Subject:
Year. Month. Date. ( )

بسم الله الرحمن الرحیم .

«خداوندا عاقبت امور ما را ختم به خیر فرما»

Mathematical Methods for physicists

Ref: ARFKEN.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

chapter 1: "Vector Analysis"

※ در علم فیزیک به دنبال شناخت جهان مادی هستیم و توجه خود را به بخش اندازه‌پذیر عالم معطوف می‌کنیم نیازی به درگیر شدن با مفاهیم فلسفی آن نخواهیم برد.

※ برای شناخت عالم مراحل زیر را دنبال می‌کنیم ← ① فرضیه
← ② بیان ریاضی فرضیه که منجر به تئوری خواهد شد
← ③ استخراج کمیت‌های مشاهده‌پذیر از تئوری و
← ④ اندازه‌گیری و جمع‌آوری مشاهدات
← ⑤ بررسی صحت تأثیر مدل برای اهداف: جهت
تحلیل، تغییر و کنترل
پیش‌بینی فرآیندها.

※ فیزیکدانان تجربی به دنبال انجام آزمایش‌ها و مشاهدات و جمع‌آوری نتایج حاصل از آنها می‌باشند
فیزیکدانان تئوری به دنبال تحلیل و توصیف و مدل‌سازی نتایج گروه اول می‌باشند

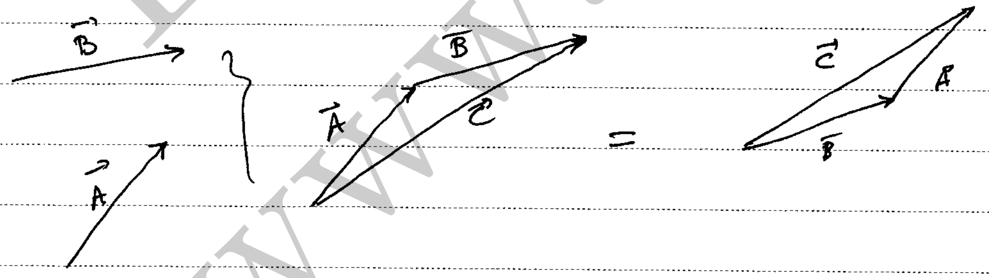
نتیجه کار این دو گروه می‌شود:
- شناخت علمی
- حرکت به سمت تکمیل بصیرت نسبت به جهان مادی

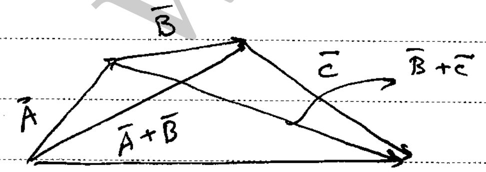
※ کمیت‌ها از نظر خواص ریاضی به دو دسته تقسیم‌بندی می‌شوند
Scalar
Vector { Magnitude, Direction }

※ Vector

$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$ ⟷ قانون انجمنی Associative law

$\vec{C} = \vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$ ⟷ قانون جابجایی Commulactive law





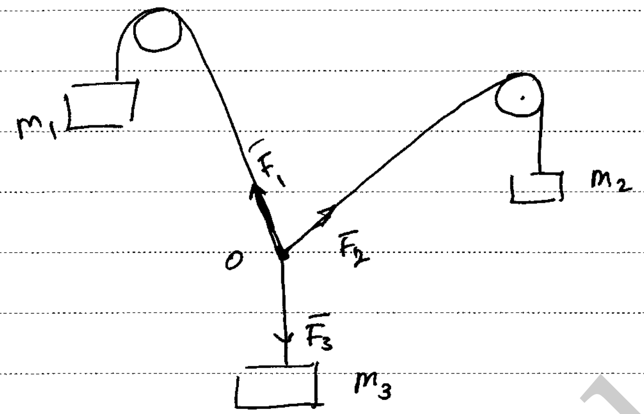
$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = (\vec{B}+\vec{C})+\vec{A}$

Vector → Geometrical Definition → در فیزیک‌ها مورد استفاده است

Vector → Algebrical Definition → در سیستم‌های بزرگ‌تر کاربردی است *

* به عنوان یک مثال در فیزیک می‌توان برای بردار نیرو از آن‌ها استفاده کرد.

$\vec{E}, \vec{F}, \vec{B} \rightarrow$ کمیت‌های برداری در فیزیک



$$\text{for Equilibrium} \begin{cases} \text{Translational} \rightarrow \sum_i \vec{F}_i = M\vec{a}_{com} \\ \text{Rotation} \rightarrow \sum_i \vec{\tau}_i = I\vec{\alpha}_{com} \end{cases}$$

$$\text{if } a_{cm} = 0 \longrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$$

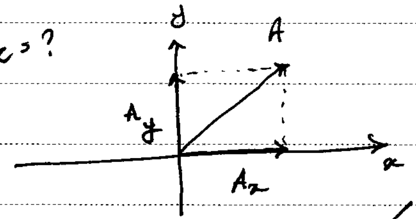
* می‌توان بردارها را به مؤلفه‌های پایه تجزیه کرد. مؤلفه‌های پایه دارای خواصی هستند: بتوان آنها را پایه دید یعنی باید نسبت به هم استقلال خطی داشته باشند یعنی

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_y = 0 \qquad \hat{a}_x \cdot \hat{a}_z = 0 \qquad \hat{a}_y \cdot \hat{a}_z = 0$$

$$|\hat{a}_x| = |\hat{a}_y| = |\hat{a}_z| = 1$$

$$\vec{A} \equiv (A_x, A_y, A_z) \longrightarrow \begin{array}{l} A_x = ? \\ A_y = ? \\ A_z = ? \end{array}$$

In 2D we have:



توجه شود که A_x و A_y نسبت به هم استقلال خطی دارند یعنی نمی‌توان مقادیر آنها را، یکی را از هم به دست آورد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$A_x = A\cos\alpha$$
$$A_y = A\sin\alpha = A\cos(\pi/2 - \alpha)$$

با توجه به شکل داریم

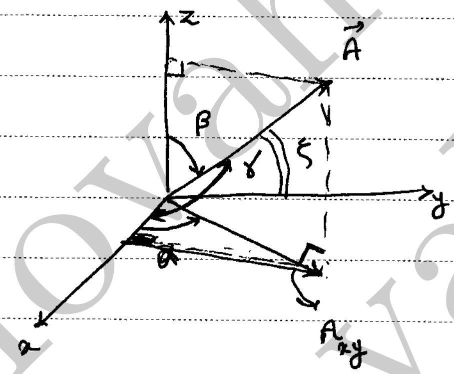
[illegible] Dot Product
scalar product

* در ادامه قراره دیگه تعاریف را به غیر از جزءهای ضرب داخلی بـ

$$A_x = \vec{A}\cdot\hat{i} = |\vec{A}||\hat{i}|\cos\alpha \qquad \alpha + \beta = \pi/2$$
$$A_y = \vec{A}\cdot\hat{j} = |\vec{A}||\hat{j}|\cos\beta = |\vec{A}||\hat{j}|\sin\alpha$$

$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$ unit vector

In 3D



$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

$$A_z = \vec{A}\cdot\hat{k} = A\cos\beta$$

$$A_x = \vec{A}\cdot\hat{i} = \vec{A}_{xy}\cdot\hat{i} = (A\sin\beta)\cos\alpha$$
$$= A\cos\gamma$$

$$A_y = \vec{A}\cdot\hat{j} = \vec{A}_{xy}\cdot\hat{j} = (A\sin\beta)\sin\alpha$$
$$= A\cos\xi$$

$$\gamma \xleftrightarrow{?} \alpha, \beta \rightarrow A\cos\gamma = A\sin\beta\cos\alpha \rightarrow \cos\gamma = \sin\beta\cos\alpha$$

$$\xi \xleftrightarrow{?} \alpha, \beta \rightarrow A\cos\xi = A\sin\beta\sin\alpha \rightarrow \cos\xi = \sin\beta\sin\alpha$$

1.2: Rotation of The Coordinate Axes

* بردارها تحت تبدیلات انتقال Translation و دوران Rotation بردار باقی می‌مانند در حقیقت می‌توان گفت تعریف بردار به عنوان کمیتی که دارای مقدار و جهت باشد کامل نیست بلکه تحت تبدیلات ذکر شده باید بردار باقی بمانند.

* ϵ در موارد خاص همانند تعریف در صورتی که هم مقدار و هم جهت داشته باشد بردار نیست.

* هر کمیتی که به ازای تمام دستگاه‌های مختصات ثابت باشد اسکالر است. "Scalar is invariant under Rotation"

* $\vec{A} \longrightarrow \vec{A}'$

$$(A_x', A_y', A_z') = \begin{bmatrix} \hat{i}'\cdot\hat{A}_x & \hat{i}'\cdot\hat{A}_y & \hat{i}'\cdot\hat{A}_z \\ \hat{j}'\cdot\hat{A}_x & \hat{j}'\cdot\hat{A}_y & \hat{j}'\cdot\hat{A}_z \\ \hat{k}'\cdot\hat{A}_x & \hat{k}'\cdot\hat{A}_y & \hat{k}'\cdot\hat{A}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

* در حقیقت اگر بتوانیم $\vec{A}'$ را شبیه محورهای تبدیل شده بنویسیم همان A بردار است.

* ماتریس دوران

$$A_i' = \sum_{ij} a_{ij} A_j$$

$$= a_{ij} A_j$$

$$a \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* ترانهاده

$$A'_i = \sum a_{ij} A_j$$

زاویه بین جهت مثبت x'_i و جهت مثبت x_j ← $a_{ij} \equiv \dfrac{\partial x'_i}{\partial x_j}$

* اگر $\varphi \to -\varphi$ رو آن حساب به وضعیت اولیه برمی‌گردیم یعنی

$$\varphi \to -\varphi \implies x_j = \sum a_{ij} x'_i \qquad a_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$$

$$\begin{cases} x'_1 = \cos\varphi\, x_1 + \sin\varphi\, x_2 \\ x'_2 = -\sin\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2 \end{cases} \implies \begin{aligned} a_{11} &= \cos\varphi = \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \\ a_{12} &= \sin\varphi = \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \\ a_{22} &= \cos\varphi = \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \\ a_{21} &= -\sin\varphi = \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = \cos\varphi\, x'_1 - \sin\varphi\, x'_2 \\ x_2 = \sin\varphi\, x'_1 + \cos\varphi\, x'_2 \end{cases}$$

$$a'_{11} = \cos\varphi = \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} = a_{11}$$

$$a'_{12} = -\sin\varphi = \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} = -a_{12} = a_{21}$$

$$a'_{22} = \cos\varphi = \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} = a_{22}$$

σ_e داریم

$$A'_i = \sum_j a_{ij} A_j$$

$$A_i = \sum_j \underbrace{a'_{ij}} A'_j = \sum_j \underbrace{a_{ji}} A'_j$$

Orthogonality Condition *

$$\sum_i a_{ij}\, a_{ik} = \delta_{jk}$$

برای اثبات عمودیت تنها داریم. میدانیم که داریم،

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$$

پس

$$\sum a_{ij} \cdot a_{ik} = \sum \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk}$$

* ما از تانسور استفاده خواهیم کرد تا نشان دهیم که چه چیزهایی بردار و چه چیزهایی اسکالر هستند.

