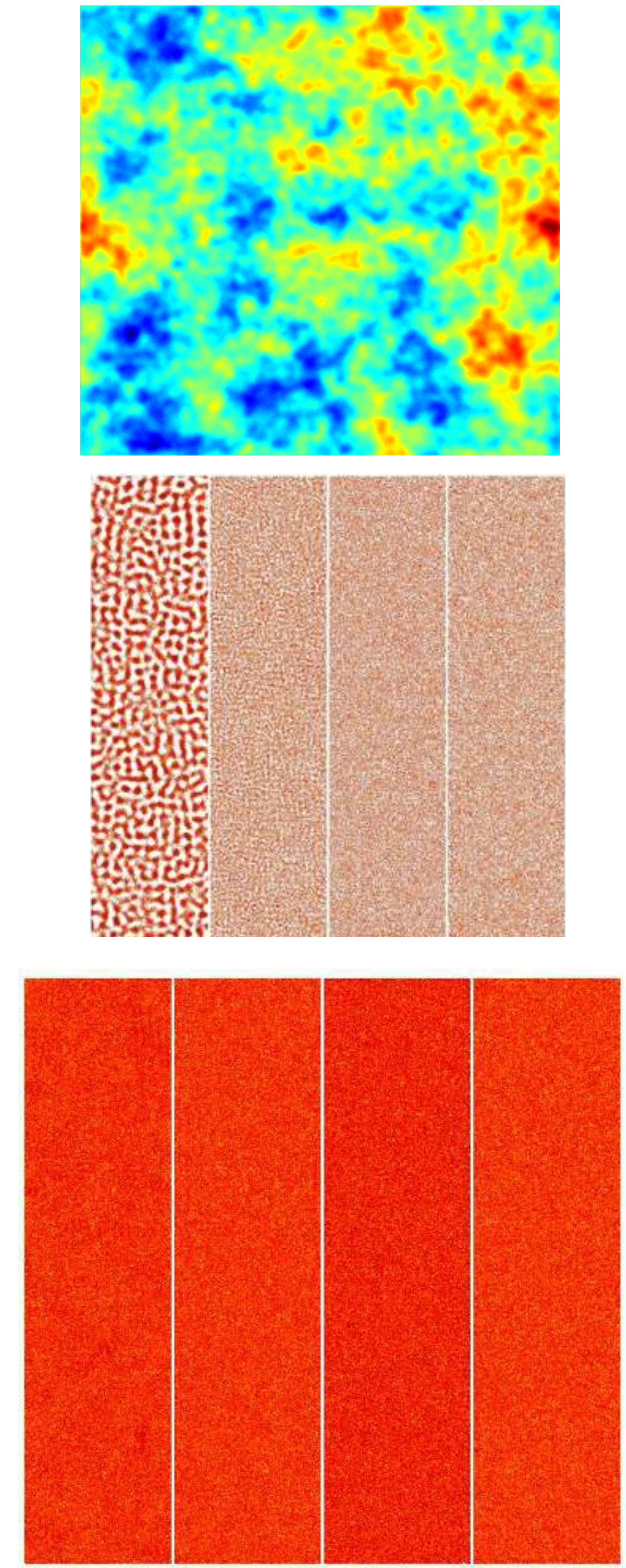
Pure CMB+Beam



Pure CMB+CS+Beam

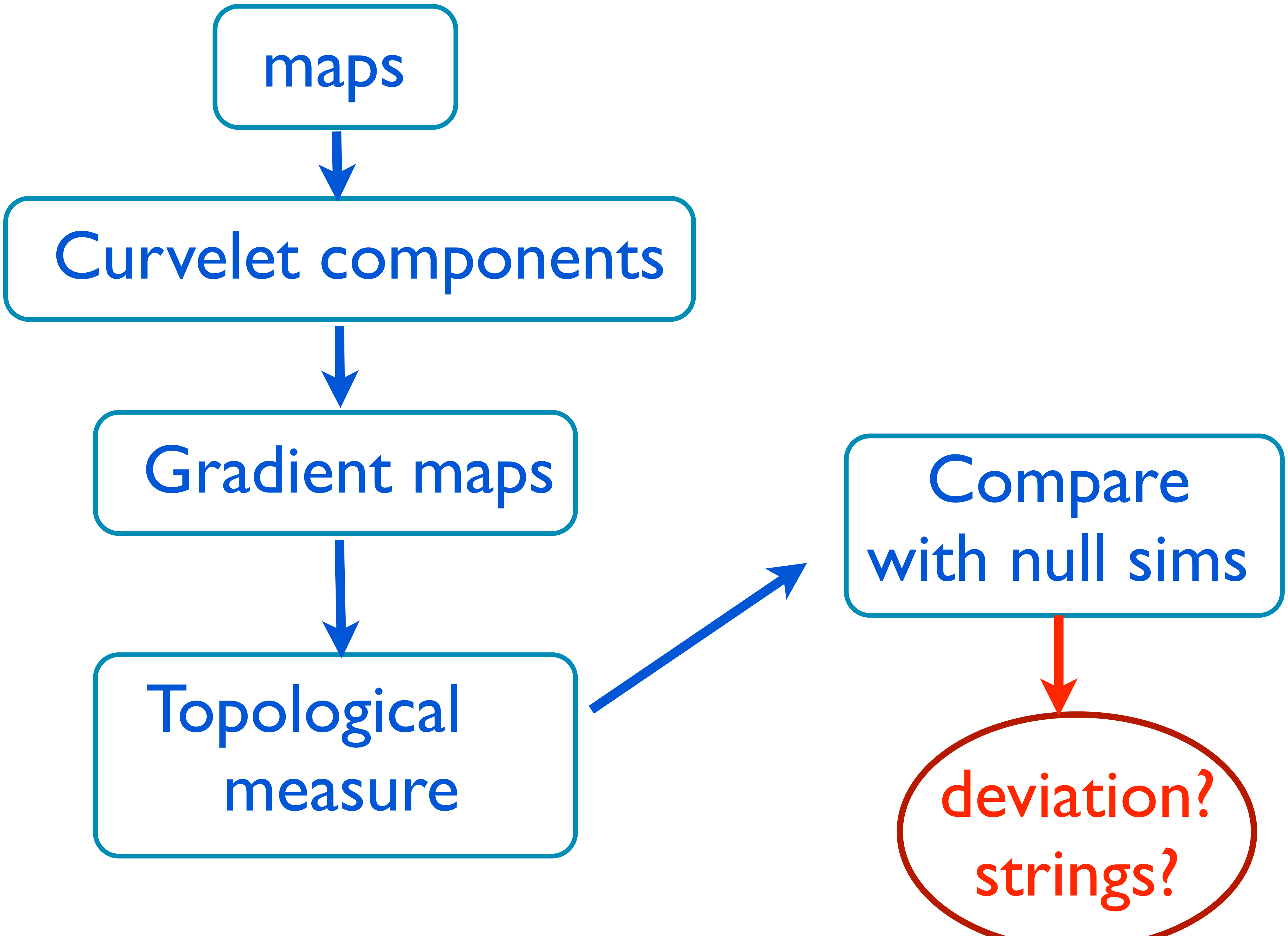


Pure CMB+CS+Beam+Noise

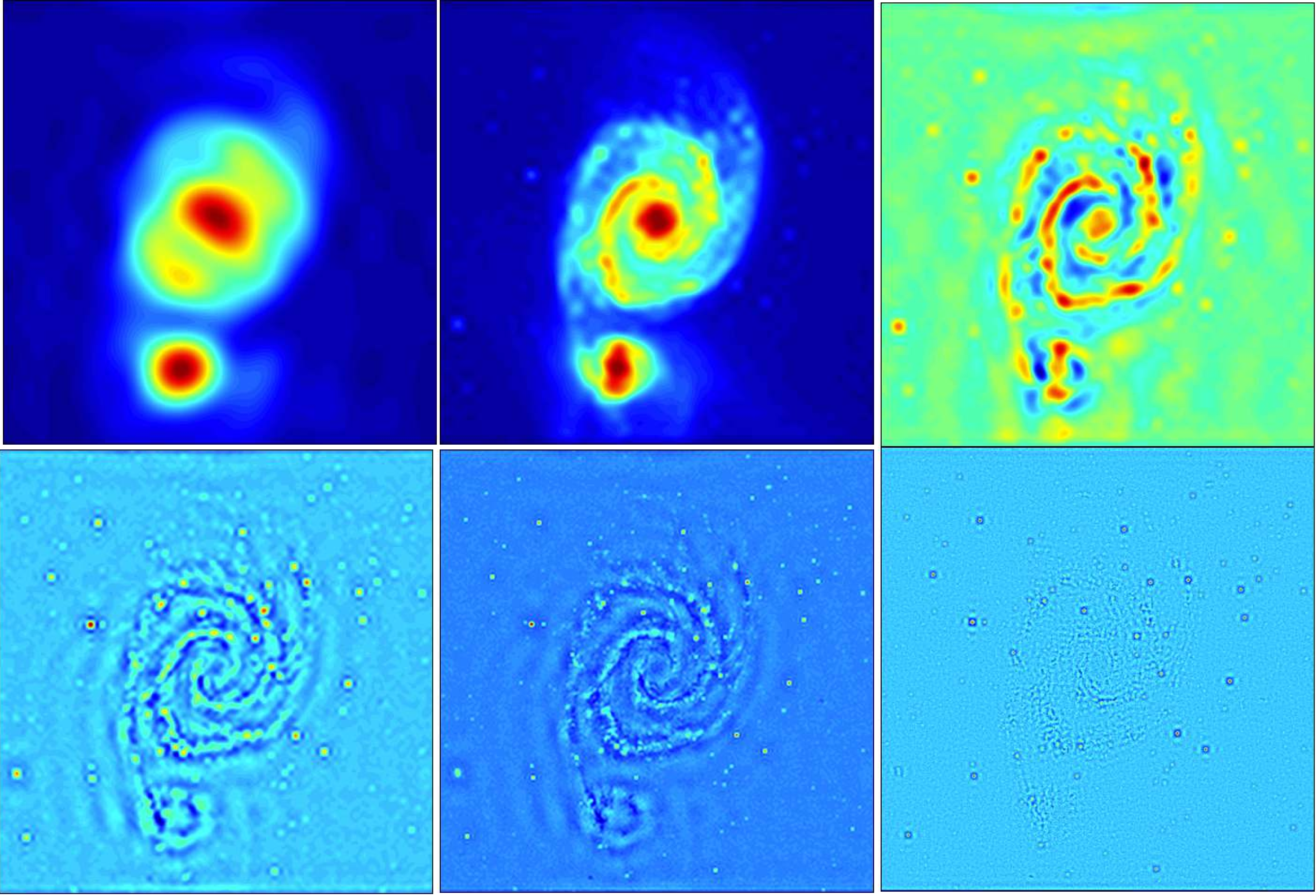


