Subject :
Year . Month . Date . ( )

Vector Analysis in Curved Coordinates

در فصل ۱ عملگرها را معرفی کردیم اینکه در سیستم مختصات دکارتی Cartesian کار کنیم (x,y,z) با خواص $0 = \hat i\cdot\hat j = \hat j\cdot\hat k = \hat i\cdot\hat k$

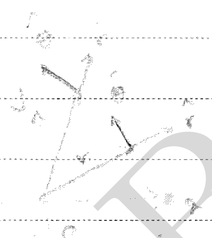
• از خواص مهم این سیستم مختصات این است که Unit vectors $(\hat i, \hat j, \hat k)$ are Constant in Direction as well as magnitude

• متاسفانه همه مسائل فیزیک را نمی‌توان به راحتی در چارچوب سیستم مختصات دکارتی حل و فصل کرد. برای مثال اگر بخواهیم در فیزیک الکترواستاتیک کار کنیم در این صورت مناسب است سیستم مختصاتی اختیار کنیم که شعاع از برداری که آن را نشان می‌دهد $\vec F = F\hat F$ سیستم دستگاه مختصات کروی.

• به دنبال این هستیم که ابتدا نیاز به پرداخت جدیدی هستیم یعنی مثلاً ∇ ، $\nabla\cdot$ ، $\nabla\times$ را برای این دستگاه‌ها بازتعریف کنیم

2.1 Orthogonal Coordinates in R^3

• فرض کنید در حالت کلی بردارهای پایه دستگاه مختصات q_i هست



$q_i(x,y,z)$, $i=1,2,3$

بعد، در دستگاه کارتزین

$$q_1 = \hat i = cts \qquad x = x(q_1,q_2,q_3) \xrightarrow{\text{کروی}} x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$q_2 = \hat j = cts \qquad y = y(q_1,q_2,q_3) \longrightarrow y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$q_3 = \hat k = cts \qquad z = z(q_1,q_2,q_3) \longrightarrow z = r\cos\theta$$

• در این حالت هر المان یک بردار دلخواه در سیستم مختصات پایه به صورت زیر است:

$$\vec V = \hat q_1 V_1 + \hat q_2 (V_2) + \hat q_3 V_3$$

• دقت کنیم که Position vector (بردار مکان)

چون ممکن است q_i ها از جنس طول نباشند

$$\begin{cases} \vec r \neq \hat q_1 q_1 + \hat q_2 q_2 + \hat q_3 q_3 \\ \vec r = x\hat i + y\hat j + z\hat k \end{cases}$$

$\longleftarrow$ جنس طول دارد

• مثلاً در سیستم مختصات کروی (r,θ,φ) بردار مکان: $\vec r = r\hat r$

" " " استوانه‌ای (ρ,ϕ,z) " : $\vec r = \rho\hat\rho + z\hat k$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

• بدین اساس طول برحسب تعمیم‌های سیستم مختصات عمومی برابر است با

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3$$

• پس

$$\vec{dr} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i \quad , \quad ds^2 = \vec{dr} \cdot \vec{dr}$$

• در سیستم مختصات دکارتی

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

• در سیستم مختصات عمومی

$$ds^2 = \vec{dr} \cdot \vec{dr} = \sum_{ij} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} dq_i \, dq_j$$

$$= g_{11} dq_1^2 + g_{12} dq_1 dq_2 + g_{13} dq_1 dq_3$$

$$+ g_{21} dq_2 dq_1 + g_{22} dq_2^2 + g_{23} dq_2 dq_3$$

$$+ g_{31} dq_3 dq_1 + g_{32} dq_3 dq_2 + g_{33} dq_3^2 = g_{ij} dq_i dq_j$$

توجه کنید برخلاف حالت دکارتی جملاتی از جنس $dq_i dq_j$ برای $i \neq j$ ظاهر شده که به سبب داشتن آنها به عبور x, y, z می‌باشد
دانستیم لزوماً مختصه‌ها بر هم عمود نیستند.