رهیافت ②

مطالب قبلی را می‌توان به شکل دیگری نیز استخراج کرد، یعنی

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

$$\vec{A} \xrightarrow{R_\varphi^{(2)}} \vec{A'} = A'_x\hat{i}' + A'_y\hat{j}'$$

حال می‌خواهم A'_x و A'_y را استخراج کنم. برای اینکار، توجه می‌کنم به اینکه بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$

در دستگاه جدید چگونه هستند.

$$\hat{i} = \cos\varphi\,\hat{i}' - \sin\varphi\,\hat{j}'$$

$$\hat{j} = \sin\varphi\,\hat{i}' + \cos\varphi\,\hat{j}'$$

حال جایگذاری می‌کنم.

$$\begin{aligned}\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} &= A_x(\cos\varphi\,\hat{i}' - \sin\varphi\,\hat{j}') + A_y(\sin\varphi\,\hat{i}' + \cos\varphi\,\hat{j}') \\ &= \hat{i}'\left[A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi\right] + \hat{j}'\left[-A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi\right] \\ &= \hat{i}'A'_x + \hat{j}'A'_y\end{aligned}$$

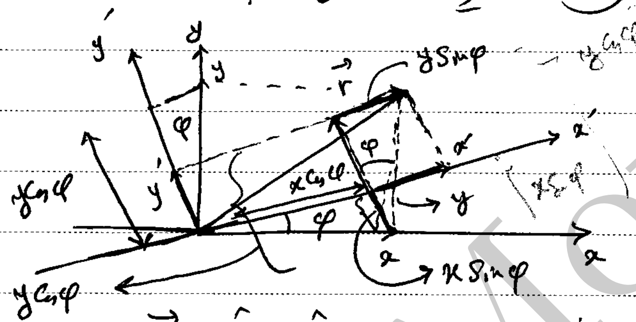
پس

$$\boxed{\begin{aligned}A'_x &= A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi \\ A'_y &= -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi\end{aligned}}$$

1.2, Rotation of The Coordinate

※ در بخش قبل گفتیم که بردار یعنی کمیتی که هم دارای جهت و هم دارای مقدار است. این بیان معنایش نیست که هر چیزی که دارای جهت و مقدار باشد حتماً بردار است مثلاً دورانهای غیر همسان در ضرب نسبت می‌توانند جهت‌دار باشند که در چارچوب یک ماتریس داده خواهد شد. بنابراین باید تعریف دقیق‌تری ارائه گردد.

※ با توجه به اینکه بردار کمیتی است مستقل از دستگاه مختصاتی که در آن تعریف می‌گردد، وضعیت اجزا یک بردار را در دستگاه مختصات دوران یافته بررسی می‌کنیم. فرض کنید $\vec{r}$ یک کمیت برداری باشد که دارای مختصه‌های زیر در دستگاه xy باشد:



$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$
↓
مولفه‌های بردار $\vec{r}$ در دستگاه مختصات اولیه

※ حال می‌پرسیم که مولفه‌های $\vec{r}$ در دستگاه جدید چگونه خواهند بود؟ یعنی

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$\vec{r} \longrightarrow \vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}'$

$x' = ?$

$y' = ?$

① رهیافت هندسی

※ از طریق هندسی مسئله را بررسی می‌کنیم یعنی

$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$

$y' = y\cos\varphi - x\sin\varphi$

بدین

$\vec{r} \longrightarrow \vec{r}' = (x\cos\varphi + y\sin\varphi)\hat{i}' + (-x\sin\varphi + y\cos\varphi)\hat{j}'$

$|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|\vec{r}'| = \sqrt{x'^2+y'^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

※ یعنی اندازه بردار که اسکالر است تحت دوران تغییر نکرده، پس اسکالر موجودی است که تحت دوران ناوردا است.

* حال می‌توان گفت که هر بردار دلخواهی که در دستگاه چرخیده تحت عبارت زیر داده می‌شود یعنی شکل آن همواره ماتریس بردار است

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \xrightarrow{R_\varphi} \vec{A}' = (A'_x, A'_y, A'_z)$$

$$(A'_x, A'_y, A'_z) = \begin{bmatrix} \hat{i}'\cdot\hat{i} & \hat{i}'\cdot\hat{j} & \hat{i}'\cdot\hat{k} \\ \hat{j}'\cdot\hat{j} & \hat{j}'\cdot\hat{j} & \hat{j}'\cdot\hat{k} \\ \hat{k}'\cdot\hat{i} & \hat{k}'\cdot\hat{j} & \hat{k}'\cdot\hat{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

* نکته چند دوران جابجاپذیر نیست.

$$\vec{A} \xrightarrow{R_{1\varphi}\ R_{2\alpha}\ R_{3\beta}} \vec{A}'$$

$$\vec{A}' = (R_{3\beta} R_{2\alpha} R_{1\varphi}) \vec{A}$$

* حال می‌توان به طریق دیگری هم نوشت

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' \Rightarrow \quad A'_i = \sum_j a_{ij} A_j$$

$$a \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ماتریس پادمتقارن است

$a_{ij} = -a_{ji}$

$a a^{-1} = 1$ ماتریس متعامد است

a_{ij} که زاویه بین جهت مثبت x'_i و x_j است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* اگر توجه کنیم می‌توان نوشت

$$a'_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$$

پس

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A_j$$

* اگر توجه کنیم، $\varphi \to -\varphi$ دوباره به حالت اول برمی‌گردیم یعنی برای برگشت از دستگاه پریم‌دار به دستگاه اولیه می‌توان نوشت

$$A_i = \sum a'_{ij} A'_j$$

که اینجا داریم

$$\boxed{a'_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}}$$

در حالیکه قبلاً داشتیم

$$\boxed{a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}}$$

٤

* سؤال: چه ارتباطی بین a'_{ij} و a_{ij} داریم؟

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$$

برای پاسخ به سؤال فوق، با توجه به اینکه (x, y) و (x', y') بردار بودند پس باید تحت تبدیلات قبل به یکدیگر تبدیل شوند

دیدیم که

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \qquad \longrightarrow \qquad a_{11} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} = \cos\varphi$$

$$y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \qquad a_{12} = \sin\varphi \quad a_{21} = -\sin\varphi \quad a_{22} = \cos\varphi$$

حال (x', y') را مبدأ قرار می‌دهیم و با دوران به اندازه $-\varphi$ به (x, y) می‌بریم پس

$$x = x'\cos(-\varphi) + y'\sin(-\varphi) = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$

$$y = -x'\sin(-\varphi) + y'\cos(-\varphi) = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$

حال برای مثال

$$a'_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} = \cos\varphi$$

$$a'_{12} = -\sin\varphi \qquad a'_{21} = \sin\varphi \qquad a'_{22} = \cos\varphi$$

که نتیجه می‌دهد

$$\boxed{a'_{ij} = a_{ji}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$A'_i = \sum a_{ij} A_j$$

$$A_i = \sum a'_{ij} A'_j = \sum a_{ji} A'_j$$

Orthogonality Condition ※

عناصر a_{ij} در شرط زیر صدق می‌کنند یعنی

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$$

توجه کنید از این به بعد تکرار اندیس یعنی جمع روی آن اندیس

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} \equiv a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$$

اثبات: قبلاً دیدیم که

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$$

$$a_{ij} a_{ik} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \delta_{jk}$$

توجه شود که مبنا فرض شده که عناصر بردار غیر صفر هستند یعنی $x_i \neq 0$

مفهوم برداری: دارای اندازه و جهت دارد : تنها اندازه و جهت کافی نیست.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

1.3 Scalar or Dot-Product

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = |\bar{A}||\bar{B}|\cos\alpha = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad *$$

* Invariance of Scalar Product under Rotation : دیدیم که اسکالرها مقادیری‌اند که تحت دوران ناوردااند

$$\vec{A},\vec{B} \xrightarrow{\text{Rotation}} \vec{A}',\vec{B}'$$

$$C \equiv \vec{A}\cdot\vec{B} \longrightarrow C' = \vec{A}'\cdot\vec{B}'$$

اگر $\bar{A}\cdot\bar{B}$ اسکالر باشد باید $C=C'$ باشد

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = A_iB_i$$

$$\bar{A}'\cdot\bar{B}' = A_i'B_i'$$

$$A_i' = \sum a_{ij}A_i$$

$$\vec{A}'\cdot\vec{B}' = A_x'B_x' + A_y'B_y' + A_z'B_z' = \Big(\sum_i a_{xi}A_i\Big)\Big(\sum_j a_{xj}B_j\Big)$$
$$+\Big(\sum_i a_{yi}A_i\Big)\Big(\sum_j a_{yj}B_j\Big)$$
$$+\Big(\sum_i a_{zi}A_i\Big)\Big(\sum_j a_{zj}B_j\Big)$$

$$\sum_k A_k'B_k' = \sum_l \sum_i \sum_j a_{li}A_i\,a_{lj}B_j$$

$$= \sum_l \sum_i \sum_j a_{li}a_{lj}\;A_iB_j$$

$$= \sum_{ij}\delta_{ij}A_iB_j = \sum_i A_iB_i$$

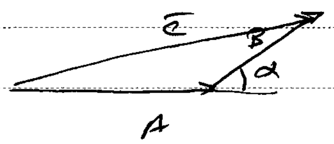
$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

$|C| = ? \longrightarrow \quad \bar{C} \cdot \bar{C} = |C|^2 \cos\alpha = |C|^2$

$\bar{C} \cdot \bar{C} = (\bar{A} + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$

$= \bar{A} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{B} + 2\bar{A} \cdot \bar{B}$

$= A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha$



(۹)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

1.4: Vector or Cross Product

* قبلاً Angular momentum

$\vec{J} = \bar{r} \times \vec{p}$

$\vec{\tau} = \bar{r} \times \vec{F}$

$\bar{C} \equiv \bar{A} \times \bar{B} \longrightarrow |C| = |A||B| \sin\alpha$

برخلاف قبلی اینجا یک کمیت برداری با محوریت $\bar{A}$ و $\bar{B}$ در تعریف می‌کنیم $\quad \bar{A} \times \bar{B} = -\bar{B} \times A$

* چرا از قانون دست راست به جای چپ

چون قانون دست راست را بر آن گذاشتیم قرارداد است

$\bar{A} \times \bar{B} = -\bar{B} \times \bar{A}$

$\bar{i} \cdot \hat{i} = 1$

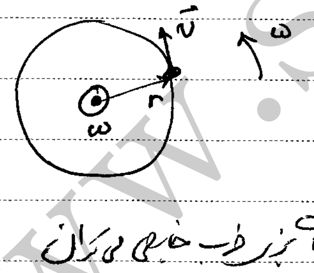
$i \times \hat{i} = 0$

$\bar{i} \times \hat{j} = \hat{k}$

$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$

$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ tangential velocity. *



با توجه به انتخاب اندیس (i,j,k) و همچنین قانون دست راست ضرب خارجی می‌توان $A \times B$ را به صورت زیر نوشت

$$\bar{C} = \bar{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$ *

* در دستگاه چرخیده چطور است؟ آیا می‌توانیم ضرب خارجی بردارها را بنویسیم؟

$\bar{C} = \bar{A} \times \vec{B}$

$$C_i' = A_j' B_k' - A_k' B_j' = \sum_l a_{jl} A_l \sum_m a_{km} B_m - \sum_l a_{kl} A_l \sum_m a_{jm} B_m$$

در زیر k ترکیب خطی دارند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$C'_i = \sum_{lm} (a_{jl} a_{km} - a_{kl} a_{jm}) A_l B_m$$

اما تکلیف جهت بردار از نظر جهت؟ :

① می‌دانیم که داریم $\sum_i a_{ik} a_{il} = \delta_{kl}$ پس اگر $m = l$ باشد بر حسب تعریف حاصل صفر است.
(برای هر دو ابهام جمع)

② اگر i مشخص شد پس j و k نیز به ترتیب چرخشی مشخص خواهند شد پس برای مثال اگر $i=3$ پس
$j=1$ و $k=2$ است پس حالات غیر صفر برابرند با:

$$\underset{k=2}{j=1} \rightarrow \underset{m=2}{l=1}\; a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = a_{33}$$

$$\underset{m=1}{l=3} \rightarrow a_{13} a_{21} - a_{23} a_{11} = a_{32}$$

$$\underset{m=3}{l=2} \rightarrow a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13} = a_{31}$$

$$C'_3 = a_{33} A_1 B_2 + a_{32} A_3 B_1 + a_{31} A_2 B_3$$

یعنی

$$C'_i = \sum_j a_{ij} C_j$$

$$C'_3 = a_{31} C_1 + a_{32} C_2 + a_{33} C_3$$

پس بردار است.

③ اینکه چرا طرف راست معادلات بالا از آن چه آمده توجه کنید مستقل از عبارات فوق به صورت مستقیم قابل بررسی هستند

$$C'_i = \sum_{lm} (a_{jl} a_{km} - a_{kl} a_{jm}) A_l B_m$$

را فراهم و بررسی می‌کنیم.