Statistics

The Pipeline

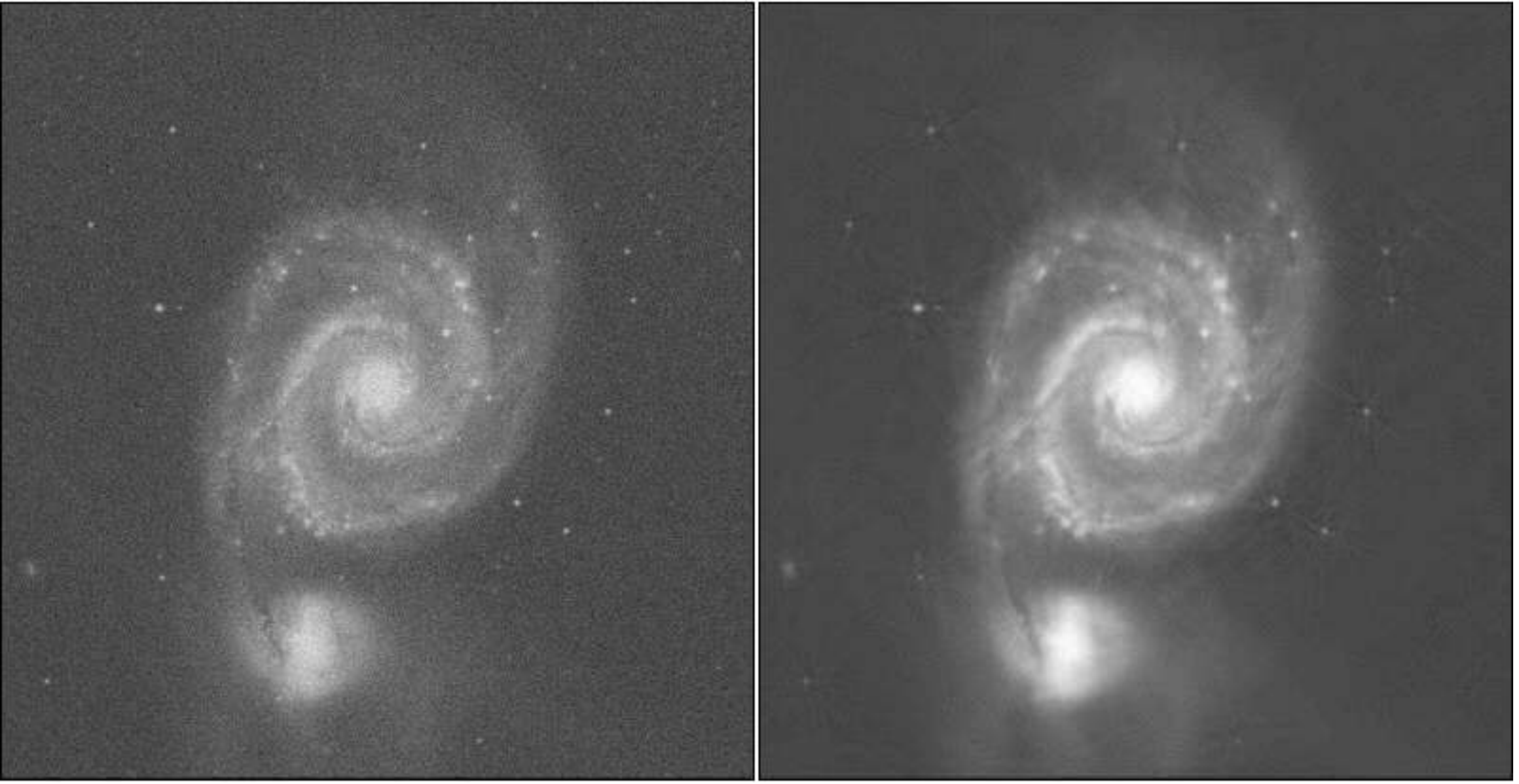


Vafaei Sadr, A., et al., MNRAS, 478.1 (2018): 1132-1140; Vafaei Sadr, A., et al., MNRAS, 475.1 (2017): 1010-1022.



