بسم الله الرحمن الرحیم

Monte Carlo methods

① Decaying Simulation واپاشی ذرات

② Information Inference

- Normalization
- Marginalization پاک سازی

$$p(x) = \int p(x,y)\, dy$$

- Partition function تابع پارش
- Expectation Value $\langle f \rangle = ?$
- PDF generator ←

③ Optimization

- Variational Monte Carlo
- Markov-Chain Monte-Carlo MCMC
- Hamiltonian Monte-Carlo HMC
- Bootstrap algorithm
- Demon algorithm

For Decaying model

Ex: Decaying Model.

$t=0 \quad N_0 \quad , \quad t_M$ نیمه عمر $\longrightarrow N(t=t_M)=\frac{N}{2}$

$N(t) =$ # of Particles at t

$\Delta N(t) =$ # of Decaying Particles during t and $t+\Delta t$

$$\Delta N(t) = \underbrace{P(t)}_{\text{احتمال واپاشی کردن در بازه } t, t+\Delta t} \times \underbrace{N(t)}_{\text{تعداد ذرات در زمان } t} \longrightarrow \underbrace{p(t) = \frac{\Delta N(t)}{N(t)}}$$

$A: \underbrace{\lambda \Delta t}_{\text{دلخواه } p}$ $\qquad$ $B: \underbrace{\frac{\lambda}{t}\Delta t}_{\text{دلخواه}}$

$A: \quad \Delta N(t) = \lambda \, \Delta t \, N(t)$

$B: \quad \Delta N(t) = \frac{\lambda}{t} \Delta t \, N(t)$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = -\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\frac{p(t)\, N(t)}{\Delta t}$$

$$A: \quad \frac{dN}{dt} = -\frac{\lambda \Delta t \, N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t)$$

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t) \longrightarrow \boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$$

Theory (A)

$$B: \quad \frac{dN}{dt} = -\frac{\lambda}{t}\frac{\Delta t}{\Delta t} N(t) = -\frac{\lambda N(t)}{t}$$

$$\boxed{N(t) = N_0\, t^{-\lambda}}$$ Theory (B)

What about Simulation ?

شماره زمان دلخواه

(A) : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, $t_s = s\Delta t$

$$N(t) \longrightarrow N(s) = N_0 e^{-\lambda s \Delta t} = N_0 e^{-\overbrace{\lambda \Delta t}^{p} s}$$

$$\boxed{N(s) = N_0 e^{-ps}}$$

$0 \leq p \leq 1$ احتمال واپاشی بنا به تعریف

A: Numerical Algorithm احتمال در طول زمان ثابت است

$p = \checkmark$, $N_{old} = \checkmark$, $s = 0$, $\Delta t = \checkmark$

$N = N_{old}$

Do while ($N > 0$)

$\Delta N = 0$

loop $i = 1, N$

R = Call Random

if ($R \leq p$) Then

$\Delta N = \Delta N + 1$

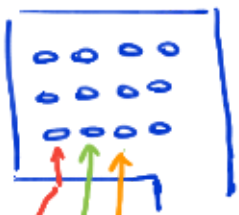
End if

End loop

$S = S + 1$

fixed

کل ذرات باقیمانده برای سوئه بعد یک مرحله زمانی جلو می‌رود



(B) $p = \frac{\lambda}{s}$

زمان

$N = N - \Delta N$

Write $S \times \Delta t$, N $\longrightarrow$ t , N

End loop

$N \gg 1$ جواب دقیق است

$N(t) = N_0 e^{-ps}$ $\longleftarrow$ $p = 0$, $p = 1$ برای حالت

همان اول همگی یکجا واپاشی کنند

$N(t) = N_0 \underbrace{e^{-\infty t}}_{0} \longrightarrow 0$

هیچکدام واپاشی نکنند

$N(t) = cts$

$p = \lambda \Delta t$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} - \frac{p(t)\, N(t)}{\Delta t}$$

$\longrightarrow$ for $p(t) = 1$ $\quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t)}{\Delta t} = -\infty$

$N(t) = N_0 e^{-\infty}$ یعنی همان لحظه اول واپاشی کند

for $p(t) = 0$ $\quad \frac{dN}{dt} = 0 \longrightarrow N = cts$

هیچ تغییری نمی‌کند

انتخاب $\boxed{p = \lambda \Delta t}$ در الگوریتم مونت‌کارلو برای $0 < p < 1$

$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ for $\begin{cases} p \neq 0 \\ p \neq 1 \end{cases}$

Last modified: 12:10