حالت ها

① اگر $m=l$ باشد به ازای هر l که در طرف چپ تکرار شده بنا به تقارن در عبارت

$$\sum_{lm} a_{jl} a_{kl} - \sum_{lm} a_{kl} a_{jl}$$

$$\sum_{l} \delta_{jk} - \sum_{l} \delta_{jk} = 0$$

② اگر j تکرار شده k در قسمت دوم جمع صورت حذف انتخاب شود یعنی اگر $j=3$ باشد یا $j=1$ ، $k=2$

پس حالت غیر صفر بودن حاصل عبارت است از:

$$C'_3 = \sum_{l \neq m} (a_{1l} a_{2m} - a_{2l} a_{1m}) A_l B_m$$

$l=1,\ m=2$

$$= (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) A_1 B_2 + (a_{12} a_{21} - a_{22} a_{11}) A_2 B_1$$

$l=2,\ m=3$

$$+ (a_{12} a_{23} - a_{21} a_{13}) A_2 B_3 + (a_{13} a_{22} - a_{23} a_{12}) A_3 B_2$$

$l=3,\ m=1$

$$+ (a_{13} a_{21} - a_{23} a_{11}) A_3 B_1 + (a_{11} a_{23} - a_{21} a_{13}) A_1 B_3$$

$$= a_{33} [A_1 B_2 - A_2 B_1] + a_{31} [A_2 B_3 - A_3 B_2] + a_{32} [A_3 B_1 - A_1 B_3]$$

$$C'_3 = \sum_{f} a_{3f} C_f$$

پس برابرند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

1.5) Triple Scalar and vector Products

می‌توان به طریق مستقیم نشان داد که داریم

$$A\cdot(B\times C) = -B\cdot(A\times C) = \bar{B}\cdot(C\times A)$$ *

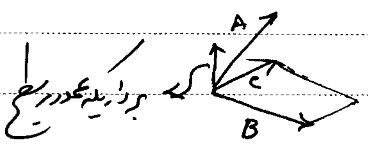
$$= -\bar{C}\cdot B\times A$$

مثل هم با کردن و به طور ترتیبی است .

$$\bar{A}\cdot(\bar{B}\times\bar{C}) \equiv \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

* برای سادگی و برای اینکه بتوان به خاطر سپرد به صورت روبرو می‌نویسیم

** مفهوم مساحت



$|\bar{B}\times\bar{C}| =$ مساحت قاعده

ارتفاع × مساحت قاعده

بردار یکه عمود بر مساحت

ارتفاع $= A\cdot$ Unit vector perpendicular to surface

بردار یکه عمود بر سطح $= \dfrac{\bar{B}\times\bar{C}}{|\bar{B}\times\bar{C}|} =$

* "Reciprocal lattice" ← وقتی که یک شبکه داریم که طول یکه‌های آن a,b,c شکل می‌شود

هر جهتی از نقطه‌ای شبکه ، نقطه دیگر به صورت

$$\vec{r} = n_a\vec{a} + n_b\vec{b} + n_c\vec{c}$$

شکل باید به تعریف شبکه وارون را انجام دهیم

$$\bar{a}' = \frac{b\times c}{a\cdot b\times c}, \quad b' = \frac{c\times \bar{a}}{\bar{a}\cdot b\times c}, \quad c' = \frac{a\times b}{\bar{a}\cdot b\times c}$$

که

$$a'\cdot\bar{a} = b'\cdot b = c'\cdot c = 1$$

$a'\cdot\bar{a} = 2\pi$ در حقیقت هیچ کدام با تناوب بردار انتقال شبکه اصلی داریم یعنی

$$e^{i a'\cdot r} = e^{i a'\cdot a}\, e^{i a'\cdot R} \qquad r = \bar{a} + \bar{R}$$

$$= 1\, e^{i a'\cdot R}$$

* به اندازه بردار انتقال شبکه جلو برویم 2π اختلاف فاز پیدا خواهد کرد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حجم شبکه وارون

$$\frac{(2\pi)^3}{V^3}$$

$$A \times B \times C = \bar{B}(\bar{A}\cdot\bar{C}) - \bar{C}(\bar{A}\cdot\bar{B})$$ *

$$(A \times B)^2 = A^2 B^2 - (\bar{A}\cdot\bar{B})^2$$

* از روش جبری این را نشان دهید.

بردار شبکه وارون

$$e^{iK\cdot R}$$

$$\bar{K} = 2\pi(n_a'\bar{a}' + n_b'\bar{b}' + n_c'\bar{c}')$$

$$R = n_a\bar{a} + n_b\bar{b} + n_c\bar{c}$$

$$\bar{K}\cdot R = 2\pi(n_a n_a' \underbrace{a'\cdot a}_{1} + n_a' \underbrace{a'\cdot b}_{0} + \cdots)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

1.6: Gradient, $\vec{\nabla}$

* کمیت دیگری که مهم است کمیت دیفرانسیلی که خاصیت برداری دارد در حقیقت یک عملگر خواهد بود و به تنهایی معنا ندارد.

* برای فهم این موضوع دیفرانسیل کامل یک تابع چند متغیره را در نظر بگیرید.

$F(x,y)$

که x و y متغیرهای مستقل هستند

حال تغییرات x و y چه اثری بر روی F خواهد داشت:

$$\begin{cases} x \longrightarrow x+\Delta x \\ y \longrightarrow y+\Delta y \end{cases} \longrightarrow \vec{F} \longrightarrow F+\Delta F \quad , \quad \Delta F = ?$$

$$F(x,y) \longrightarrow F(x+\Delta x, y+\Delta y) = F(x,y)+\Delta F$$

در واقع می‌گوییم که تحول عبارت بالا از شد

$$\Delta F = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y)$$

$$= \underbrace{\left[F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y)\right]}_{\Delta F^{(x)}|_{y=fixe}} + \underbrace{\left[F(x, y+\Delta y) - F(x,y)\right]}_{\Delta F^{(y)}|_{x=fix}}$$

تغییرات ΔF که به سبب تغییرات x رخ داده

تغییرات ΔF که به سبب تغییرات در y رخ داده

تمرین: چون x و y مستقل هستند می‌توان عبارت بالا را نوشت. اگر مستقل از هم نبودند باید جملات دیگری هم داشتیم که گروه اینها را نشان دهند البته پیوستگی f هم شرط است.

تمرین برای حالتی که x و y مستقل از هم نیستند عبارت بالا را بنویسید.

$$(\Delta F)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y$$ جواب

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y$$ پس

$$d\varphi(x,y,z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$$ در سه بعد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

[illegible]

* حال فرض کنید که $\varphi(x,y,z)=\varphi(x_1,x_2,x_3)$ یک اسکالر خوش تعریف باشد یعنی

در دستگاه چرخیده مقدارش تغییر نکند یعنی

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\varphi'(x'_1,x'_2,x'_3)$$

حال دیفرانسیل می‌گیریم

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'_i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x'_i}=\cancel{\sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial x'_i}\frac{\partial x_j}{\partial x_j}}$$

با مشتق زنجیری داریم $=\sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x'_i}=\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}=\sum a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$

$$\downarrow$$

$$a_{ij}=\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}=\frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$$

این شبه بردار نیست بلکه یک بردار است حال تعریف می‌کنیم

$$\vec\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\hat i+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\hat j+\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\hat k$$

$$\vec\nabla\equiv\frac{\partial}{\partial x}\hat i+\frac{\partial}{\partial y}\hat j+\frac{\partial}{\partial z}\hat k$$

** مفهوم فیزیکی ① تغییرات یک میدان در راستای خاص در نقطه.

$$d\varphi\big|_A=\vec\nabla\varphi\cdot\frac{\vec A}{|\vec A|}$$

در راستای بردار A

• یعنی تغییرات میدان در نقطه را در راستای $\hat i$ و $\hat j$ و $\hat k$ داریم حال؛ خب راحتی که مفهوم گرادیان را می‌دهد تغییرات را داریم.

• در واقع عمود بر سطح هم‌پتانسیل یعنی سطوحی که روی آنها حرکت کنیم و پتانسیل عوض نشود یعنی

$$d\varphi\big|_A=0\ \longrightarrow\ \vec\nabla\varphi\cdot\frac{\vec A}{|\vec A|}=0$$

حال اگر بپذیریم که $\vec\nabla\varphi$ ها میدان باشند پس تمام صفحاتی که عمود بر $\vec\nabla\varphi$ باشند مورد توجه هستند.

• مفهوم میدان پایستار

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi$$

آب از پتانسیل بیشتر به سمت پتانسیل کمتر حرکت می‌کند.

توضیح ذهنی در میدان گرانشی F از پتانسیل بیشتر به سمت پتانسیل کمتر است پس

$\varphi(x+\Delta x) > \varphi(x)$

$$\longrightarrow \Delta\varphi = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$$

$\vec{\nabla}\varphi$ جهتش در راستای افزایش تابع در مختصات است x, y, z

در صورتی که F جهتش برخلاف x, y, z است ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~.

پس علامت منفی می‌آوریم.

$$Ex: \int \vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{\nabla} f(\vec{r})\, d^3r \overset{?}{=} -\int f(r)\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(r)\, d^3r$$

$\vec{A}(r)$, $f(r)$ در بی‌نهایت صفر می‌شوند.

$$\Rightarrow \int \vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{\nabla} f(\vec{r})\, d^3r = \iint \left[A_x f \Big|_{x=-\infty}^{+\infty} - \int f \frac{\partial A_x}{\partial x}\, dx \right] dy\,dz + \dots$$

$$= -\iiint f \frac{\partial A_x}{\partial x}\, dx\,dy\,dz - \int f \frac{\partial A_y}{\partial y}\, dx\,dy\,dz - \dots$$

$$= -\int f(\vec{r})\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, d^3r$$

1.7: Divergence, $\vec{\nabla}$

* دیفرانسیل گیری از کمیت برداری مانند دیفرانسیل گیری از کمیت اسکالر است

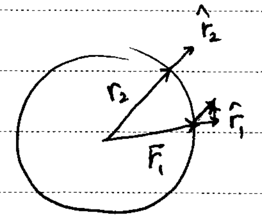
* قبل از این این کار را بارها در دینامیک دیده‌ایم مثال:

$\vec{r}(t) \rightarrow$ بردار مکان جسم

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \vec{V}$$

نکته‌ای باید مد نظر گرفت این است که بردار هم جهت دارد و هم مقدار بنابراین دیفرانسیل گیری باید با دقت بیشتری همراه باشد. برای یادآوری

در حرکت دایره‌ای در دستگاه قطبی



$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \hat{r}\frac{dr}{dt} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \hat{\theta}\omega$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\dot{r}\hat{r}}_{\text{سرعت شعاعی}} + \underbrace{r\omega\hat{\theta}}_{\text{سرعت مماسی}}$$

\# تمرین: $\vec{a}$ را در حالت کلی محاسبه کنید.

• اگر عملگر $\vec{\nabla}$ بتوان دیفرانسیل گیری از یک کمیت برداری به صورت زیر تعریف کنیم یعنی

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \rightarrow \text{The so-called Divergence of } \vec{V}$$

Ex: $\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = ? \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right)$

$$= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3$ واگرایی بردار مکان

Ex: $\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}f(r)) = \frac{\partial}{\partial x}(xf(r)) + \frac{\partial}{\partial y}(yf(r)) + \frac{\partial}{\partial z}(zf(r))$

$$= 3f(r) + x\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$= 3f(r) + \frac{x^2}{r}\frac{df}{dr} + \frac{y^2}{r}\frac{df}{dr} + \frac{z^2}{r}\frac{df}{dr} = 3f(r) + r\frac{df}{dr}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Ex: prove:

$$\int f(\vec r)\,\vec\nabla\cdot\vec A\; d^3r \overset{?}{=} -\int \vec A\cdot\vec\nabla f\, d^3r$$

طرف چپ را باز می‌کنیم و طبق انتگرال جزء به جزء جواب به دست می‌آید.