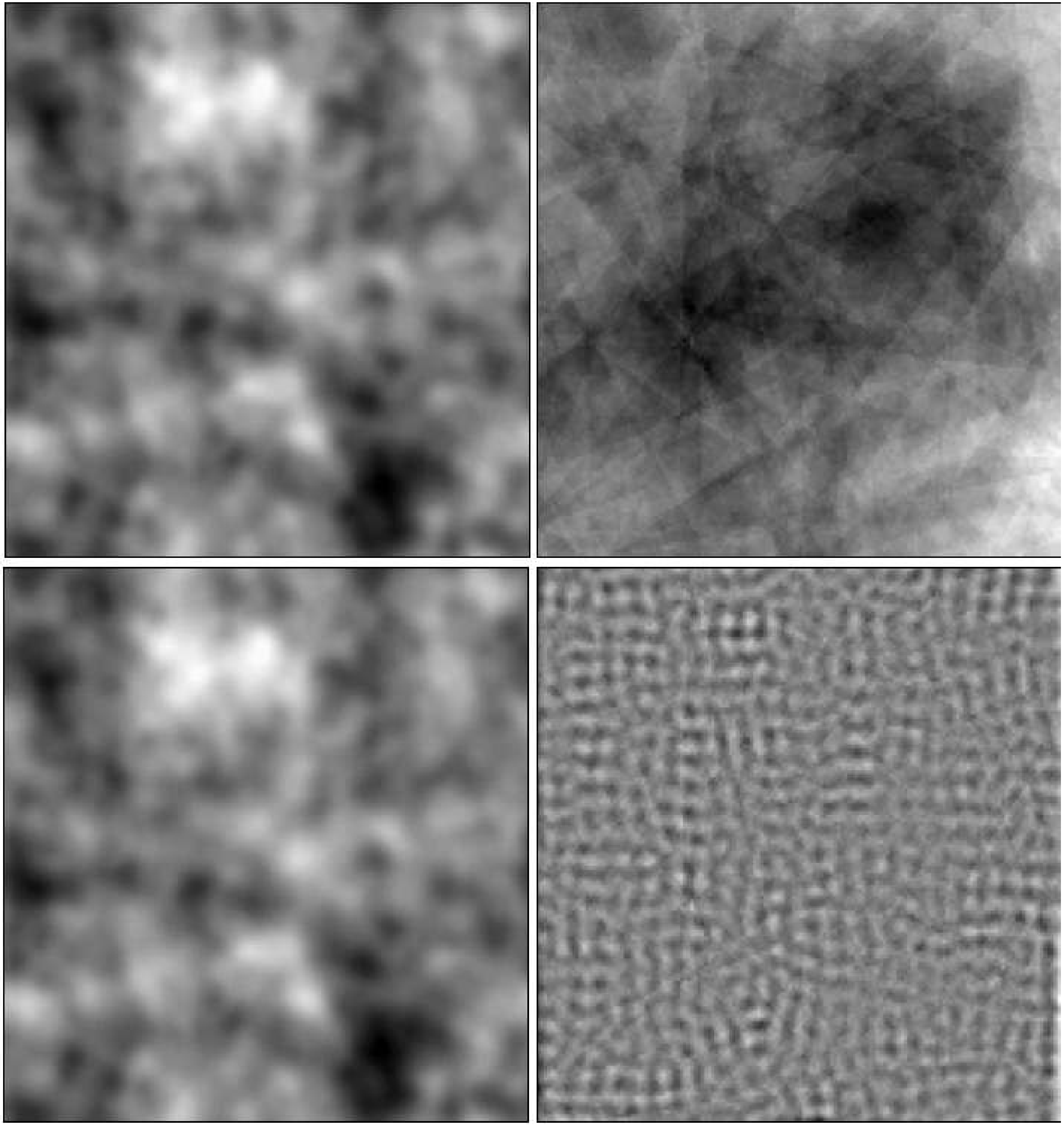
Whirlpool galaxy

B. Javanmady & M. Sadegh Movahed (2012)



شکل شامل نوفه (سمت چپ) و تصویری که توسط curvelet اصلاح شده است

B. Javanmady & M. Sadegh Movahed (2012)



B. Javanmady & M. Sadegh Movahed
(2012)

WT-Application in Denoising

Boats image

Noisy image (additive Gaussian noise)