$$g_{ij}(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j}$$

• وقتی با سیستم‌های مختصات متعامد کار کنیم پس

$$g_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

$$\hat{q}_i \cdot \hat{q}_j = \delta_{ij}$$

• پس تعریف می‌کنیم

$$ds^2 = (h_i dq_i)^2 \quad \text{where} \quad h_i^2 = g_{ii} > 0$$

• یعنی اینکه مختصه‌ی طول در سیستم مختصات کلی

$$ds_i = h_i dq_i$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = h_i \hat{q}_i$$

دلیل اینکه در حالت کلی ضرب داریم به معنای این است q_i که از جنس طول باشند پس به h_i نیاز داریم تا کمیتی از جنس طول بسازیم

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\vec{dr} = h_1 dq_1 \hat{q}_1 + h_2 dq_2 \hat{q}_2 + h_3 dq_3 \hat{q}_3 = \sum_i h_i dq_i \hat{q}_i$$ •

• سطح
$$d\sigma_{ij} = ds_i\, ds_j = h_i h_j\, dq_i\, dq_j$$

• حجم
$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3$$

• سطح کلی
$$\vec{d\sigma} = ds_2 ds_3 \hat{q}_1 + ds_3 ds_1 \hat{q}_2 + ds_1 ds_2 \hat{q}_3$$
$$= h_2 h_3 dq_2 dq_3 \hat{q}_1 + h_3 h_1 dq_3 dq_1 \hat{q}_2 + h_1 h_2 dq_1 dq_2 \hat{q}_3$$

• [illegible]
$$\int \vec{V}\cdot\vec{d\sigma} = \int V_1 h_2 h_3\, dq_2\, dq_3 + \int V_2 h_3 h_1\, dq_1\, dq_3 + \int V_3 h_1 h_2\, dq_1\, dq_2$$

• ضرب داخلی
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_{ik} A_i \underbrace{\hat{q}_i\cdot\hat{q}_k}_{\text{orthogonal system}} A_k = \sum_{ik} A_i B_k \delta_{ik}$$
$$= \sum A_i B_i$$

• ضرب خارجی
$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{q}_1 & \hat{q}_2 & \hat{q}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

[illegible]

• اکنون اگر در تبدیل سیستم ما سیستم دو بعدی باشد خواهیم دید چه اتفاقی می افتد؟

$$\vec{dr_1} = \vec{r}(q_1 + dq_1, q_2) - \vec{r}(q_1, q_2) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 = h_1 dq_1 \hat{q}_1$$

$$\vec{dr_2} = \vec{r}(q_1, q_2 + dq_2) - \vec{r}(q_1, q_2) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 = h_2 dq_2 \hat{q}_2$$

$$dx\,dy = \left.\vec{dr_1}\times\vec{dr_2}\right|_z = \left[\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} - \frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial y}{\partial q_1}\right] dq_1\, dq_2$$ حال اگر سطح سیستم Σz

$$= h_1 h_2 dq_1 dq_2\, \hat{q}_1\times\hat{q}_2$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{vmatrix}}_{\text{Jacobian}} dq_1\, dq_2$$

[illegible]

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حجم:

$$dx\,dy\,dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} dq_1\,dq_2\,dq_3$$

در سیستم مختصات متعامد داریم

$$h_1 h_2 h_3 (\hat{q}_1 \times \hat{q}_2) \cdot \hat{q}_3 = h_1 h_2 h_3$$

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2$$

چرا؟ چون

$$d\tau = (dx\,\hat{i} \times dy\,\hat{j}) \cdot dz\,\hat{k} = dx\,dy\,dz$$

$$= (d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2) \cdot d\vec{r}_3 = \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}}_{\text{Jacobian}} dq_1\,dq_2\,dq_3 = (h_1 \hat{q}_1 \times \hat{q}_2 h_2) \cdot \hat{q}_3 h_3 = h_1 h_2 h_3\,(\hat{q}_1 \times \hat{q}_2) \cdot \hat{q}_3$$

