135

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Chapter 10: Sturm-Liouville Theory and orthogonal function

* General Properties of Ordinary-Differential Equation (ODE)

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

$$F : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

اگر دارای خاصیت زیر باشد به آن معادله دیفرانسیل خطی گویند

nth-order linear ODE

$$P_0(x)\, y + P_1(x) \frac{dy}{dx} + \cdots P_n(x) \frac{d^ny}{dx^n} = q(x) \qquad P_n(x) \neq 0$$

if $q = 0 \rightarrow$ Homogeneous

if $q \neq 0 \rightarrow$ Inhomogeneous

اکنون می‌توان عملگر دیفرانسیل خطی را به صورت زیر تعریف کرد

linear Differential operator

$$\mathcal{L} \equiv P_0(x) + P_1(x) \frac{d}{dx} + P_2 \frac{d^2}{dx^2} + \cdots P_n \frac{d^n}{dx^n}$$

و می‌توان نوشت.

$$\mathcal{L}[y] = q(x)$$

[Second-order linear Differential Equation]

General Properties of "SOLDE"

$$P_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+P_1(x)\frac{dy}{dx}+P_0(x)\,y=P_3(y) \qquad P_2(x)\neq 0$$

اگر طرفین را بر $P_2(x)$ تقسیم کنیم داریم

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\frac{dy}{dx}+\frac{P_0}{P_2}y=\frac{P_3}{P_2}$$

نام گذاری می کنیم

$$p\equiv\frac{P_1}{P_2}$$

$$q\equiv\frac{P_0}{P_2} \quad , \quad r\equiv\frac{P_3}{P_2}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=r}$$

در نقاطی که $P_2(x)=0$ به آن نقطه نقطه تکین گویند

توابع f_1 و f_2 که در بازه $[a,b]$ تعریف شده اند ① در آن مشتق داشته باشند ② $W(f_1,f_2)=0$ مشتق پذیر باشند

$$\text{wronskian}\equiv W(f_1,f_2)=\begin{vmatrix} f_1 & f_1' \\ f_2 & f_2' \end{vmatrix}$$

$$= f_1f_2'-f_2f_1'=0 \longrightarrow f_1f_2'=f_2f_1'$$

$$f_1\,df_2=f_2\,df_1$$

پس داریم $f_2=cf_1$ خطی هستند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Adjoint and Self-adjoint Differential operators

یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن "HSOLDE" در نظر بگیرید:

$$\mathcal{L}[y] \equiv P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = 0$$

این یک معادله کامل نامیده می‌شود اگر

is said to be exact if

$$\mathcal{L}[f] = P_2 f'' + P_1 f' + P_0 f = \frac{d}{dx}[Af' + Bf] = Af'' + A'f' + Bf' + B'f$$
$$= Af'' + (A'+B)f' + B'f$$

یعنی $A = P_2$, $(A'+B) = P_1$, $B' = P_0$ است

• عامل انتگرال‌گیری Integrating-factor تابعی مانند μ است که برای آن

$$\mu \mathcal{L}[y] = \text{exact}$$

باشد

یعنی اگر این عامل انتگرال را در معادله مرتبه دوم ضرب کنیم آن را کامل کند. حال سوال این است که در چه صورت این عامل وجود دارد؟

اگر عامل انتگرال‌گیری موجود باشد این را داریم

$$\frac{d}{dx}[Ay' + By] = 0 \Rightarrow A(x)y' + By = C$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی، یعنی غیرهمگن، است. حتی اگر $\mathcal{L}$ غیرهمگن باشد

در آن صورت اگر عامل انتگرال‌گیری داشته باشد به راحتی حل است یعنی

$$\mu(x)\mathcal{L}[y] = \mu(x) r(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}[Ay' + By] = \mu(x) r(x)$$

$$\Rightarrow Ay' + By = \int_a^x \mu(t) r(t)\, dt$$

• شرط کامل بودن معادله دیفرانسیل مرتبه دوم این است که:

$$\boxed{P_2'' - P_1' + P_0 = 0}$$

criterion for exactness of $\mathcal{L}$

$$P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = \frac{d}{dx}(Ay' + By) \rightarrow P_2'' - P_1' + P_0 = 0$$

$$P_2 = A, \quad P_1 = A' + B, \quad P_0 = B' \longrightarrow P_2'' = A'', \quad P_1' = A'' + B', \quad P_0 = B' \longrightarrow$$

$$A'' - A'' - B' + B' = 0 \longrightarrow$$ به طور مستقیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در حالت کلی SOLDE کامل نیست. سئوال آن هم این است که چه ضریبی (عامل انتگرال) معادله را کامل می‌کند؟
در صفحه قبل دیدیم که عامل انتگرال گیری $\mathcal{L}$ را کامل می‌کند.