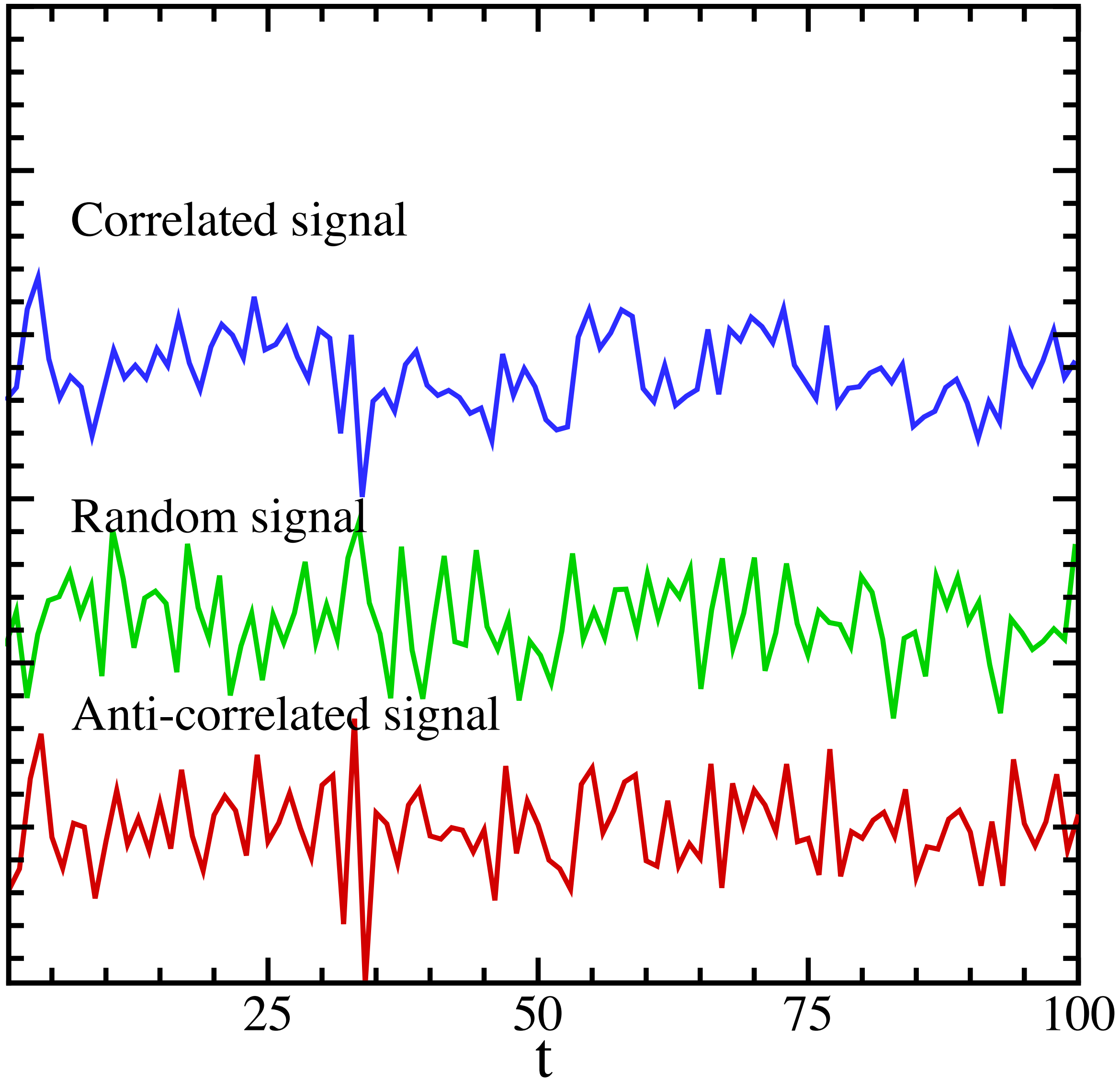
Boats image

Denoised image using hard thresholding

Classification of time series based on Hurst exponent

0<H<1

- Correlated: H>0.5
- Uncorrelated: H=0.5
- Anti-correlated : H<0.5



Scaling exponents

- Multifractal scaling exponent
- Generalized multifractal dimension
- Autocorrelation exponent
- Power spectrum scaling exponent
- Holder exponent
- Singularity spectrum

$$\tau(q) = qh(q) - 1$$

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1}$$

$$\begin{cases} C(s) \sim s^{-\gamma} \\ C(i,j) \sim i^{-\gamma} + j^{-\gamma} - |i-j|^{-\gamma} \end{cases}$$

$$S(\omega) \sim \omega^{-\beta}$$

$$\alpha = \tau'(q)$$

$$\alpha = h(q) + qh'(q)$$

$$f(\alpha) = q[\alpha - h(q)] + 1$$

Exponent	1D-fGn	1D-fBm	2D-Cascade	2D-fBm
γ	$2-2H$	$-2H$	$1-2H$	$-1-2H$
β	$2H-1$	$2H+1$	$2H$	$2H+2$

Hosseinabadi, S., et al., Physical Review E 85.3 (2012): 031113.

User manual for MF-DFA code written by Sadegh Movahed

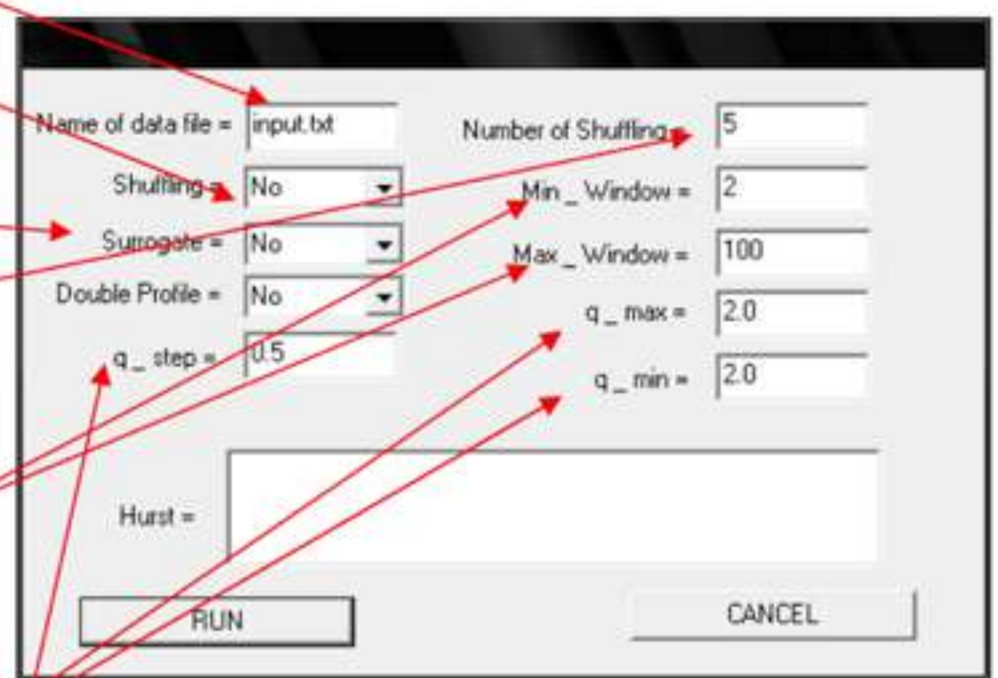
1: You should write the name of your data file in it

2: To shuffled data set you should select YES here.

3: If you want to surrogate your data, select YES for this option

4: This value shows the number of shuffling data set.

5: Here you should determine the maximum and minimum no. of windows, i.e. if you select “10” for maximum and “2” for minimum, your data set is divided to 2 up to 10 non-overlapping windows.



6: If you want to calculate just H=h(q=2) you should determine q=2., namely, q_max=q_min=2. To find the generalized Hurst exponent i.e. h(q) versus q(moment exponent), must q_min and q_max to be different. Just in this case you can find the singularity spectrum for data set.

7: Here the step of moment exponent is determined.

8: In some case, we have to use double profile for data. It is done by the proper option in my program.

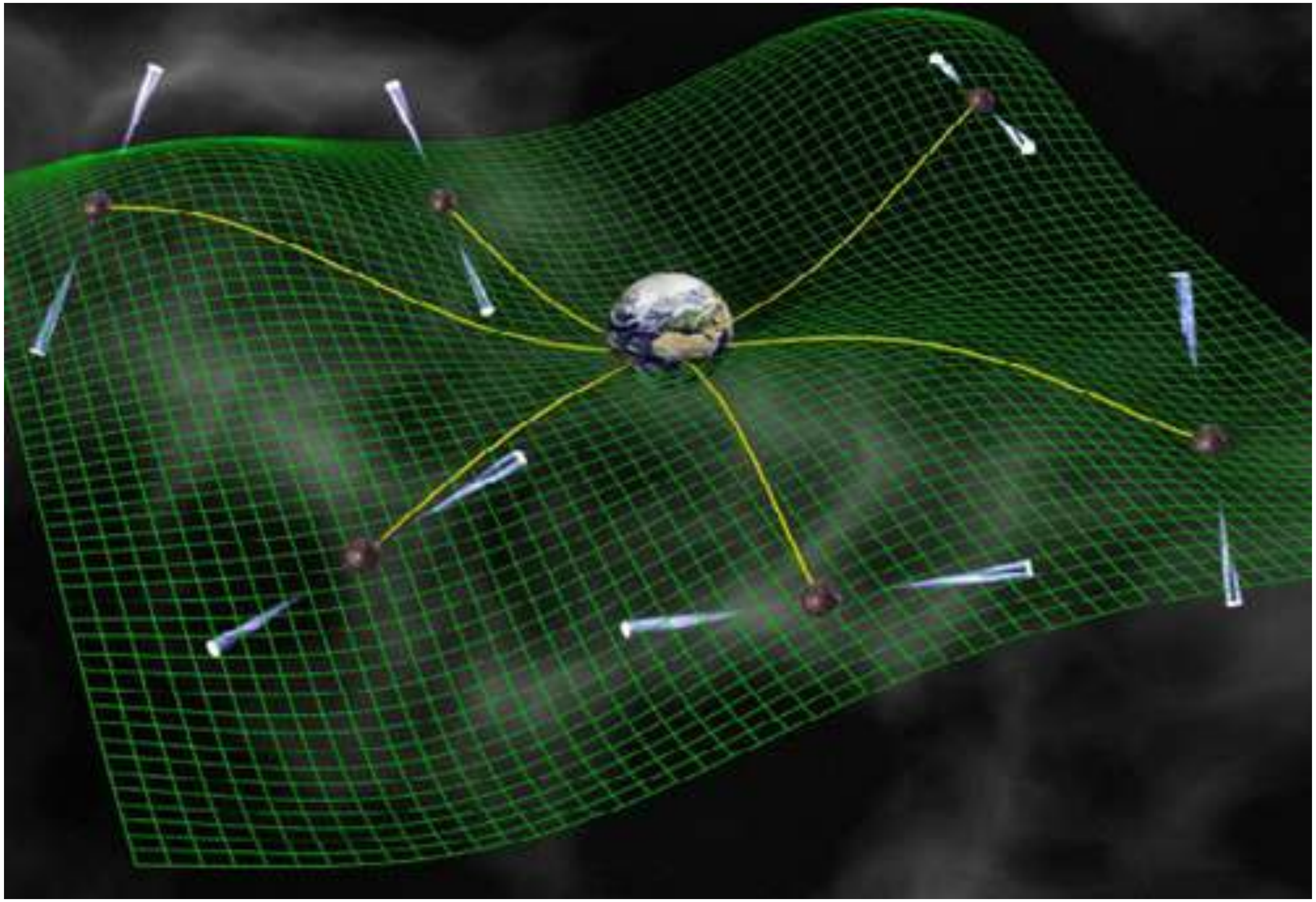
The name of output files are as follows:

1) hurst.txt gives generalized Hurst exponent versus q
2) log_f_s.txt gives the ln (F(s)) versus ln(s)
3) f_s.txt gives the fluctuation function versus “s”
4) tau.txt gives classical multifractal scaling exponent
5) D.txt gives generalized multifractal dimension
6) singularity.txt gives singularity spectrum
7) PDF.txt gives probability density function

To know more visit
http://facultymembers.sbu.ac.ir/movahed/

Example: Gravitational Waves

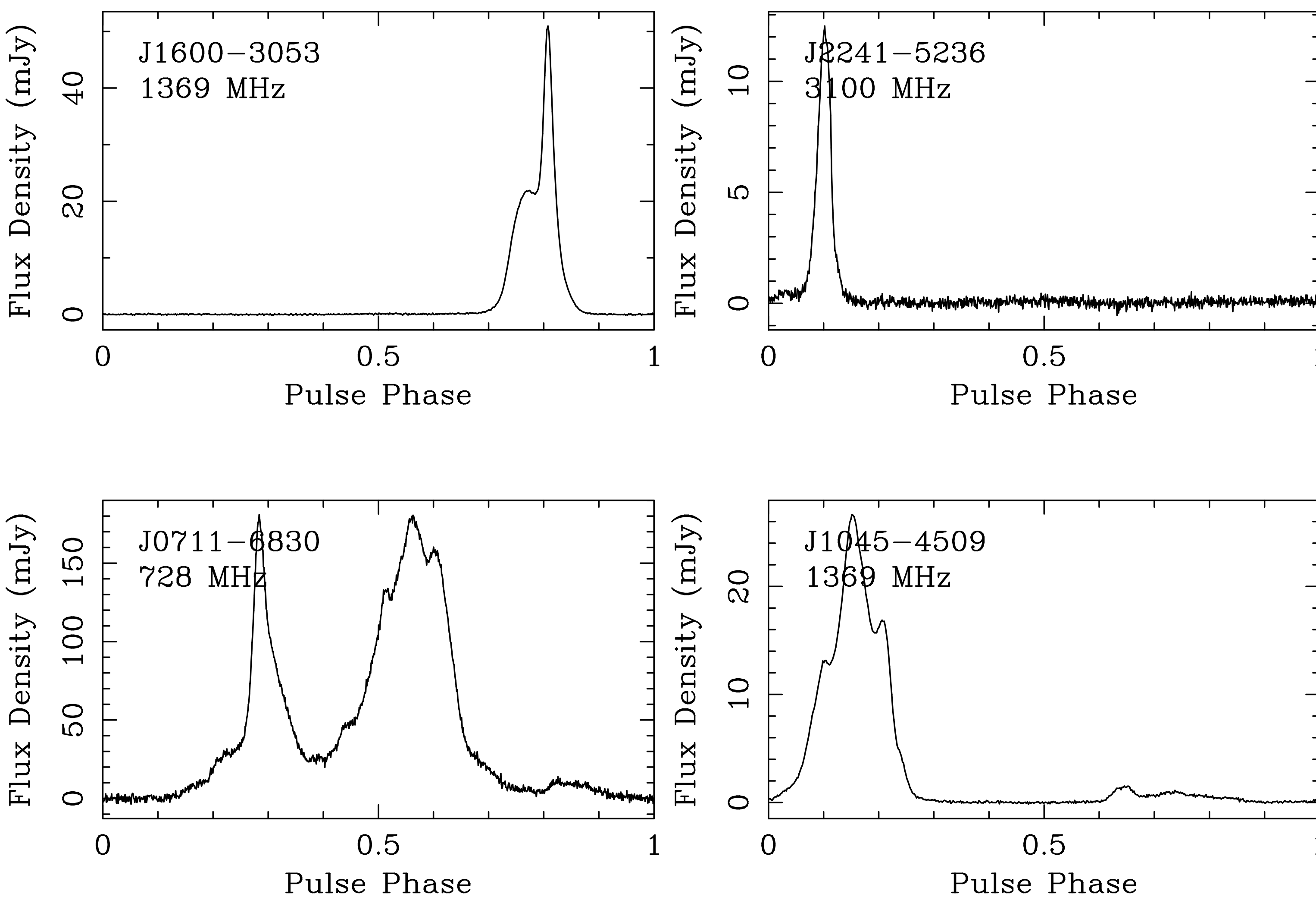
Applications of Pulsar



$f \sim 1/(\text{weeks-years})\ (10^{-6} - 10^{-9}\ \text{Hz})$

Pulsar

- It was observed for the first time on 1967 by Bell and Hewish
- Received Nobel prize on 1974.
- Fast rotating object: Period~ msec -sec
- Pulse periods can be measured with accuracies approaching 1 part in 10^16
- A best model for pulsar is Neutron star



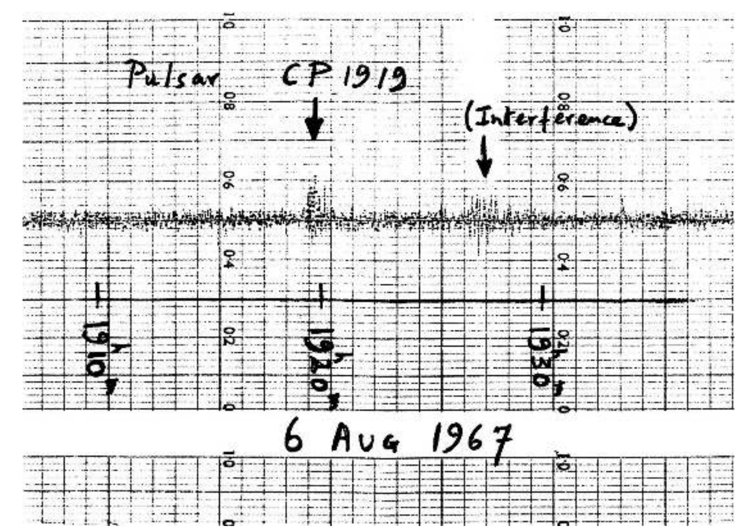


FIGURE 13 Discovery of the first pulsar, PSR 1919+21 (“CP” stands for Cambridge Pulsar). (Figure from Lyne and Graham-Smith, *Pulsar Astronomy*, ©Cambridge University Press, New York, 1990. Reprinted with the permission of Cambridge University Press.)