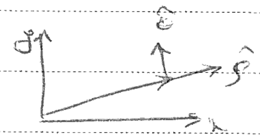
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} &= \frac{\partial x}{\partial q_1}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\hat{k} \\ g_{ij} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \quad \delta_{ij} \end{aligned} \right.$$

$$h_i = \sqrt{g_{ii}}$$

تمرین: 2.15 عبارت فوق را نتیجه می‌دهد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Example



Polar Coordinate $(x,y) \longrightarrow (\rho,\theta)$

(q_1, q_2)

متغیرها

$x = \rho \cos\theta$

$y = \rho \sin\theta$

$$d\sigma = dx\,\hat{i} \times dy\,\hat{j} = \vec{dr_1} \times \vec{dr_2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\hat{q}_1\, dq_1 \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\hat{q}_2\, dq_2$$

$$= d\rho\, d\theta\, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = h_1 \hat{q}_1$$

مثل روشی که در دستگاه دکارتی رفتیم

$$\frac{\partial x}{\partial \rho}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\hat{j} = h_1 \hat{\rho} \rightarrow h_1^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= 1 \rightarrow h_\rho = 1$$

σ_0

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = h_2 \hat{\theta} \rightarrow \frac{\partial x\,\hat{i}}{\partial \theta} + \frac{\partial y\,\hat{j}}{\partial \theta} = h_\theta \hat{\theta} \rightarrow h_\theta^2 = (\rho\sin\theta)^2 + (\rho\cos\theta)^2$$

$$= \rho^2$$

$$h_\theta = \rho$$

σ_2

$$d\sigma = d\rho\, d\theta\, \rho$$

می‌توان از طریق ژاکوبین رفت

$$dx\,dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} d\rho\, d\theta = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} \rho\, d\rho\, d\theta$$

برای spherical بنویسید

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2.2. Differential Vector operators

بررسی خود را به سیستم‌های مختصات متعامد محدود می‌کنیم

Gradient

با توجه به مفهوم $\vec{\nabla}$ یعنی برداری که نشان‌دهنده بیشترین تغییرات نقطه‌ای یک میدان اسکالر است

$$\vec{\nabla}\psi(q_1, q_2, q_3) \longrightarrow \hat{q}_1 \cdot \vec{\nabla}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial s_1} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1}$$

تغییرات اسکالر ψ وقتی که q_1 تغییر کند بقیه ثابت، یعنی q_2 و q_3 ثابت باشند. با این حساب

$$\vec{\nabla}\psi(q_1, q_2, q_3) = \hat{q}_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} + \hat{q}_2 \frac{\partial \psi}{\partial s_2} + \hat{q}_3 \frac{\partial \psi}{\partial s_3}$$

$$= \hat{q}_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \hat{q}_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \hat{q}_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial \psi}{\partial q_3}$$

$$= \sum \hat{q}_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \psi}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \psi}{\partial q_3} dq_3 = (\nabla\psi)_1 dr_1 + (\nabla\psi)_2 dr_2 + (\vec{\nabla}\psi)_3 dr_3 \qquad (\vec{\nabla}\psi)_i = \hat{q}_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_i}$$

$$= (\nabla\psi)_1 h_1 dq_1 + \dots \Longrightarrow$$

اکنون بیان تغییرات کل یک تابع را ادامه می‌دهیم •

$$d\psi = \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{r} \qquad d\vec{r} = \hat{q}_1 ds_1 + \hat{q}_2 ds_2 + \hat{q}_3 ds_3$$

$$= \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_i} ds_i = \sum \frac{\partial \psi}{\partial q_i} dq_i$$