جواب: عامل انتگرالی μ برای عملگر $\mathcal{L}$ به صورت زیر حاصل می‌شود

$$M[\mu] \equiv (P_2\mu)'' - (P_1\mu)' + P_0\mu = 0$$ یعنی μ که جواب این معادله است

یعنی اگر عبارت بالا را بسط دهیم داریم:

$$P_2\mu'' + (2P_2' - P_1)\mu' + (P_2'' - P_1' + P_0)\mu = 0$$

معادله الحاقی است به این دلیل که: Adjoint operator

دلیل اینکه چرا μ به صورت ... است و کمکی برای سوال این ...

$P\mathcal{L}$ exact $\Rightarrow \mu P_2 y'' + \mu P_1 y' + \mu P_0 y = 0$ exact

یعنی $(\mu P_2)'' - (\mu P_1)' + \mu P_0 = 0 \Rightarrow P_2\mu'' + (2P_2' - P_1)\mu' + (P_2'' - P_1' + P_0)\mu = 0$ همان معادله بالاست

$$\mathcal{L}[y] = P_2 y'' + (2P_2' - P_1)y' + (P_2'' - P_1' + P_0)y = 0$$

دلیل اینکه الحاقی نامیدیم چیست؟

تا اینجا دیدیم که اگر معادله دیفرانسیل مرتبه دوم کامل نباشد، عامل ... دیفرانسیل مرتبه اول خواهد بود. اما یک ... کامل باشد

بنابراین μ ... یک جواب معادله ... است که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است، یعنی

$$P_1\frac{dy}{dx} + P_0 y = q(x) \longrightarrow \mu = \frac{1}{P_1(x)}\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{P_0}{P_1}\,dt\right]$$

ولی به هر حال الحاقی نقش ... را در مطالعه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم بازی می‌کند.

فرض کنید داشته باشیم

$$\mathcal{L}[u] \equiv P_2 u'' + P_1 u' + P_0 u = 0$$

$$M[v] \equiv \mathcal{L}^{+}[v] = (P_2 v)'' - (P_1 v)' + P_0 v = 0$$

حال عبارت زیر را حساب کنید:

$$v\mathcal{L}[u] - uM[v] = vP_2u'' - u(P_2v)'' + (vP_1)u' + u(P_1v)'$$

$$= \frac{d}{dx}\left[P_2vu' - (P_2v)'u + P_1uv\right]$$

با انتگرال گیری در بازه $[a,b]$ داریم:

$$\int_a^b \left(v\mathcal{L}[u] - uM[v]\right)dx = \left[P_2vu' - (P_2v)'u + P_1uv\right]_a^b$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اکنون از صورت الحاقی دیده شد M را عملگر الحاقی L در نظر بگیریم اگر فرض کنیم که $|u\rangle, |v\rangle$ بردارهای حقیقی هستند

پس می‌توان نوشت:

$$\langle u|v\rangle = \int_a^b u^* v \, dx$$

پس معادله صفحه قبل را می‌توان نوشت:

$$\langle v|L|u\rangle - \langle u|M|v\rangle = \langle u|L^+|v\rangle^* - \langle u|M|v\rangle$$

$$= \left[P_2 v u' - (P_2 v)' u + P_1 u v \right]_a^b$$

حال اگر سمت راست صفر باشد یعنی

$$\langle u|L^+|v\rangle^* = \langle u|M|v\rangle$$ یعنی

$$\int u L^+ v^* dx =$$ و چون $|u\rangle, |v\rangle$ حقیقی بودند پس

$$\boxed{L^+ = M}$$ توجه شود که در اینجا الحاقی و البته خودالحاقی در چارچوب یک شرط مرزی نوشته شود