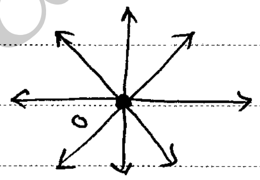
$$\int f(r)\,\vec\nabla\cdot\vec A\; d^3r = f(r)\left(A_x + A_y + A_z\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int \vec A\cdot\vec\nabla f\; d^3r$$

$$= -\int \vec A\cdot\vec\nabla f\; d^3r$$

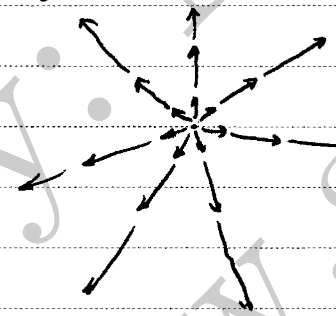
physical interpretation

برای پیدا کردن احساس درمورد مفهوم دیورژانس، به میدان‌های زیر توجه کنید

① $\vec A = r\hat r$ $\qquad \vec\nabla\cdot\vec A = 3$



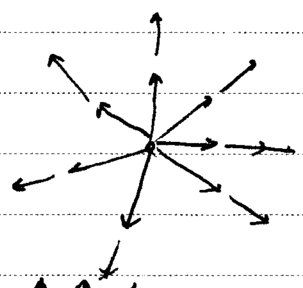
هرچه از ۰ دورتر می‌شویم شدت میدان زیاد می‌شود توجه کنید شکل بالا به صورت



زیرا: یعنی هم بردارها مقدارشان زیاد می‌شود
و پراکندگی زیاد می‌شود.

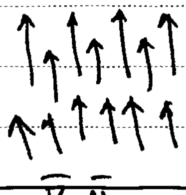
② $\vec B = \dfrac{\vec r}{r^2} \longrightarrow \vec\nabla\cdot\dfrac{\vec r}{r^2} = 0$ except for $r=0$

یعنی با فاصله گرفتن از مبدا مقدار کم می‌شود ولی پراکندگی زیاد می‌شود
و این دو اثر همدیگر را طوری خنثی می‌کنند که $\vec\nabla\cdot\dfrac{\vec r}{r^2}$ صفر می‌شود



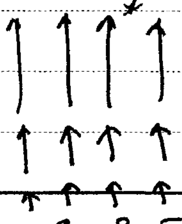
شکل

③



$\vec\nabla\cdot\vec v = 0$

④



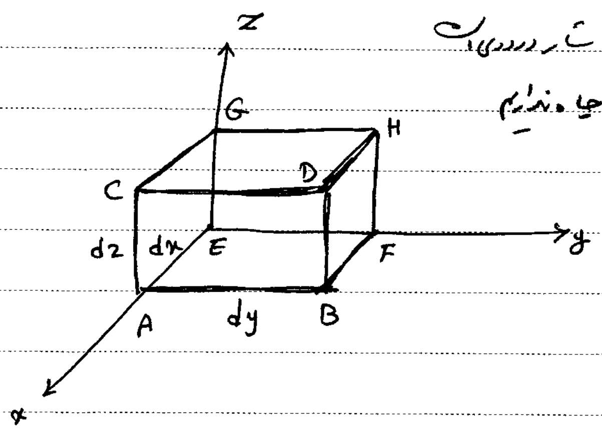
$\vec\nabla\cdot\vec v \neq 0$

تغییرات نقطه به نقطه بردارها با $\vec\nabla\cdot$ مشخص می‌شود.

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

• فرض کنید در یک نقطه یک جریان جرم با چگالی ρ و سرعت $\bar{v}$ وجود دارد. می‌خواهیم میزان خالص شار جرم خروجی از

حجم dV چقدر است؟ که برابر منفی میزان خالص شار ورودی است
یعنی تولید جرم در حجم نداریم



آهنگ جریان ورودی از وجه EFGH در راستای x $= \left.\dfrac{dm}{dt}\right|_x = \rho(x,y,z)\,dy\,dz\,\dfrac{dx}{dt} = \rho(x,y,z)\,dy\,dz\,v_x$

آهنگ جریان خروجی از وجه ABDC $= \left.\dfrac{dm}{dt}\right|_{x+\Delta x} = \rho(x+\Delta x,y,z)\,dy\,dz\;v_x(x+\Delta x,y,z)$

دقت کنید که رسم از وجه ... یعنی در راستای
محور به وجه آهنگش را می‌خواهیم

میزان خالص جریان خروجی در راستای x $= \left.\dfrac{dm}{dt}\right|_{ABDC} - \left.\dfrac{dm}{dt}\right|_{EFGH} = -($ میزان جریان خالص ورودی در راستای x $) = \left.\dfrac{dm}{dt}\right|_{EFGH} - \left.\dfrac{dm}{dt}\right|_{ABCD}$

$$= \rho(x+\Delta x,y,z)\,v_x(x+\Delta x,y,z)\,dy\,dz - \rho(x,y,z)\,v_x\,dy\,dz$$

$$= \left(\left[\rho(x,y,z) + \frac{\partial \rho}{\partial x}dx\right]\left[v_x(x,y,z) + \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right]dy\,dz - \rho v_x\,dy\,dz\right)$$

$$= \cancel{\rho v_x\,dy\,dz} + \frac{\partial \rho}{\partial x}v_x\,dV + \rho\frac{\partial v_x}{\partial x}dV + O(2) - \cancel{\rho v_x\,dy\,dz}$$

$$\simeq \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\,dV$$

حال روی تمام جهات جمع می‌بندیم

خالص خروجی از حجم $\dfrac{dm}{dt} = \bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{v})\,dV$

خروجی $\dfrac{d\rho}{dt} = \bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{v}) = -\left.\dfrac{d\rho}{dt}\right|_{inside}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله پیوستگی

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{جریان ورودی}} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{U}) = 0$$

جریان خروجی باعث کاهش چگالی در حجم می‌باشد.

(6)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

1.8 $\vec{\nabla}\times$ Curl

• کمیت برداری که تابع برداری است

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

• نکته مهم $\vec{\nabla}$ یک عملگر است پس نمی توان نوشت

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = -\vec{V}\times\vec{\nabla}$$

زیرا سمت چپ $\vec{\nabla}$ بر $\vec{V}$ عمل می کند در حالی که سمت راست چنین نیست.

• $$\vec{\nabla}\times(f\vec{V}) = f\,\vec{\nabla}\times\vec{V} + \vec{\nabla}f\times\vec{V}$$

• عبارت زیر را حساب کنید:

$$\vec{\nabla}\times\vec{r}f(r) = f(r)\,\vec{\nabla}\times\vec{r} + \vec{\nabla}f\times\vec{r}$$

چون f فقط تابعی از r است پس

$$\vec{\nabla}f = \hat{r}\frac{df}{dr}$$

و

$$\vec{\nabla}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

پس

$$\vec{\nabla}\times\vec{r}f(r) = f\,\vec{\nabla}\times\vec{r} + \frac{df}{dr}\,\hat{r}\times\vec{r}$$

• مفهوم چرخش در تعریف $\vec{\nabla}\times$: فرض کنید جسم در صفحه xy حول محور z در حال چرخش است (چرخش دارد)

سرعت های خطی برابر است:

$$\vec{U} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

حال کنید $\vec{\nabla}\times\vec{U} = ?$ پس

$$\vec{\nabla}\times\vec{U} = \vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$= \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{r})\vec{\omega}}_{\text{روی هر دو عمل می کند}} - \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega})\vec{r}}_{\text{روی هر دو عمل می کند}}$$

$$= \vec{\omega}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{r} + (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} - \vec{r}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{r}$$

$$= 3\omega + 0 - 0 - \omega = 2\omega$$

بعداً در جای خود جواب تصحیح

Helmholtz
طبق قضیه هلمهولتز هر میدان برداری را می توان به دو بخش تجزیه کرد

$$\vec{A} = -\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\times B$$

بخش بی چرخش / بخش بدون واگرایی

• اگر $\nabla \times \bar{v} = 0$ گوییم "irrotational" عدم چرخشی.

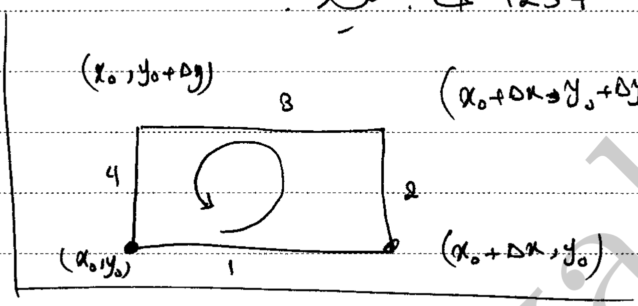
مثلاً

$$\bar{V} = c\frac{\hat{r}}{r^2} = c\frac{\bar{r}}{r^3}$$

که $\bar{V}$ نمادی از میدان گرانشی یا میدان الکترواستاتیک است.

$$\nabla \times \bar{V} = 0$$

• مثال: چرخش میدان $\bar{V}$ را در ناحیه "1234" حساب کنید.



$$\text{Circulation } 1234 = \int_1 V_x(x,y)\,dx + \int_2 V_y(x,y)\,dy + \int_3 V_x(x,y)\,dx + \int_4 V_y(x,y)\,dy$$

ادامه: نقطه $(x_0+\Delta x, y_0)$ را بسط تیلور میدهیم V_y ...

$$\text{چرخش }(V) = \underbrace{V_x(x_0,y_0)\,dx}_{1} + \underbrace{\left[V_y(x_0,y_0) + \frac{\partial V_y}{\partial x}dx\right]dy}_{2} + \underbrace{\left[V_x(x_0,y_0) + \frac{\partial V_x}{\partial y}dy\right](-dx)}_{3} + \underbrace{V_y(x_0,y_0)(-dy)}_{4}$$

$$= \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$\text{چرخش }(V) \text{ در واحد سطح} = \nabla \times \bar{V}\Big|_z$$

Ex: $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \overset{?}{=} (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

$\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B})}_{\text{روی A و B اثر میگذارد}}$

$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B})}_{\text{فقط روی B}} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})B$

$\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{B}\cdot\vec{A})}_{\text{فقط روی A}} - (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

ولی

$\vec{\nabla}(A\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

Solenoidal and irrotational field.

سیم لوله ای $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ غیرچرخشی $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$

$\downarrow$

Transvers wave Longitudinal wave.

$B \sim e^{i\vec{k}\cdot r} \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \underbrace{\vec{K}\cdot\vec{B}}_{\text{عرضی}} = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \underbrace{\vec{K}\times E}_{\text{طولی}} = 0$

K بردار موج در راستای انتشار موج

Ex. گشتاور مغناطیسی وارد بر یک حلقه حامل جریان که در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار گرفته را حساب کنید.

- می‌دانیم سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی خارجی نیرو احساس می‌کند یعنی

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}_{ext}$$

- حال اگر بخواهیم گشتاور را حساب کنیم داریم

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

$\vec{r}$ بردار مکان نقطه اثر نیرو تا محور دوران است

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times [I\, d\vec{l} \times \vec{B}_{ext}]$$

- کل گشتاور برابر است با:

$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \oint \vec{r} \times [I\, d\vec{l} \times \vec{B}_{ext}]$$

loop ← حلقه بسته حامل جریان در میدان مغناطیسی خارجی

حال می‌خواهیم انتگرال بالا را حساب کنیم می‌دانیم که

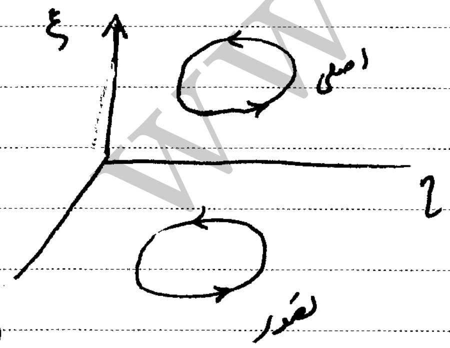
$$dl \times \vec{B} = \hat{i}(dy B_z - dz B_y) + \hat{j}(dz B_x - dx B_z) + \hat{k}(dx B_y - dy B_x)$$

$$\{\vec{r} \times [dl \times \vec{B}]\}_x = y(dx B_y - dy B_x) - z(dz B_x - dx B_z)$$

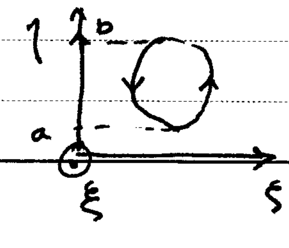
چون فرض شده که B در سرتاسر منطقه‌ای که حلقه حامل جریان وجود دارد یکنواخت است پس B I با انتگرال‌هایی از شکل

$$\oint \xi d\xi \quad , \quad \oint \xi d\eta \qquad (\xi, \eta) : (x, y, z)$$

سروکار داریم. انتگرال $\oint \xi d\xi = 0$ اما در مورد انتگرال‌هایی از جنس $\oint \xi d\eta$ چه می‌توان گفت؟