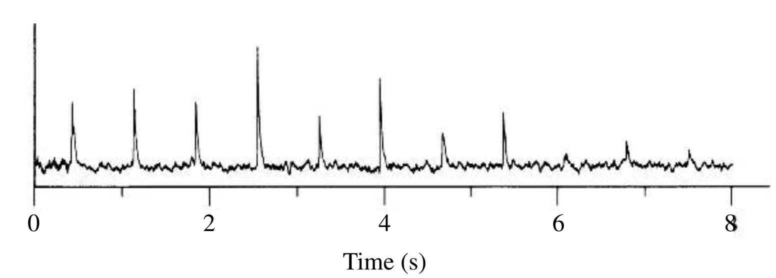
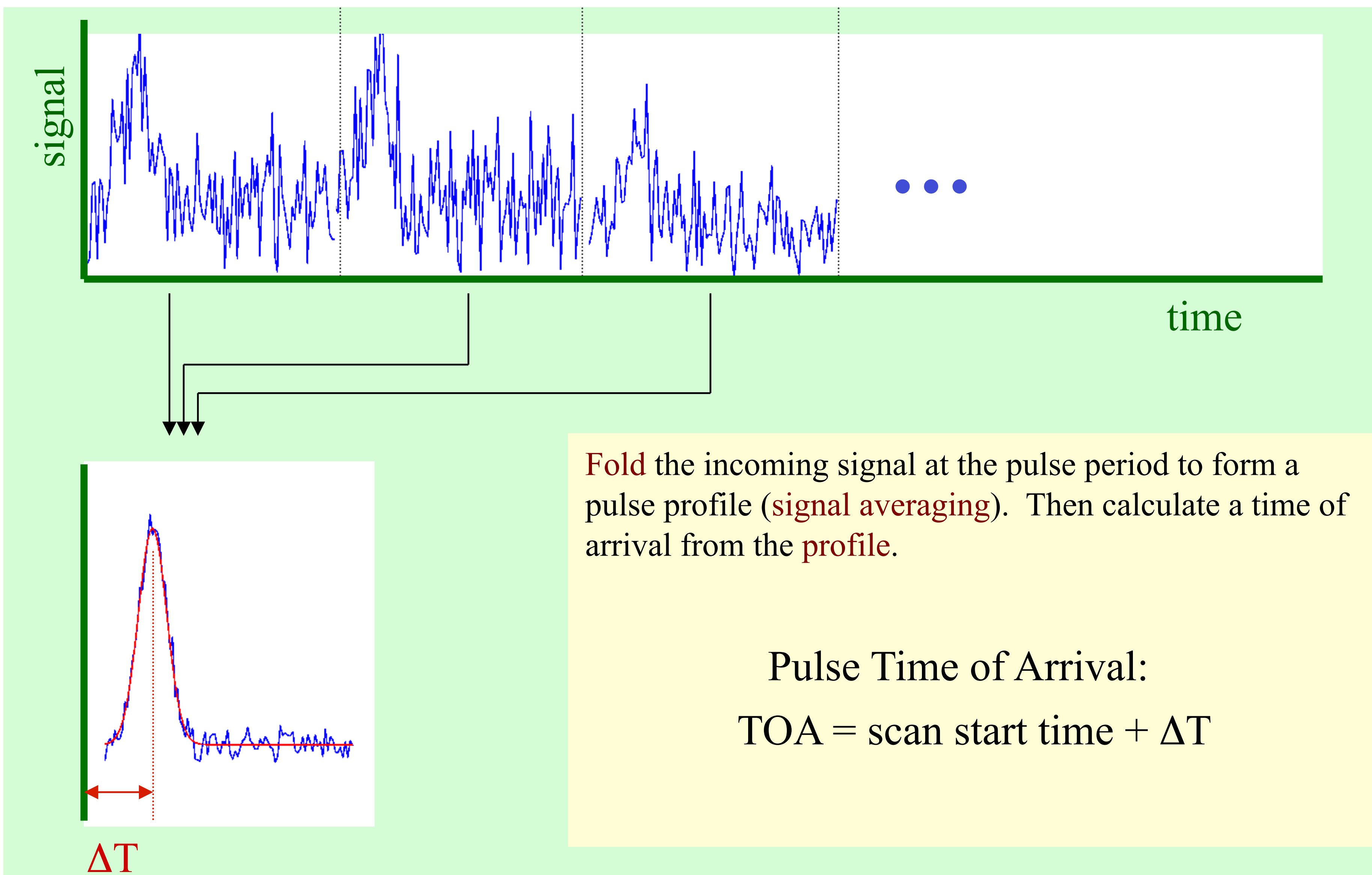


FIGURE 19 Pulses from PSR 0329+54 with a period of 0.714 s. (Figure adapted from Manchester and Taylor, *Pulsars*, W. H. Freeman and Co., New York, 1977.)

Dai, S. Hobbs, G. Manchester, R. N. Kerr, M. Shannon, R. M. van Straten, W., ... & Coles, W. A. *A study of multifrequency polarization pulse profiles of millisecond pulsars.* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 449(3), 3223-3262. 2015.

Pulsar's Time of Arrival

Pulsar timing is the regular monitoring of the rotation of pulsar by tracking (nearly exactly) the times of arrival of the radio pulses