Divergence

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(q_1, q_2, q_3) = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \vec{V}\cdot d\vec{\sigma}}{\int d\tau}$$

$$\hat{q}_1 \times \hat{q}_2 = \hat{q}_3$$

توجه کنید که سیستم مختصات متعامد سمت راستی هستند

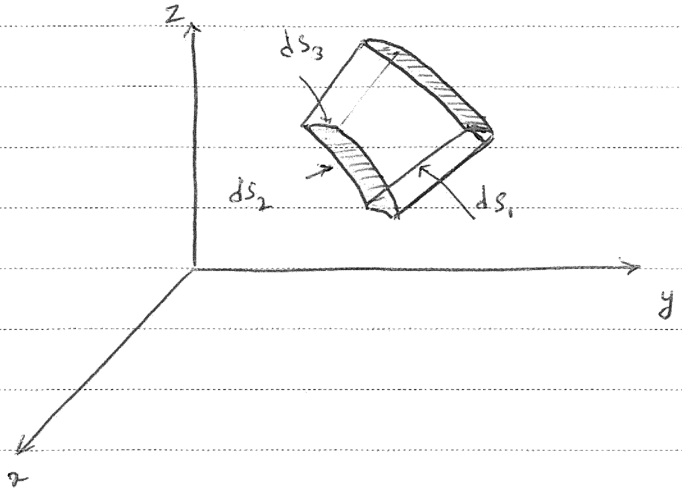
حال از تعریف $\int \vec{V}\cdot d\vec{\sigma}$ شروع می‌کنیم به شکل توجه کنید:

Subject:
Year. Month. Date. ( )

[illegible] در مختصات عمومی

$$ds_2 ds_3\Big|_{q_1+dq_1} \neq ds_2 ds_3\Big|_{q_1}$$

[illegible]



$$\int_{q_1=cte} \bar{V}\cdot d\sigma = V_1(q_1+dq_1, q_2, q_3)\, ds_2 ds_3\Big|_{q_1+dq_1} - V_1(q_1, q_2, q_3)\, ds_2 ds_3\Big|_{q_1}$$

با صرف نظر از [illegible]

$$= \left[V_1(q_1, q_2, q_3) + \frac{\partial}{\partial q_1} V_1\, dq_1\right]\left[ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial q_1} dq_1\right]\left[ds_3 + \frac{\partial ds_3}{\partial q_1} dq_1\right]$$

$$- V_1 ds_2 ds_3\Big|_{q_1}$$

$$= \left[V_1(q_1, q_2, q_3) + \frac{\partial}{\partial q_1} V_1\, dq_1\right]\left[ds_2 ds_3\Big|_{q_1} + ds_2 \frac{\partial ds_3}{\partial q_1} dq_1 + ds_3 \frac{\partial ds_2}{\partial q_1} dq_1 \ldots\right] -$$

$$- V_1 ds_2 ds_3$$

$$= dq_1 \frac{\partial}{\partial q_1}\left[V_1(q_1, q_2, q_3)\, ds_2 ds_3\right]$$

در نتیجه بقیه [illegible] نتیجه می دهد.

$$\int \bar{V}\cdot d\bar{\sigma} = dq_1 dq_2 dq_3 \frac{\partial}{\partial q_1}\left[V_1 h_2 h_3\right] + dq_1 dq_3 dq_2 \frac{\partial}{\partial q_2}\left[V_2 h_1 h_3\right]$$

$$+ dq_1 dq_3 dq_2 \frac{\partial}{\partial q_3}\left[V_3 h_1 h_2\right]$$

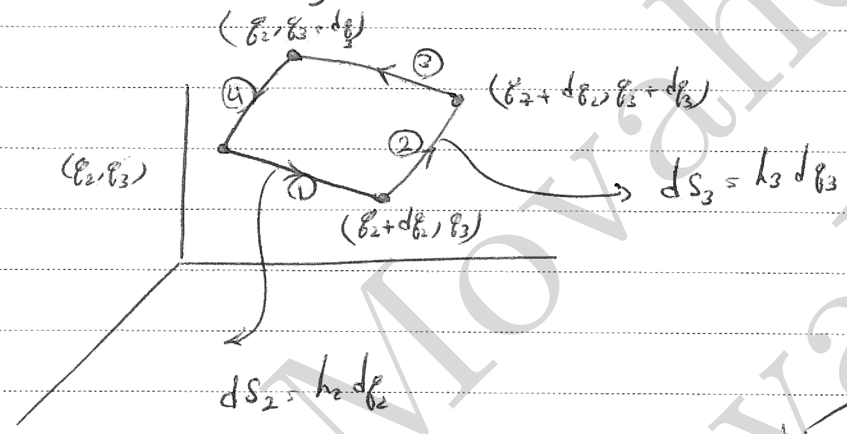
که با توجه عبارت $d\tau = h_1 h_2 h_3\, dq_1 dq_2 dq_3$ داریم