تصویر حلقه را داریم می‌خواهیم روی این حلقه که در بالا نشان داده شده عبارت $\oint \xi d\eta$ را حساب کنیم. توجه کنید که انتگرال در رابطه با (ξ, η) است پس با تصویر حلقه روی صفحه $(\xi - \eta)$ کار می‌کنیم. یعنی



Subject:
Year. Month. Date. ( )

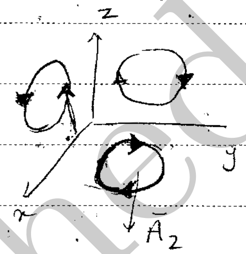
$$\oint \xi \, d\eta = \int_a^b \xi_1 \, d\eta + \int_b^a \xi_2 \, d\eta$$

$$= A_\xi$$

$$\tau_x = I \oint_c \left[\bar{r} \times d\bar{l} \times \bar{B}_{ext}\right] = I \oint_c B_y \, y \, dx$$

$$- I \oint B_x \, y \, dy - I \oint_c z \, dz \, B_x + I \oint z \, dx \, B_z$$

$$= I \left[B_y \oint y \, dx + B_z \oint z \, dx\right]$$



$$\oint z \, dx = A_y \quad , \quad \oint y \, dx = -A_z$$

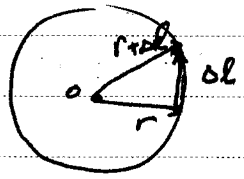
$$\int x \, dy = A_z \qquad \int y \, dz = A_x \qquad \int z \, dy = -A_x$$

$$\vec{\tau} = I \vec{A} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\vec{m} = I \vec{A} \qquad \text{Magnetic Moment}$$

اثبات کنید

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{l}$$



(۳)

$$\Box = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$

Subject: Dalembert
Year. Month. Date. ( )

1.9: Successive applications of $\vec{\nabla}$

① $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \equiv \nabla^2\varphi$$ laplacian

if $\nabla^2\varphi = 0$ → laplace Eq.

پایستار ② $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = 0$

[illegible] ③ $\vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \checkmark$

بی‌چشمه ④ $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{V} = 0$

⑤ $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$

---

* Electromagnetic Wave Equation

Maxwell Eqs. $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ تک قطبی مغناطیسی نداریم

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0 = 0$ وقتی چشمه نباشد

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0\vec{J}$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

می‌خواهیم که از مهم‌ترین پیامدهای معادلات ماکسول که به معادلات انتشار امواج الکترومغناطیسی منجر شد برسیم.

بنابراین توجه کنید که

$$\bar\nabla\times\bar B = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 \vec J$$

از مشتق زمانی می‌گیریم

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec\nabla\times\vec B = \bar\nabla\times\frac{\partial \bar B}{\partial t} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_0\frac{\partial \bar J}{\partial t}$$

$$= \bar\nabla\times\left(-\bar\nabla\times\bar E\right) = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_0\frac{\partial \bar J}{\partial t}$$

حالا کلی

$$\bar\nabla\times\bar\nabla\times\bar E = \bar\nabla(\bar\nabla\cdot\bar E) - (\bar\nabla\cdot\bar\nabla)\bar E$$

$$= \bar\nabla\left(\frac{\rho}{\epsilon_0}\right) - (\bar\nabla\cdot\bar\nabla)\bar E$$

حال اگر $\rho = 0$ و μ یعنی فضای تهی بدون چشمه پس

$$(\bar\nabla\cdot\bar\nabla)\bar E = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec E - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

می‌خواهیم $E(\bar r,t)=?$ را بدست بیاوریم فرض کنیم که $\bar E(\bar r,t) = \bar E(r)e^{-i\omega t}$

پس

$$e^{-i\omega t}\nabla^2\bar E(r) - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}e^{-i\omega t}\bar E(\bar r) = 0$$

$$e^{-i\omega t}\nabla^2\bar E(r) - \epsilon_0\mu_0\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(-i\omega e^{-i\omega t}\bar E(\bar r)\right)\right\} = 0$$

$$e^{-i\omega t}\left[\bar\nabla\bar E(r) - \epsilon_0\mu_0\,\omega^2\bar E(\bar r)\right] = 0$$

$$\bar\nabla\bar E(r) - \frac{\omega^2}{c^2}\bar E(r) = 0$$

فرض کنید $E(r) = E(x)$ باشد α

$$\frac{d^2E}{dx^2} - \frac{\omega^2}{c^2}E(x) = 0$$

جواب صحیح پس

$$E(x) = Ee^{ikx}$$

که

$$K = \omega/c$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

وقتی به سمت چپ

$$\bar{E}(\bar{r},t) = E_0 \cos(\omega t \pm Kx)$$

وقتی به سمت راست

پس انتشار موج به سرعت c

وقتی $J \neq 0$ پس یعنی چشمه داریم
$\rho \neq 0$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \rho/\epsilon_0$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{B} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

اکنون کمک می‌گیریم از عبارت
تعریف کرده‌ایم $\bar{B} = \bar{\nabla}\times A$ پس

$$\nabla\times E = -\frac{\partial}{\partial t}\bar{\nabla}\times\bar{A}$$

$$\nabla\times\left(\bar{E} + \frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right) = 0 \longrightarrow \bar{\nabla}\times\nabla\varphi = 0 \rightarrow \bar{E} + \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\varphi$$

یعنی

$$\boxed{\bar{E} = -\bar{\nabla}\varphi - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t}}$$

$$\boxed{B = \bar{\nabla}\times A}$$

با این عبارت

$$\bar{\nabla}\cdot E = \rho/\epsilon_0 \rightarrow \rho/\epsilon_0 = \bar{\nabla}\cdot\left(-\bar{\nabla}\varphi - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right)$$

$$\rho/\epsilon_0 = -\nabla^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\bar{\nabla}\cdot A$$

از سوی دیگر داریم:

$$\bar{\nabla}\times\bar{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\bar{E} + \mu_0\bar{J}$$

$$\bar{\nabla}\times(\nabla\times A) = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\bar{\nabla}\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}\right) + \mu_0\bar{J}$$

$$-\nabla^2\vec{A} + \bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \epsilon_0\mu_0\bar{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mu_0\vec{J}$$

$$-\nabla^2\bar{A} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \bar{\nabla}\left(\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot A\right) = \mu_0\vec{J}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال اگر اینطور بگیریم:

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{A}+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \longrightarrow \text{lorantz gauge}$$

داریم

$$\boxed{\nabla^2\bar{A}-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=\mu_0\vec{J}}$$

معادله مربوط به φ هم بدست:

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E}=\rho/\epsilon_0$$

$$\bar{\nabla}\cdot\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial A}{\partial t}\right)=\rho/\epsilon_0$$

$$-\nabla^2\varphi-\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\bar{\nabla}\cdot\bar{A}}_{\text{از پیمانه لورنتس داریم}}=\rho/\epsilon_0$$

φ را با هم مقایسه کنیم

$$\bar{\nabla}\cdot A=-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\bar{\nabla}\cdot\bar{A}=-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

داریم

$$\boxed{\nabla^2\varphi-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\rho/\epsilon_0}$$

در پیمانه لورنتس A و φ در یک معادله موج، ناهمگن یکسان صدق می‌کنند

• مفهوم پیمانه: آزادی عمل داریم که شرایط فیزیکی را تغییر نمی‌دهند E و B که مشاهده‌پذیر یعنی نهایتاً هر A و φ را انتخاب می‌کنیم با این شرط $\bar{E}$ و $\bar{B}$ سازگار باشند. حال نکته این است که با داشتن E و B منحصر به فرد پیمانه لورنتس به A و φ منتهی می‌شویم. حال اگر φ و A دیگری داشته باشیم که به همان E و B منجر شوند از آنها یکی در همان پیمانه است که کار می‌کنیم صدق کنند یعنی

$$\bar{\nabla}\cdot A+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} A'=A+\nabla\xi \\ \varphi'=\varphi-\partial\xi/\partial t \end{array}\right\} \longrightarrow \text{تبدیلات پیمانه } E \text{ و } B \text{ منجر شوند}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

1.10 : Vector Integration

• در بخش قبل عملگرهای دیفرانسیلی را بررسی کردیم $\vec\nabla$, $\vec\nabla\cdot$, $\vec\nabla\times$

• در این بخش از منظر برداری، انتگرال‌ها را بررسی می‌کنیم. از انتگرال‌گیری روی خط شروع می‌کنیم تا به حجم برسیم.

* line Integrels

Define: $d\vec r = \hat i\,dx + \hat j\,dy + \hat k\,dz$

تعریف می‌کنیم:

Ⓐ $\int_c \varphi\, d\vec r$

Ⓑ $\int_c \vec V\cdot d\vec r$

Ⓒ $\int_c \vec V\times d\vec r$

c در حقیقت مسیر انتگرال‌گیری است. به طور کلی می‌تواند هر شکلی داشته باشد، باز یا بسته باشد.

Ⓐ $\rightarrow \int_c \varphi\, d\vec r = \int \varphi\, dx\, \hat i + \int \varphi\, dy\, \hat j + \int \varphi\, dz\, \hat k$

توجه کنید که عبارات بالا در حالت کلی به شکل φ وابسته بوده و به مسیر وابسته خواهند بود.

Ⓑ $\int_c \vec V\cdot d\vec r \longrightarrow \int_c \vec F\cdot d\vec r = W$ در مکانیک با آن برخورد کردیم.

گفتیم اگر $\vec F$ به مسیر بستگی نداشته باشد انتگرال، کار مستقل از مسیر شده و صرفاً به نقاط ابتدا و انتها بستگی خواهد داشت یعنی

$$\int_a^b \vec F\cdot dr = W(b) - W(a)$$

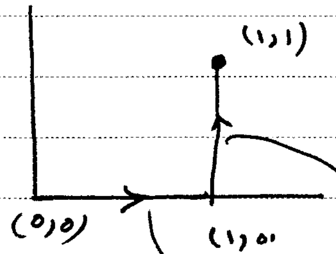
• مثال $\vec F = -y\,\hat i + x\,\hat j$ نسبت به مسیر از $(0,0)$ به $(1,1)$ می‌باشد.

$$W = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (-y\,dx + x\,dy)$$

$$= -\int_0^1 y\,dx + \int_0^1 x\,dy$$

توجه کنید هیچ یک از انتگرال‌ها، نتیجه تابعی از مسیر نیست چرا که نمی‌دانیم وقتی از $x=0$ به $x=1$ می‌رویم y

چگونه تغییر می‌کند و همچنین نمی‌توان مستقیماً انتگرال گرفت. برای حل این شکل مسیر زیر را انتخاب می‌کنیم



$$-\int_0^1 y\,dx = 0$$

$$\int_0^1 x\,dy = \int_0^1 1\,dy = y\Big|_0^1 = 1$$

اگر مسیر دیگری بیابیم W متفاوت خواهد بود پس F لزوماً اصطلاحاً پایستار نیست.

$\oint \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$ بعداً خواهیم دید که شرط پایستار بودن

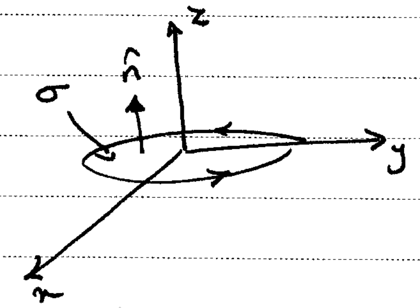
$$\int_s \vec{\nabla}\times\vec{F}\,ds = 0 \longrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$$

※ Surface Integral.

$$\int \varphi \, d\vec{\sigma}$$

[illegible] حاصل از سطح → $$\int \bar{V} \cdot d\bar{\sigma}$$

$$\int \bar{V} \times d\vec{\sigma}$$



※ Volume Integral.

$$\int \bar{V} \, d\tau = \hat{i} \int V_x \, d\tau + \hat{j} \int V_y \, d\tau + \hat{k} \int V_z \, d\tau$$

* Integral Definition of $\bar{\nabla}$, $\bar{\nabla}\cdot$ and $\bar{\nabla}\times$

یکی از کاربردهای شکل انتگرالی که در زیر می آید تعاریف آنها از عملگرهای دیفرانسیلی هستند. یعنی

$$\vec{\nabla}\varphi = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \varphi \, \vec{d\sigma}}{\int d\tau}$$

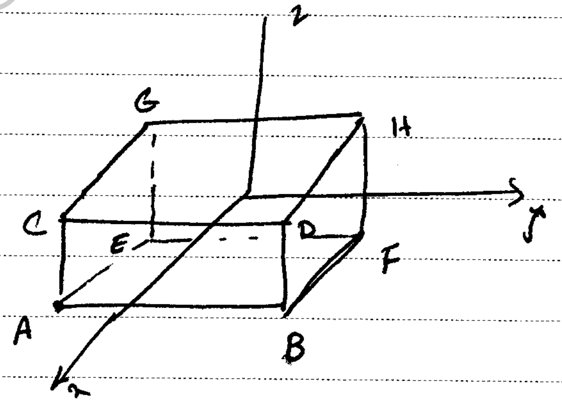
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \vec{V}\cdot \vec{d\sigma}}{\int d\tau}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \vec{d\sigma}\times\vec{V}}{\int d\tau}$$

توجه کنید $d\tau$ حجم دیفرانسیلی و $d\sigma$ سطح دیفرانسیلی که این حجم را در بر گرفته است و جهت بردار آن از درون حجم به بیرون حجم است.