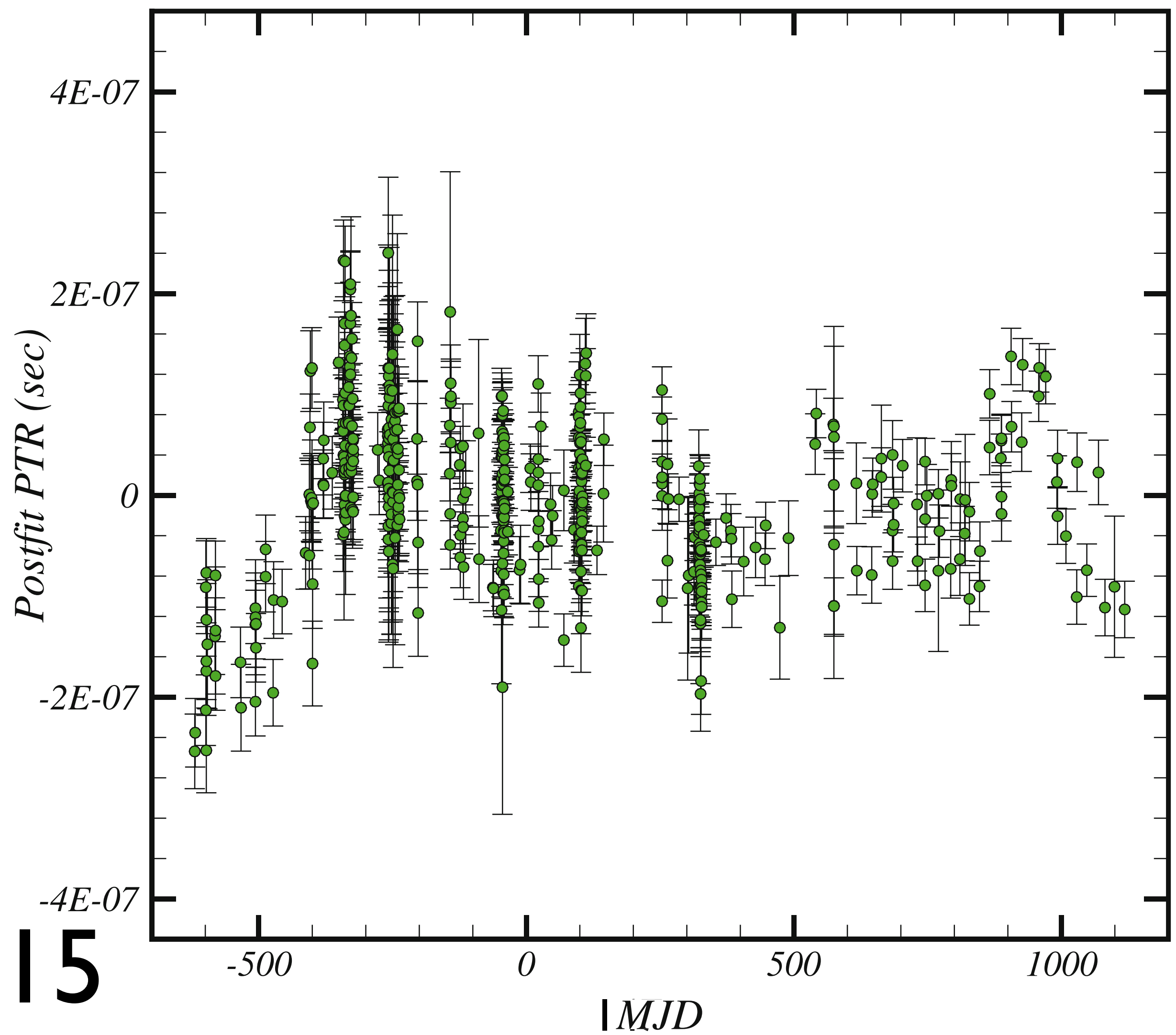


David Nice

Pulsar's Timing residual

Residual is difference between measured pulse's time of arrival and expected time of arrival:
Residual=Observed ToA-Computed ToA or vise versa

$$\Delta t = \Delta_c + \Delta_A + \Delta_{E_\odot} + \Delta_{R_\odot} + \Delta_{S_\odot} - D/f^{٢} + \Delta_{VP} + \Delta_B$$



PSR J0437-4715

Pulsar Timing Array

1) Parkes Pulsar Timing Array (PPTA),
   64-meter Radio Telescope from 1961
2) Square Kilometer Array (SKA)
3) International Pulsar Timing Array (IPTA)
4) European Pulsar Timing Array
   (Including 5 radio telescopes)
5) Indian Pulsar Timing Array (2016)