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_3 h_1 h_2)\right]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}\psi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right] + \frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right] + \frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\right]\right]$$

Curl
$$\oint \bar{V}\cdot d\vec{\lambda} = \int \bar{\nabla}\times\bar{V}\cdot d\vec{\sigma}$$



در صفحه $q_1 = ct$ حرکت می‌کنیم

$$\bar{V}\cdot d\bar{\lambda}\Big|_{q_1 = ct} = (\bar{\nabla}\times\bar{V})_1\, dS_2\, dS_3$$

$$\underbrace{V_2(q_1,q_2,q_3)\,h_2 dq_2}_{①} + \underbrace{V_3(q_1,q_2+dq_2,q_3)\,dS_3\Big|_{q_2+dq_2}}_{②} + \overbrace{V_2(q_1,q_2,q_3+dq_3)(-dS_2)\Big|_{q_3+dq_3}}^{③}$$

$$+ \overbrace{V_3(q_1,q_2,q_3)(-dS_3)}^{④}\Big|_{q_1,q_2,q_3}$$

$$(\nabla\times V)_1\, dS_2\, dS_3 = V_2(q_1,q_2,q_3)\,h_2 dq_2 + \left[V_3(q_1,q_2,q_3) + \frac{\partial V_3}{\partial q_2}dq_2\right]\left[dS_3 + \frac{\partial dS_3}{\partial q_2}dq_2\right]$$

$$- \left[V_2(q_1,q_2,q_3) + \frac{\partial V_2}{\partial q_3}dq_3\right]\left[dS_2 + \frac{\partial dS_2}{\partial q_3}dq_3\right] - V_3(q_1,q_2,q_3)\,dS_3$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$(\nabla\times\bar{V})_1\, h_2 h_3\, dq_2\, dq_3 = \cancel{V_2(q_1, q_2, q_3)\, h_2\, dq_2}$$

$$+ \cancel{V_3(q_1, q_2, q_3)\, h_3\, dq_3} + \left(\frac{\partial V_3 h_3}{\partial q_2}\right) dq_2\, dq_3$$

$$- \cancel{V_2(q_1, q_2, q_3)\, h_2\, dq_2} - \left(\frac{\partial V_2 h_2}{\partial q_3}\right) dq_2\, dq_3$$

$$- \cancel{V_3(q_1, q_2, q_3)\, h_3\, dq_3}$$

$$(\nabla\times\bar{V})_1\, h_2 h_3\, dq_2\, dq_3 = \frac{\partial V_3 h_3}{\partial q_2}\, dq_2\, dq_3 - \left(\frac{\partial V_2 h_2}{\partial q_3}\right) dq_2\, dq_3$$

$$(\bar{\nabla}\times\bar{V})_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial V_3 h_3}{\partial q_2} - \frac{\partial V_2 h_2}{\partial q_3}\right]$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{q}_1 & h_2\hat{q}_2 & h_3\hat{q}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix}$$