اثبات

$$\vec{\nabla}\varphi = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \varphi \, \vec{d\sigma}}{\int d\tau}$$



$$\int \varphi \, \vec{d\sigma} = \hat{i}\int_{ABCD} \left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\,dz - \hat{i}\int_{EFHG} \left(\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\,dz$$

$$+ \hat{j}\int_{BFDH} \left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\,dz - \hat{j}\int \left(\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\,dz$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$+\hat{k}\int_{CDGH}\left(\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz/2\right)dx\,dy-\hat{k}\int_{ABEF}\left(\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz/2\right)dx\,dy$$

$$\int\varphi\,d\sigma=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}\right)\int dx\,dy\,dz$$

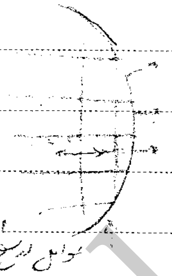
$$\vec{\nabla}\varphi=\lim_{\int d\tau\to 0}\frac{\int\varphi\,d\sigma}{\int d\tau}$$

1.11 Gauss' Theorem

$$\oiint \vec{V}\cdot\vec{d\sigma} = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{V}\,\vec{d\tau}$$

حسب تقیه

(1)
$$\oint_S \vec{V}\cdot\vec{d\sigma} = \int \vec{\nabla}\cdot\vec{V}\,d\tau$$



نواحی درونی خنثی می‌شوند

Green Theorem:

از هم کم کنیم. روی یک حجم انتگرال می‌گیریم

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot(u\vec{\nabla}v) = u\vec{\nabla}\cdot\nabla v + (\vec{\nabla}u)\cdot(\vec{\nabla}v) \\ \vec{\nabla}\cdot(v\vec{\nabla}u) = v\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u + (\vec{\nabla}v)\cdot(\vec{\nabla}u) \end{cases}$$

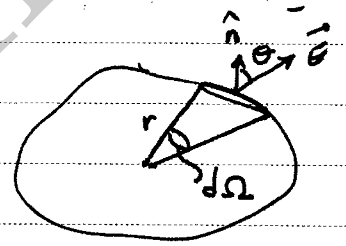
(2)
$$\int_\tau (u\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}v - v\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u)\,d\tau = \int_\tau [\vec{\nabla}\cdot(u\vec{\nabla}v) - \vec{\nabla}\cdot(v\vec{\nabla}u)]\,d\tau$$

$$= \int \vec{\nabla}\cdot[u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u]\,d\tau$$

$$= \oint (u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u)\cdot\vec{d\sigma}$$

کاربرد: در الکتریسیته

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{d\sigma} = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{d\sigma}$$



$$d\Omega = \frac{d\sigma\cos\theta}{r^2}$$

$$\vec{E}\cdot\vec{d\sigma} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\sigma\cos\theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}d\Omega$$ ص

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{d\sigma} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_\tau d\Omega = q/\epsilon_0$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\sigma = q/\epsilon_0$$ ص

$$\int_\tau \vec{\nabla}\cdot E\,d\tau = \int \frac{q\,d\tau}{\epsilon_0} \longrightarrow \int(\vec{\nabla}\cdot E - q/\epsilon_0)\,d\tau = 0$$

شکل دیفرانسیلی قانون گاوس $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = q/\epsilon_0}$ $-\nabla^2\varphi = q/\epsilon_0$ $\nabla^2\varphi = 0$

Laplace Eq.

ادامه صفحه بعد اینجا نوشته شود

حال اگر شرط مرزی را داشته باشیم

Cauchy BCs $\begin{cases} \varphi\big|_{\sigma} = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial n'}\Big|_{\sigma} = 0 \end{cases}$

حل

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|}\, d\tau \qquad \text{Coulomb's law}$$

if $\rho(r') = 0 \longrightarrow \nabla^2 \varphi = 0$

اگر $\phi\big|_{\sigma} = 0 \rightarrow$ Drichlet BC

اگر $\dfrac{\partial \phi}{\partial n}\Big|_{\sigma} = 0$ Neumam BC.

$$\phi(r) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|}\, d\tau'}_{\text{Coulomb's law}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \oint \overbrace{\frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial n}\, d\sigma'}^{\text{چگالی سطحی القا شده}} - \overbrace{\frac{1}{4\pi} \oint \phi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) d\sigma'}^{\text{لایه دو قطبی}}}_{\text{Contribution of induced charge or field on the Boundary}}$$

$D_n = \dfrac{\sigma}{\epsilon} =$

$D_n = -\dfrac{\sigma}{\epsilon} = \epsilon_0 E_n \Rightarrow E_n = -\dfrac{\sigma_n}{\epsilon} = -\dfrac{\partial \phi}{\partial n}$

$$\int \frac{\sigma_n}{4\pi\epsilon\, |r-r'|}\, d\sigma'$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Alternate form of Gauss theorm.

فرض کنید

$$\vec{V}(x,y,z) = V(x,y,z)\,\vec{a}$$

$\vec{a}$ یک بردار ثابت باشد

$$\oint_S \vec{V}\cdot d\vec{\sigma} = \int \vec{\nabla}\cdot\vec{V}\, d\tau$$

$$\vec{a}\cdot\oint V\, d\vec{\sigma} = \vec{a}\cdot\int_\tau \vec{\nabla} V\, d\tau$$

$$a\cdot\left[\oint_S V\, d\vec{\sigma} - \int_\tau \vec{\nabla} V\, d\tau\right] = 0$$

پس

$$\boxed{\oint_S V\, d\vec{\sigma} = \int \vec{\nabla} V\, d\tau}$$

یا در نظر بگیریم که $\vec{V} = \vec{a}\times\vec{P}$ پس

$$\oint_S \vec{V}\cdot d\vec{\sigma} = \int \vec{\nabla}\cdot\vec{V}\, d\tau$$

$$\oint_S \vec{a}\times\vec{P}\cdot d\vec{\sigma} = \int \vec{\nabla}\cdot(a\times P)\, d\tau$$

$\nabla\cdot(a\times P) =$
$-a\cdot\nabla\times P$

$$-\oint d\vec{\sigma}\times\vec{P}\cdot\vec{a} = -\int \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{P}\, d\tau$$

$$\oint_S d\vec{\sigma}\times\vec{P} = \int \vec{\nabla}\times\vec{P}\, d\tau$$

Kirchoff
Diffraction
Theory

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

کاربرد در الکترودینامیک :

Green's first Identity. (Gauss Theorem)

$$\oint_S \bar{A}\cdot d\bar{\sigma} = \int_\tau \bar{\nabla}\cdot A\, d\tau$$

Green's Second Identity

$$\oint (u\bar{\nabla}v - v\bar{\nabla}u)\cdot d\sigma = \int \bar{\nabla}\cdot[u\bar{\nabla}v - v\bar{\nabla}u]\, d\tau$$

فرض کنید که $\Psi \equiv v$

$\varphi \equiv u$ پتانسیل دیگری باشد

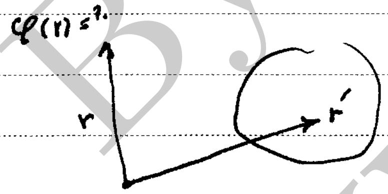
پس

$$\oint_S \varphi\bar{\nabla}\psi\cdot d\bar{\sigma} = \oint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}d\sigma$$

$$\oint \psi\bar{\nabla}\varphi\cdot d\bar{\sigma} = \oint_S \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma$$

پس

$$\oint\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma = \int\left[\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi\right]d\tau$$



حال فرض کنید که $\psi \equiv \dfrac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$

$\varphi =$ پتانسیل الکتریکی که باید حساب شود

$$\oint\left(\varphi(\bar{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|} - \frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\frac{\partial\varphi(r')}{\partial n'}\right)d\sigma' = \int\left(\varphi\nabla^2\frac{1}{|r-r'|} - \frac{\nabla^2\varphi}{|r-r'|}\right)d\tau$$

$$\oint\left(\varphi(r')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right)d\sigma = \int \varphi(r')(-4\pi)\delta(r-r')d\tau' + \int\frac{\rho}{\epsilon_0|r-r'|}d\tau$$

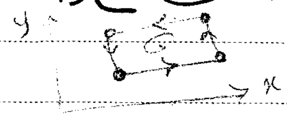
$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(r')}{|r-r'|}d\tau' + \frac{1}{4\pi}\oint\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n'} - \varphi\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{R}\right)d\sigma'$$

ادامه در صفحه مقابل

1.12: Stoke's Theorem.

• قضیه گوس ارتباط بین مشتق یک میدان در حجم را با انتگرال آن میدان بر سطح دربرگیرنده حجم را نشان می‌دهد.

• در اینجا می‌خواهیم ارتباط بین مشتق یک میدان بر سطح را با انتگرال آن میدان بر روی خط احاطه‌کننده سطح بیان کنیم.



ص ۱۴

در بخش 8 دیدیم که چرخش بر روی یک وجه به صورت

$$\bar\nabla\times\bar V\,\Big|_z\,dx\,dy$$

یعنی

$$\sum_{\text{four-side}} \bar V\cdot d\lambda = \bar\nabla\times\bar V\cdot d\vec\sigma$$

$$\oint \bar V\cdot d\bar\lambda = \int \bar\nabla\times\bar S\cdot d\vec\sigma$$

قضیه استوکس

• نتیجه‌های جانبی

$$\int_S d\bar\sigma\times\bar\nabla\varphi = \oint_C \varphi\, d\vec\lambda$$

$$\int_S (d\bar\sigma\times\bar\nabla)\times\bar P = \oint_C d\lambda\times\bar P$$

برای اثبات عبارات فوق

$$\bar V = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{بردار ثابت}}}{\vec a}\,\varphi$$

$$\int(\bar\nabla\times\bar a\varphi)\cdot\bar{d\sigma} = -\int(a\times\bar\nabla\varphi)\cdot d\sigma$$

$$= -a\cdot\int\bar\nabla\varphi\times d\bar\sigma$$

$$= \oint \bar a\varphi\cdot d\lambda = a\cdot\oint\varphi\, d\lambda$$

پس

$$\int\varphi\, d\lambda = \int d\bar\sigma\times\bar\nabla\varphi$$

و برای نتیجه دوم قرار دهیم $\bar V = \bar a\times\vec P$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Faraday's law

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dl} = \int \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\sigma = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot\vec{d\sigma}$$

$$\underbrace{\oint \vec{E}\cdot\vec{dl}}_{\varepsilon \text{ پتانسیل الکتریکی}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

تغییرات شار باعث ایجاد میدان الکتریکی می‌شود. ضمناً این ε تولید شده پایستار نیست.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

1.13. Potential Theory.

* Scalar Potential.

اگر تابعی نرده‌ای بتوان نوشت $\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi$ بنویسیم که φ اسکالری است که بتواند خواص برداری نیرو را منعکس کند.