San Basilio, Sardinia, Italy

Nançay, Nançay, France

Cheshire East, United Kingdom

Australia

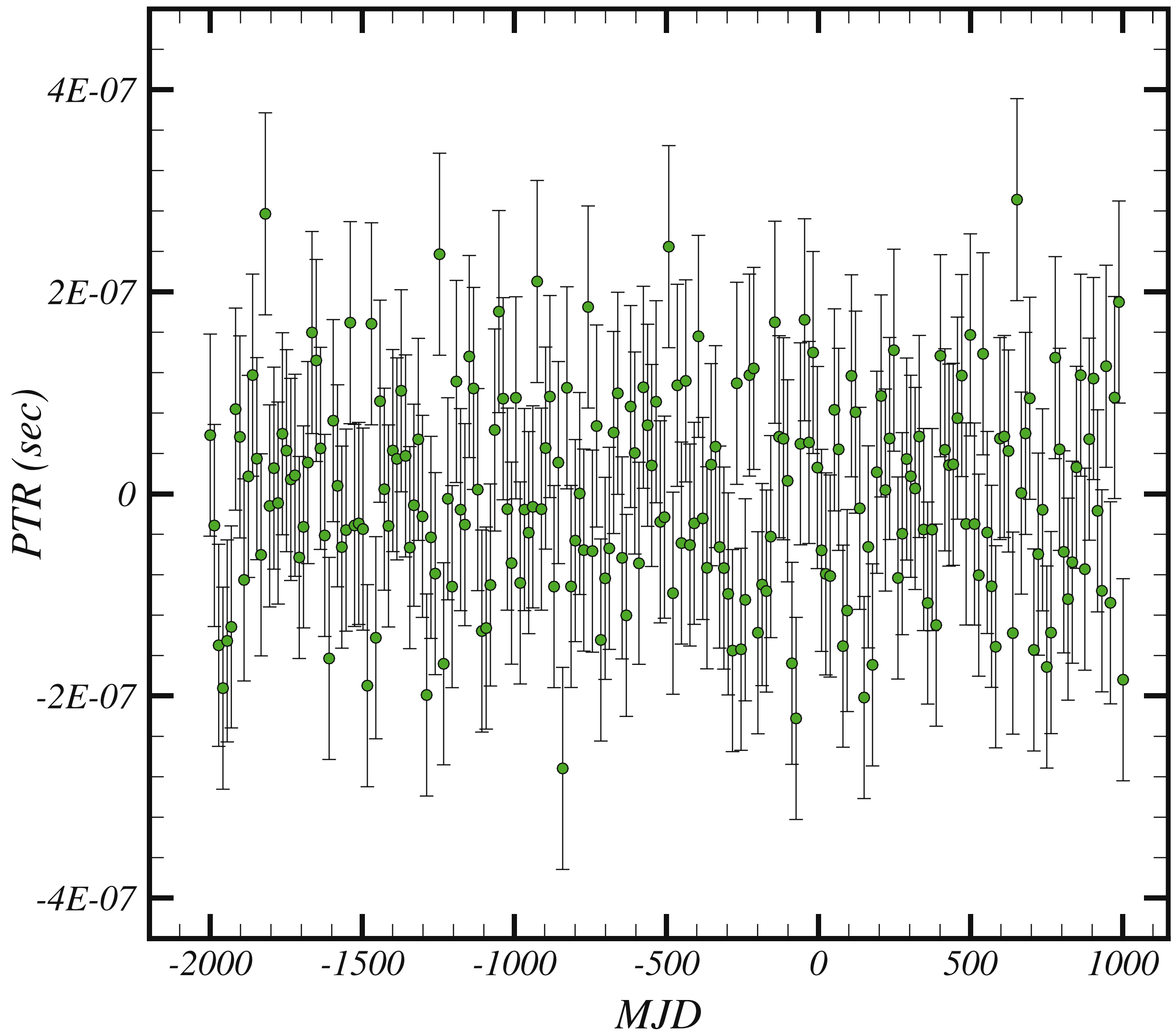
Hooghalen, Netherlands

North Rhine-Westphalia, Germany

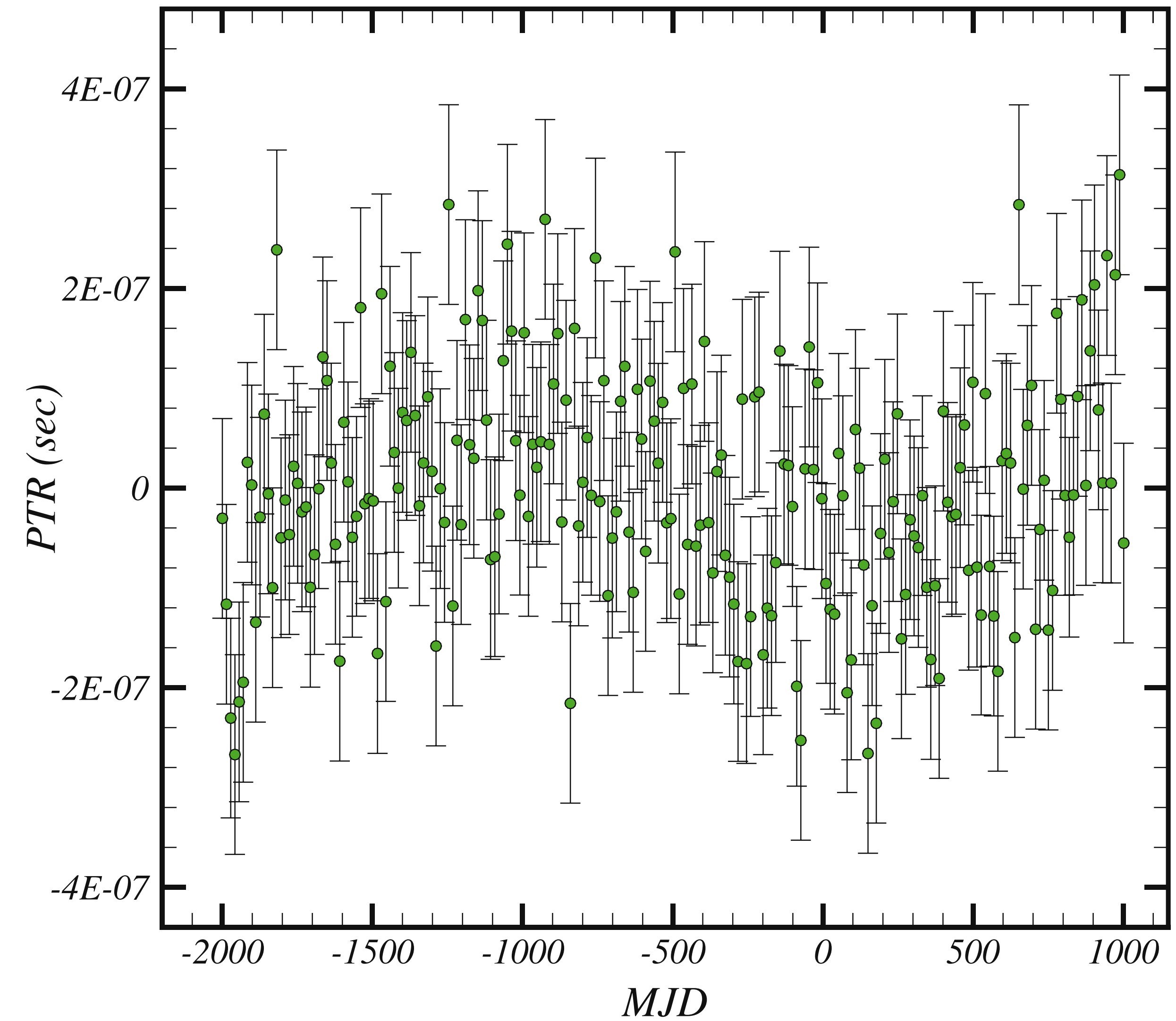
Synthetic Datasets

$$\mathcal{A}_{\rm yr} = 10^{-15}$$
$$\zeta = -2/3$$

Pure PTR

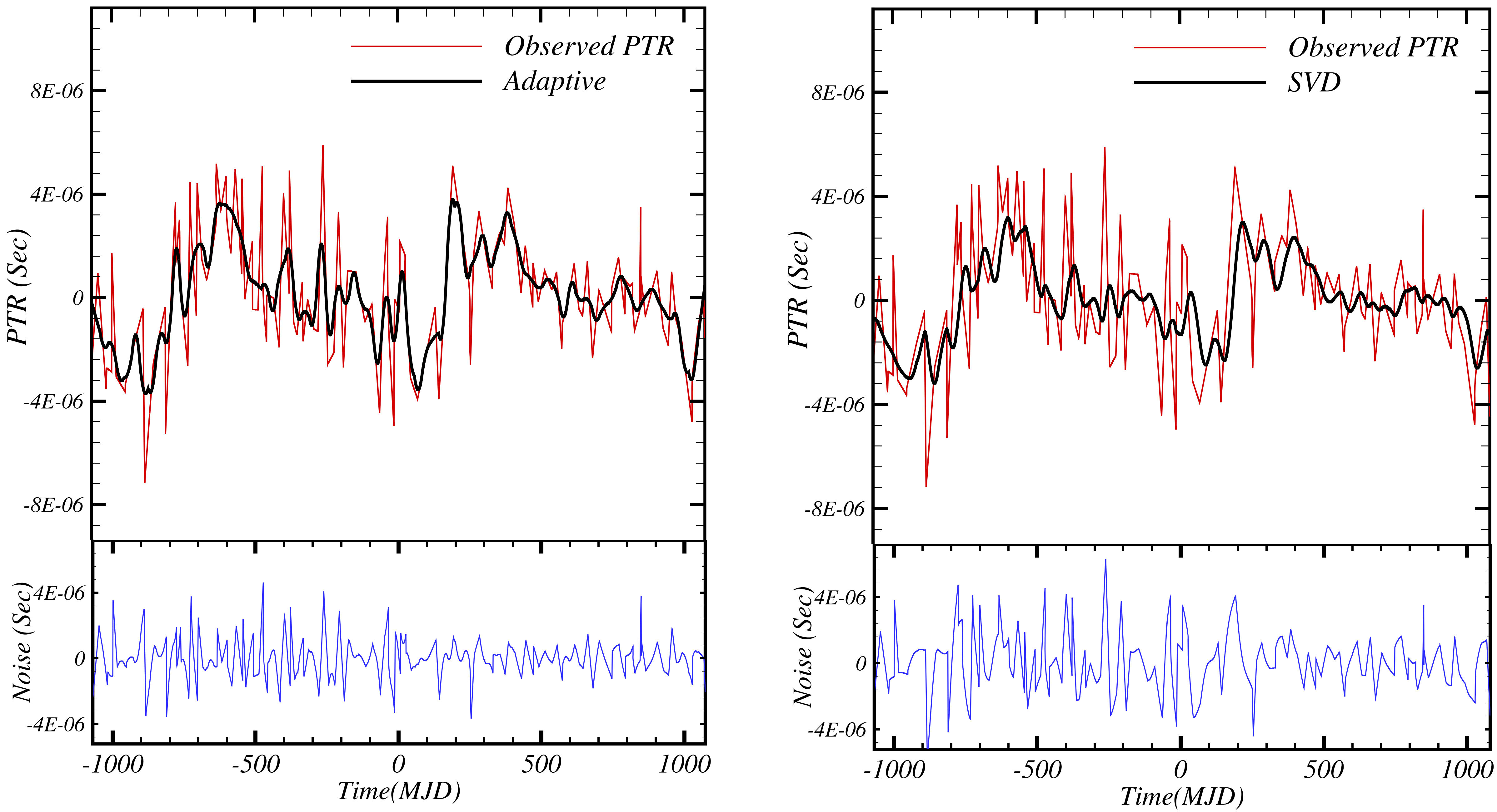


PTR+GW



TEMPO2 software package

Trend and Noise models



از توجه شما سپاسگزارم