σ_2

$$\vec{\nabla}\psi = \lim_{\int d\tau \to} \frac{\int \psi \, \vec{d\sigma}}{\int d\tau}$$

$$\vec{d\sigma} = ds_2 ds_3 \hat{q}_1 + ds_1 ds_3 \hat{q}_2 + ds_1 ds_2 \hat{q}_3$$

$$\hat{q}_i = \frac{\partial \vec{r}}{h_i \partial q_i}$$

در شکل فقط جمع سطوح $\hat{q}_1$ برابر است:

$$\psi(q_1+dq_1, q_2, q_3)\, ds_2 ds_3 \hat{q}_1 \Big|_{q_1+dq_1} - \psi(q_1, q_2, q_3)\, ds_2 ds_3 \hat{q}_1 \Big|_{q_1}$$

$$\left[\psi(q_1,q_2,q_3) + \frac{\partial\psi}{\partial q_1} dq_1\right]\left[ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial q_1} dq_1\right]\left[ds_3 + \frac{\partial ds_3}{\partial q_1} dq_1\right]\left[\hat{q}_1 + \frac{\partial \hat{q}_1}{\partial q_1} dq_1\right]$$

$$- \psi\, ds_2 ds_3 \hat{q}_1$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\psi h_2 h_3 \hat{q}_1\right) dq_1 dq_2 dq_3$$

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3 \, dq_1 \cancel{dq_2} dq_3} \; dq_1 \cancel{dq_2} dq_3 \; \frac{\partial}{\partial q_1}\left[\psi h_2 h_3 \hat{q}_1\right]$$

یعنی حد آن

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1}\left[\psi h_2 h_3 \hat{q}_1\right]$$

$$= \frac{\hat{q}_1}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \frac{\psi}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1}\left[h_2 h_3 \hat{q}_1\right]$$

و کل حالت عبارتست:

$$\vec{\nabla}\psi = \hat{q}_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \hat{q}_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \hat{q}_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3} + \frac{\psi}{h_1 h_2 h_3}\left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 \hat{q}_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1 h_3 \hat{q}_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 \hat{q}_3) \right\}$$

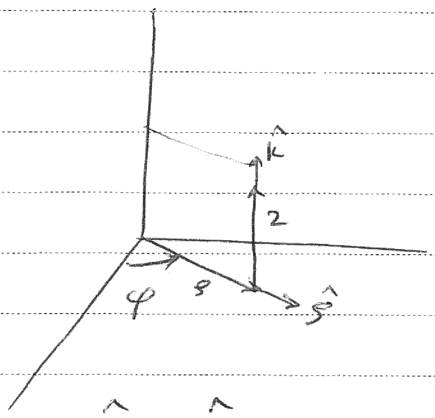
ترسیم دیگر

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Subject :
Year .   Month .   Date .   ( )

2.4: Cylinderical Coordinates



$0 \leq \rho < \infty$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$0 \leq z < \infty$

$\hat{q}_1 \equiv \hat{\rho}$ $\qquad x = \rho \cos\varphi$

$\hat{q}_2 \equiv \hat{\varphi}$ $\qquad y = \rho \sin\varphi$

$\hat{q}_3 \equiv \hat{k}$ $\qquad z = z$

$$\hat{q}_1 h_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\hat{k}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial \rho}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\hat{k}$$

$$\hat{\rho}\, h_\rho = \cos\varphi\, \hat{i} + \sin\varphi\, \hat{j} + 0$$

$$|h_\rho| = 1$$

$$\hat{q}_2 h_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\hat{k}$$

$$= -\rho \sin\varphi\, \hat{i} + \rho\cos\varphi\, \hat{j} + 0$$

$$|h_\varphi| = \rho$$

$$\hat{q}_3 h_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = \frac{\partial x}{\partial z}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial z}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial z}\hat{k}$$

$$= 0 + 0 + 1\hat{k}$$

$$h_z = 1$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

پس جابجایی حجم - سطح و [illegible]

Ex: Kepler law.