نیرویی که این خاصیت را داشته باشد نیروی پایستار گویند. اکنون می‌خواهیم بدانیم که چه موقع چنین پتانسیل اسکالری وجود دارد؟

نیرو غیر چرخشی باشد یا $\oint F \cdot dl = 0$

پاسخ به عبارت زیر دو شکل معادل را می‌نویسیم یعنی

$$F = -\nabla\varphi \xrightarrow{\text{معادل}} \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$$

$$F = -\nabla\varphi \xrightarrow{\text{معادل}} \oint \vec{F}\cdot dl = 0$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که هر کدام از نمایش‌ها با هم منجر به ترکیب دو تای دیگر می‌شود.

• شروع می‌کنیم از $\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi \longrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}\times(-\vec{\nabla}\varphi) = 0$$

پس

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\oint \vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{l} = -\oint d\varphi = 0$$

البته توجه کنید که عبارت آخر وقتی صفر است که φ در هر نقطه تک مقدار باشد. مثلاً در مورد مغناطیس چنین نیست

• شروع می‌کنیم از

$$\oint \vec{F}\cdot dl = 0 \longrightarrow \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{F}\cdot dl = 0$$

یعنی

$$\int_A^B \vec{F}\cdot dl = -\int_B^A \vec{F}\cdot dl$$

و مستقل از مسیر است. پس نیروی پایستار داریم.

$$\int_A^B \vec{F}\cdot dl = \varphi(A) - \varphi(B)$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{l} = -d\varphi = -\vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{l}$$

$$(F + \nabla\varphi)\cdot dl = 0$$

Subject:
Year.　　Month.　　Date.　　( )

اگر $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ پس

$$\int \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\sigma = \oint \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

$$0 = \oint \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi$$

پتانسیل.

به طور خلاصه داریم

$$\vec{F} = -\nabla\varphi$$

$$\swarrow \qquad \rightleftarrows$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \quad \rightleftarrows \quad \oint \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$$

اگر $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ این یعنی این معنایش است که میتوان $F=-\nabla\varphi$ نوشت ممکن است خود $\vec{F}$ صفر باشد

* وقتی پتانسیل وجود دارد که اگر در نقطه‌ای بگیرد غیر چرخشی باشد یا $\oint \vec{F}\cdot d\vec{l}=0$

$$\frac{\nabla\times F \leftarrow F = -\nabla\varphi}{\oint F\cdot dl = 0}$$

مثال

$$0 \;\text{———}\; \overset{A}{\bullet} \;\text{———}\; \infty$$

$$\text{پتانسیل} \leftarrow \varphi_\infty = 0$$

$$\varphi_A = ?$$

$$\varphi_A - \varphi_\infty = -\int_\infty^A \vec{F}\cdot d\vec{l} \quad , \quad \vec{F} = -\frac{Gm_1m_2\hat{r}}{r^2}$$

پس

$$dl = -dr$$

$$\varphi_A = -\int_\infty^A F\,dl = \int_\infty^A F\,dr = +\int_\infty^A \frac{Gm_1m_2}{r^2}\,dr$$

$$= -Gm_1m_2\frac{1}{r}\Big|_\infty^A = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Ex: Thermodynamics, Exact Differentials

در ترمودینامیک کمیت‌هایی داریم که مستقل از مسیر هستند مثل انرژی داخلی
مثل آنتروپی

فرض کنید از یک نقطه به نقطه دیگر متغیرات که یک کمیت دلخواه f به صورت زیر تغییر کند

$$df = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

حال سؤال این است که دیفرانسیل df کامل است یعنی به مسیر بستگی ندارد؟

شرط لازم و کافی برای دیفرانسیل کامل بودن این است که:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\int df = \int \frac{\partial f}{\partial x}dx + \int \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

پس باید داشته باشیم:

$$P(x,y) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$Q(x,y) \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

نشان می‌دهد که F غیرچرخشی است یعنی

$$\nabla \times F\big|_z = \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$$

که

$$F_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$F_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Vector Potential.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

قبلاً تعریف کردیم که

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

اگر بسط بدهیم که

$$\vec{B}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$$

$$\vec{A}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$$

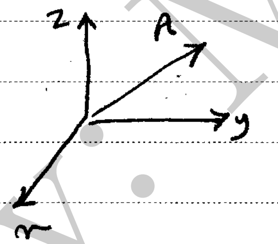
داریم

$$\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}=b_1$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}=b_2$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}=b_3$$

اگر فرض کنیم که $\vec{A}$ مولفه‌ی صفحه (yz) را دارد یعنی $a_1=0$



همیشه می‌توان این کار را انجام داد.

بنابراین

$$b_2=-\frac{\partial a_3}{\partial x}\longrightarrow a_3=-\int_{x_0}^{x}b_2\,dx+f_3(y,z)$$

$$b_3=\frac{\partial a_2}{\partial x}\longrightarrow a_2=\int_{x_0}^{x}b_3\,dx+f_2(y,z)$$

توجه کنید که f_2 و f_3 در حالت کلی نوشته شده و بنابراین تابعی از x نباشند تا اینکه a_3 و a_2 تعریف شد

با کمک عبارت روبرو

$$\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}=b_1$$

و همچنین با توجه به عبارات که برای a_3 و a_2 داریم می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial a_3}{\partial y}=-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial b_2}{\partial y}\,dx+\frac{\partial f_3}{\partial y}$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial z}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial b_3}{\partial z}\,dx+\frac{\partial f_2}{\partial z}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سپس عبارت

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = -\int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z}\right) dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

و از طرفی عبارت

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z} = 0$$

پس

$$\frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z} = -\frac{\partial b_1}{\partial x}$$

نتیجه

$$\text{سمت چپ} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial b_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

$$= b_1(x,y,z) - b_1(x_0,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

توجه کنید که f_3 و f_2 توابع دلخواه از y, z را فرض کنید

$$\text{دلخواه} \begin{cases} f_2 = 0 \\ f_3 = \int_{y_0}^{y} b_1(x_0,y,z)\, dy \end{cases}$$

با این انتخاب به نتیجه دلخواه می‌رسیم

پس

$$\vec{A} = \hat{j}\int_{x_0}^{x} b_3\, dx + \hat{k}\left[-\int_{x_0}^{x} b_2\, dx + \int_{y_0}^{y} b_1(x_0,y,z)\, dy\right]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

طبق قضیه گوس داریم

$$\oint_s \bar{V}\cdot d\bar{\sigma} = \int \bar{\nabla}\cdot\bar{V}\, d\tau$$

حال فرض کنید که $\vec{V} = \frac{\hat{r}}{r^2}$ پس

سمت چپ $\rightarrow$ $\oint_s \frac{\hat{r}\cdot d\bar{\sigma}}{r^2} = \oint \frac{1}{r^2}\, d\sigma \cos\theta$, $d\sigma_\perp = r^2 d\Omega$

$d\sigma_\perp = d\sigma\cos\theta$

$$= \oint \frac{r^2 d\Omega}{r^2} = \underline{\underline{4\pi}}$$

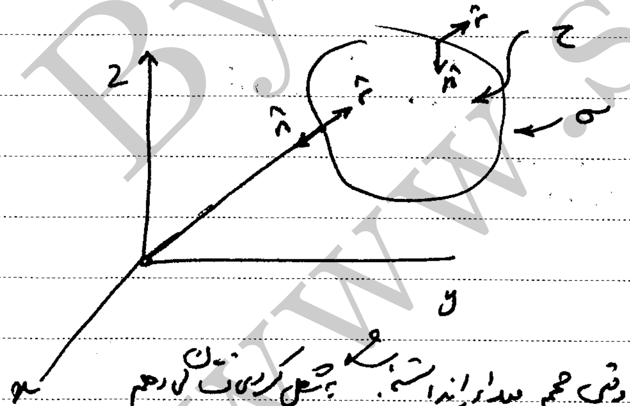
و از سمت راست داریم:

$$\int \bar{\nabla}\cdot\bar{V}\, d\tau = \int \overbrace{\bar{\nabla}\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}}^{\text{مشتق}}\, d\tau = 0$$

پس رسیدیم به تناقض $\underset{\text{از سمت چپ}}{4\pi} = \underset{\text{از سمت راست}}{0}$ اشکال کار کجاست؟

کلید حل اشکال در تعریف عبارت $\bar{\nabla}\cdot\frac{\hat{r}}{r^2} = 0$ است یعنی

این عبارت وقتی صحیح است که حجم مورد نظر را در نظر گرفته باشیم یعنی r هیچگاه صفر نشود مثل شکل زیر



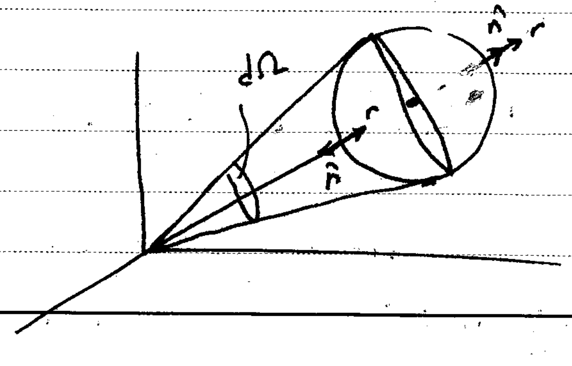
$\Rightarrow$ $\oint \bar{V}\cdot d\sigma = 0$

$\oint \bar{\nabla}\cdot\bar{V}\, d\tau = 0$

برای اینکه دقیقاً نشان دهیم که $\oint \bar{V}\cdot d\sigma = 0$ وقتی حجم مبدأ را نداشته باشد به شکل زیر توجه کنید

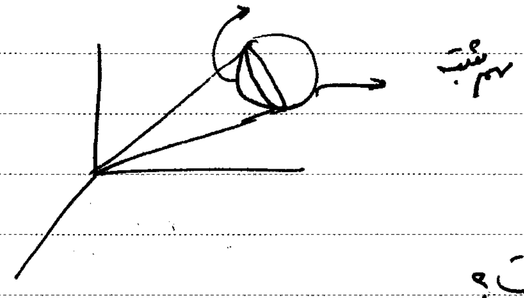
پس

$$\frac{\hat{r}\cdot d\bar{\sigma}}{r^2} = \frac{d\sigma_\perp}{r^2}$$

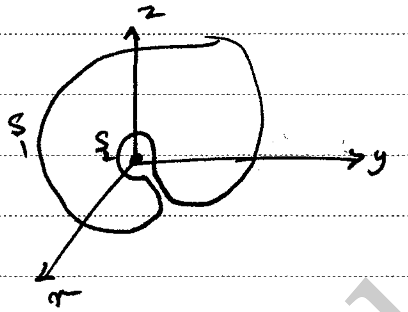


Subject:
Year. Month. Date. سهم منفی داده به تمامی صفحات منو فرا هم

پیوست به صفر می‌رسند



اما برای حالتی که مبدا را در بر بگیرد چه می‌توان گفت؟



$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{d\sigma} = ?$$

اگر بیاییم S را به S_1 و S_2 بشکنیم که توسط S_2 مبدا را حذف کرده‌ایم

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{d\sigma} = 0 \Rightarrow \oint \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\vec{d\sigma} = 0$$

$$\int_{S_1} \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\vec{d\sigma} + \int_{S_2} \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\vec{d\sigma} = 0$$

$$= -\int \frac{\delta^2 d\Omega}{\delta^2} = 0$$

$$\int_{S_1} \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\vec{d\sigma} = 4\pi$$

ن

هر وقتی که مبدا را در بر بگیرد (چون انتگرال $\delta \to 0$ میل داده و نتیجه S_1 به جای S اولیه، وقتی δ به صفر میل می‌کند)

پس

$$\oint_S \frac{\hat{r}\cdot\vec{d\sigma}}{r^2} = 4\pi$$

از سویی دیگر

$$\oint_S \frac{\hat{r}\cdot\vec{d\sigma}}{r^2} = \int_\tau \bar{\nabla}\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}\, d\tau$$

$$4\pi = \int \bar{\nabla}\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}\, d\tau$$

$$\bar{\nabla}\cdot\frac{\hat{r}}{r^2} = 4\pi\,\delta(r)$$

که انتگرال دیراک را باید داشته باشیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یعنی اینکه

$$\int \bar{\nabla}\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}\, d\tau = \int 4\pi\,\delta(r)\, d\tau = 4\pi$$

پس اکنون تناقض برطرف می‌گردد یعنی اینکه

① اگر مبدا را برداشته باشیم $\bar{\nabla}\cdot\frac{\hat{r}}{r^2} = 0$ درست چون حجم خودبخود صفر است

② اگر مبدا را بگذاریم $\bar{\nabla}\cdot\hat{r}/r^2 = 4\pi\,\delta(r)$ درست چون حجم خود 4π. که دوباره همه چیز بکار افتاد

جمع بندی.