قانون دوم کپلر وقتی زاویه‌ای سطحی بیان می‌کند که جسم در حرکت حول یک جسم در زمان‌های یکسان مساحت یکسانی را جاروب کند

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} = \vec{r}\times\vec{p}$$ پس

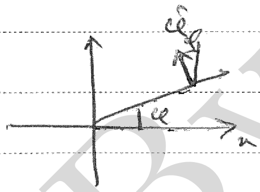
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} = \frac{f(r)}{r}\vec{r}\times\vec{r} = 0$$

اگر $\vec{F} = f(r)\,\hat{r}$ نیروی مرکزی

$$\vec{L} = cts$$ پس

حال در مختصات استوانه‌ای فرض کنید که جسم بر روی صفحه $z = cts$ حرکت کند $\quad \vec{L} = L\hat{k}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\hat{\rho}) = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\frac{d\hat{\rho}}{dt}$$



داریم که

$$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}$$
$$\hat{\rho} = (\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j})$$

پس

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\varphi}\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j} = \hat{\varphi}$$

یعنی

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

پس

$$\vec{L} = m\vec{\rho}\times\vec{v} = m\vec{\rho}\times(\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi})$$
$$= m\rho^2\dot{\varphi}\hat{k} = cts$$

لذا طبق مساحت

$$A = \frac{1}{2}\int \rho(\rho\, d\varphi) = \frac{1}{2}\int \rho^2\dot{\varphi}\, dt$$
$$= \frac{L}{2m}\int dt = \frac{Lt}{2m}$$

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

و چون ... ها m نیز یک چین در زمان مساوی مساحت ثابتی جاروب می‌کند.

Ex. Navier-stocks Term.

$$\bar\nabla \times [\bar V \times (\bar\nabla \times \bar V)].$$

اگر $\bar V = \hat k\, v(\rho)$

پس

$$\bar\nabla \times \bar V = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat\rho & \rho\hat\varphi & \hat k \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & v(\rho) \end{vmatrix} = -\hat\varphi \frac{\partial v}{\partial \rho}$$

$$V \times \bar\nabla \times V = \begin{vmatrix} \hat\rho & \hat\varphi & \hat k \\ 0 & 0 & v \\ 0 & -\frac{\partial v}{\partial\rho} & 0 \end{vmatrix} = \hat\rho\, v \frac{\partial v}{\partial \rho}$$

و نهایتا

$$\bar\nabla \times (V \times \bar\nabla \times V) = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat\rho & \rho\hat\varphi & \hat k \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v\frac{\partial v}{\partial\rho} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

پس جمله‌ی غیرخطی در این مدل ساده صفر است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\vec{\nabla}\psi(\rho,\varphi,z) = \hat{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \hat{k}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}(V_\varphi) + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

$$\vec{\nabla}\times V = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_\rho & \rho V_\varphi & V_z \end{vmatrix}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2-5 Spherical Coordinate

$q_1 \equiv r \qquad 0 \leqslant r < \infty$

$q_2 \equiv \theta \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

$q_3 \equiv \varphi \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\theta = \arccos \dfrac{z}{r}$

$\varphi = \arctan y/x$

$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

$$h_i \hat{q}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \rightarrow \begin{cases} h_r = 1 \\ h_\theta = r \\ h_\varphi = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{r} = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \dfrac{\partial x}{\partial r}\hat{i} + \dfrac{\partial y}{\partial r}\hat{j} + \dfrac{\partial z}{\partial r}\hat{k} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k} \\ \hat{\theta} = \dfrac{1}{h_\theta}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \dfrac{1}{r}\left[r\cos\theta\cos\varphi\,\hat{i} + r\cos\theta\sin\varphi\,\hat{j} - r\sin\theta\,\hat{k}\right] \\ \hat{\varphi} = \dfrac{1}{h_\varphi}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[-r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{i} + r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{j}\right] \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\bar{\nabla}\psi = \hat{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{V} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2V_r) + r\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta) + r\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right]$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{V} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ V_r & rV_\theta & r\sin\theta V_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\nabla\psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right]$$

Ex. $\bar{\nabla}f(r) = \hat{r}\frac{\partial f}{\partial r} + 0 + 0$

$$\nabla r^n = \hat{r}\,n r^{n-1}$$

$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) =$$

$$\frac{1}{r^2}2r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$

$$\nabla^2 r^n = \frac{2}{r}n r^{n-1} + n(n-1)r^{n-2}$$

$$= 2n r^{n-2} + n(n-1)r^{n-2}$$

$$= n(n+1)r^{n-2}$$

جواب را امتحان کنید