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot d\sigma = 4\pi\frac{q}{4\pi\epsilon_0} = q/\epsilon_0 \longrightarrow \text{قانون گاوس}$$

$$\oint_S \bar{E}\cdot\bar{d\sigma} = \int 4\pi\,\delta(\bar{r})\,\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\, d\tau$$

$$= q/\epsilon_0$$

1.15. Dirac Delta function

با توجه به قانون گوس

$$\int \vec{\nabla}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)d\tau = -\int \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)d\tau = \begin{cases} -4\pi & \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$$

پس تعریف می‌کنیم که

$$\vec{\nabla}^2\left(1/r\right) = -4\pi\,\delta(r) = -4\pi\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

یک تابع دلتا دیراک به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{cases} \delta(x)=0 \quad \text{if } x\neq 0 \\ f(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

یعنی این که در $x=0$ خیلی تیز است
تا سطح زیر منحنی در اینجا برابر 1 گردد.

مشکل این است که چنین تابعی وجود ندارد ولی می‌توان به یک سری از توابع آن را ساخت.

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & x<-\frac{1}{2n} \\ n & -\frac{1}{2n}<x<\frac{1}{2n} \\ 0 & \end{cases}$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\,e^{-n^2x^2}$$

• به تعریف ریاضی تابع دلتا:

$$\lim_{n\to\infty}\int \delta_n(x)\,f(x)\,dx = f(0)$$

خواص

① $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x)\, dx$$

$$= f(0)$$

② $$\delta(x) = \delta(-x)$$

③ $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\underbrace{ax}_{y})\, dx = \int \delta(y)\, \frac{dy}{a} = 1/a \qquad dy = a\,dx$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x) \qquad \text{for } a>0$$

④ $$\delta(g(x)) = \sum_{\substack{g(a)=0 \\ g'(a)\neq 0}} \frac{\delta(x-a)}{|g'(a)|}$$

برای اثبات عبارت فوق داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(g(x))\, dx = \sum_a \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\, \delta((x-a)\, g'(a))\, dx$$

آمده‌ایم در نواحی که صفرهای تابع g است انتگرال را شکسته‌ایم. یعنی

$$g(x) = g(a) + (x-a)\, g'(a) = (x-a)\, g'(a)$$

با توجه به خاصیت ③ داریم خاصیت ④

⑤ $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta'(x-x')\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, \delta(x-x')\, dx$$

$$= -f'(x')$$

⑥ $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\infty} r^2 dr\, \delta(\vec{r}) = \int dx \int dy \int dz\, \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

$$= 1$$

(30)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

1.14. Gauss' law
Poisson's Eq.

فرض کنید داریم:

$$\vec{E} = \frac{q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

• طبق قانون گوس انتگرال عبارت بالا روی یک سطح بسته برابر است با: q/ϵ_0

• برای کسب بالا از قضیه گوس استفاده می‌کنیم

$$\oint_S \frac{\hat{r}\cdot d\vec{\sigma}}{r^2} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) d\tau = 0$$

چون $\vec{\nabla}\cdot(\hat{r}/r^2) = 0$ به غیر از صفر (مبدأ)

یادآوری: قبلاً دیدیم که:

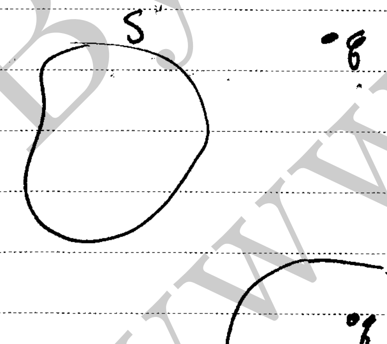
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}\, r^{n-1}) = \vec{\nabla}\cdot\hat{r}\, r^n$$

$$= 3r^{n-1} + (n-1) r^{n-1}$$

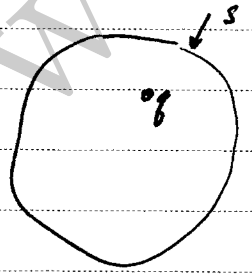
$$= (n+2) r^{n-1} \quad \text{for } n=-2 \quad \vec{\nabla}\cdot(\hat{r}/r^2) = 0 \Big\}$$

به غیر از صفر

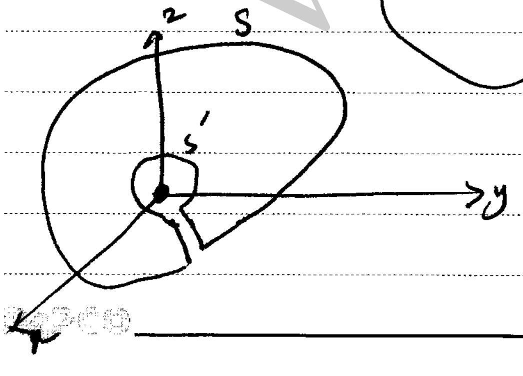
حال می‌خواهیم بررسی کنیم که وقتی مبدأ به سطح اضافه می‌گردد؟ شرایط زیر اتفاق می‌افتد:



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\sigma} = 0$$



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\sigma} = q/\epsilon_0$$



برای حالت آخر: q در مبدأ گذاشته‌ایم داریم:

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\oint \frac{\hat{r}\cdot d\sigma}{r^2} = \int_S \frac{\hat{r}\cdot \vec{d\sigma}}{r^2} + \int_{S'} \frac{\hat{r}\cdot d\sigma'}{\delta^2} = 0$$ در نتیجه خواهیم:

$$\vec{d\sigma'} = -\hat{r}\,\delta^2 d\Omega$$ اکنون نرمال سطح کوچک داریم:

$$\int_{S'} \frac{\hat{r}\cdot(-\hat{r})\,\delta^2 d\Omega}{\delta^2} = -\int_S d\Omega = -4\pi$$ پس

$$\int_S \frac{\hat{r}\cdot d\sigma}{r^2} = 4\pi$$ پس

با احتساب ضرایب رابطه E داریم:

$$\int_S \frac{\hat{r}\cdot \vec{d\sigma}}{r^2}\frac{q}{4\pi\epsilon_0} = \frac{4\pi q}{4\pi\epsilon_0} = q/\epsilon_0$$

همچنین:

$$\int_S \vec{E}\cdot\vec{d\sigma} = \int \frac{\rho\, d\tau}{\epsilon_0}$$

$$\int\left(\nabla\cdot E - \rho/\epsilon_0\right)d\tau = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$$

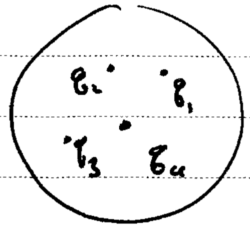
$$\downarrow$$

Poisson's Eq. $\leftarrow \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\phi) = \rho/\epsilon_0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Ex. Total Charge

فرض کنید یک کره به شعاع R داریم و درون این کره n بار داریم



$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$$

$$\varphi(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$= \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|r-r'|}\frac{1}{4\pi\epsilon_0} d^3r'$$

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i\,\delta(\vec{r}-r_i)$$ چگالی بار :

$$\int \rho(r)\,d^3r = \sum_i q_i \int \delta(r-r_i)\,d^3r$$

$$= \sum_i q_i$$

Integral Representation for Delta function

By introducing Fourier Transformation

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

$$\delta(t-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-x)}\, d\omega$$

مفهوم آن این است که توابع $e^{i\omega t}$ متعامد هستند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

1-16: Helmholtz's Theorem

• یک بردار به طور یکتا توسط دیورژانس و کرل مشخص می‌شود یعنی هر بردار را می‌توان به بخش سیملوئیدال و بخش غیرچرخشی تقسیم‌پذیر کرد یعنی

$$\nabla\cdot V_1 = s \quad \to \text{غیرچرخشی}$$

$$\nabla\times \vec{V}_1 = \vec{C} \quad \text{سیملوئیدال}$$

می‌خواهیم نشان دهیم با داشتن s و $\vec{C}$ بردار $\vec{V}_1$ به طور یکتا داده می‌شود. فرض کنید $\vec{V}_2$ وجود داشته باشد

که از نظر عبارات بالایی همان شرایط را فراهم کند یعنی

$$\begin{cases}\nabla\cdot \vec{V}_2 = s \\ \nabla\times V_2 = \vec{C}\end{cases}$$

یعنی $\vec{V}_1 - \vec{V}_2 \stackrel{?}{=} 0$ یعنی $\vec{V}_2$ همان $\vec{V}_1$ است یعنی $\vec{V}_1$ یکتا خواهد بود

$$\vec{W} \equiv \vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

we have $\nabla\cdot\vec{W} = \nabla\cdot V_1 - \nabla\cdot \vec{V}_2 = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\nabla\varphi = 0$

$$\nabla\times\vec{W} = 0 \longrightarrow \vec{W} = -\nabla\varphi$$

$\varphi \vec{W}_n\, d\sigma$

همچنین داریم (چون شرایط مرزی یکسان است)

$$W_n = V_{1n} - V_{2n} = 0$$

$$\int \varphi W\cdot d\sigma$$

$$\int \varphi \nabla\varphi\cdot d\sigma = \int \varphi \nabla^2\varphi\, d\tau + \int \nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\, d\tau = 0$$

با استفاده از قضیه گرین داریم:

$$\int_V \nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\, d\tau = \int \vec{W}\cdot\vec{W}\, d\tau = 0$$

$$\vec{W}\cdot\vec{W} = W^2 = 0$$

پس

$\vec{V}_1$ همان $\vec{V}_2$ $\longleftarrow$ $\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = 0$ $\longleftarrow$ $W = 0$

پس اثبات کردیم که با معلوم بودن S و $\vec{C}$ و شرایط مرزی بردار به طور یکتا تعیین می‌شود.

• دومین قضیه بیان می‌کند که

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$\vec{\nabla}\varphi \rightarrow$ بخش غیر چرخشی $\rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{A} \rightarrow$ بخش سیم لوله‌ای $\rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$

پس

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = S(r) \longrightarrow -\nabla^2\varphi = S(r)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \vec{C}(\vec{r}) \longrightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{C}(\vec{r})$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{S(\vec{r}')}{|r-r'|}\, d\tau'$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{C}(r')}{|r-r'|}\, d\tau'$$

سئوال چرا φ و A را به شکل بالا نوشتیم؟ برای شروع به سئوال داریم

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi = -\frac{1}{4\pi}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\int \frac{S(r')}{|r-r'|}\, d\tau'$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int S(r')\,\nabla^2\frac{1}{|r-r'|}\, d\tau'$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int S(r')\,(-4\pi\,\delta(r-r'))\, d\tau'$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = S(r)$$

پس معلوم شد که عبارتی که برای φ نوشتیم سازگار است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای $\vec{A}$ نیز داریم،

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}_{1}-\underbrace{\nabla^2 A}_{2}$$

$$1\rightarrow\quad 4\pi\,\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})=\int\left(\vec{C}(\vec{r}')\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\nabla}\frac{1}{|r-r'|}\,d\tau'$$

$$4\pi\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\Big|_x=\int\left(\vec{C}(\vec{r}')\cdot\vec{\nabla}'\right)\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{|r-r'|}\,d\tau'$$

$$=\int\nabla'\cdot\left[\vec{C}(r')\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{|r-r'|}\right]d\tau'$$

$$-\int\underbrace{\left[\nabla'\cdot\vec{C}(r')\right]}_{\nabla\cdot\nabla\times V=0}\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{|r-r'|}\,d\tau$$

$$=\underbrace{\oint\vec{C}(r')\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{|r-r'|}\cdot d\sigma'}$$

در حد r^2 سریعتر از $\frac{1}{r}$ به صفر میل کند. با توجه به خصوصیات مربوط به $C(r)$

پس نتیجه می‌گیریم ① صفر است پس

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=-\nabla^2 A=-\frac{1}{4\pi}\int\vec{C}(r')\,\nabla^2\frac{1}{|r-r'|}\,d\tau'$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int\vec{C}(r')\,\delta(r-r')(-4\pi)\,d\tau'$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\vec{C}(r)$$

پس عبارت مربوط به $\vec{A}$ هم سازگار است.