بسیار مهم است که ما شاهد هستیم که جواب‌های معادله هرچند در شرط مرزی صدق می‌کنند ولی در شرط مرزی معادله الحاقی صدق نمی‌کنند
شرط مرزی صدق نمی‌کنند

Self_adjoint

اگر

$$M[v] \equiv L^+[v] = L[v]$$

آنگاه می‌گوییم عملگر یک عملگر خودالحاقی است

① $L[y] = P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = 0$

$M[y] = (P_2 y)'' - (P_1 y)' + P_0 y = 0$

③ $M[y] = P_2 y'' + (2P_2' - P_1) y' + (P_2'' - P_1' + P_0) y = 0$

با مقایسه ① و ③ داریم

$2P_2' - P_1 = P_1 \to P_2' = P_1$ یعنی

$P_2'' - P_1' + P_0 = P_0 \to P_2'' = P_1'$

پس اگر شرط خودالحاقی بودن

شرط خودالحاقی: $P_2' = P_1$

Subject:
Year. Month. Date. () Sturm-Liouville

تعریف: برای یک عملگر خودالحاقی داریم. (operater)

$$\bar{L}y = Ly = \frac{d}{dx}\left[P_2 \frac{dy}{dx}\right] + P_0 y$$

آیا می‌توان هر معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی را خودالحاقی کرد؟

عبارت را در تابع ضرب کنیم

$$Ly = P_2\frac{d^2}{dx^2}y + P_1\frac{d}{dx}y + P_0 y$$

حال اگر $P_2' \neq P_1$ یعنی خودالحاقی نیست. حال L را در $\frac{f}{P_2}$ ضرب کنیم می‌خواهیم داشت

$$\frac{f}{P_2}P_2 y'' + \frac{fP_1}{P_2}y' + \frac{fP_0}{P_2}y = L'y$$

حال شکل الحاقی L' را می‌نویسیم یعنی

باید برابر بشن هم

$$\bar{L'} = fy'' + \left(2f' - \frac{f}{P_2}P_1\right)y' + \left(f'' - \left(\frac{fP_1}{P_2}\right)' + P_0\right)y$$

حال اگر بخواهیم خودالحاقی باشد یعنی

پس $\bar{L'} = L'$

$$2f' - \frac{f}{P_2}P_1 = f\frac{P_1}{P_2} \rightarrow f = \exp\left[\int_0^x \frac{P_1(x')}{P_2(x')}\,dx'\right]$$

قبل از اینکه جلوتر برویم مطلبی را بگوییم که چرا معادلات خودالحاقی (کامل) (مفید) هستند دلیل آن این است که

۲ دلیل مهم دارد ویژگی‌های مهمی که اشتورم لیوویل اثبات کرد.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Hermitian and Self-adjoint operator

بازم چکار؟

$\mathcal{L}u + \lambda^{w} u = 0$ معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

فرض می‌کنیم $w=1$ و در ادامه آن را در نظر نمی‌گیریم.

که در آن جوابهای آن u و v است.

اگر در نظر بگیریم

$$\mathcal{L} \equiv P_2 \frac{d^2}{dx^2} + P_1 \frac{d}{dx} + P_0$$

$$\bar{\mathcal{L}}u = \frac{d^2}{dx^2}(P_2 u) - \frac{d}{dx}(P_1 u) + P_0 u$$

اگر $\mathcal{L}$ خودالحاق باشد یعنی $\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}}$ پس داریم:

$$=$$

$$\bar{\mathcal{L}}u = \mathcal{L}u = \frac{d}{dx}\left[P_2 \frac{du}{dx}\right] + P_0 u$$

بشرطی که $P_2' = P_1$ یعنی فقط در این حالت عملگر خودالحاقی می‌باشد. ندارای یک سری شرایط مرزی است.

حال عبارت زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_a^b v^* \mathcal{L}u \, dx = \int_a^b v^* \left\{ (P_2 u')' + P_0 u \right\} dx$$

$$= \int_a^b v^* (P_2 u')' dx + \int_a^b v^* P_0 u \, dx$$

$v^* P_2 u' \Big|_a^b = 0$ با توجه به شرایط مرزی

$$= v^* P_2 u' \Big|_a^b - \int v^{*\prime} P_2 u' \, dx + \int_a^b v^* P_0 u \, dx$$

$$= 0 - v^{*\prime} P_2 u \Big|_a^b + \int_a^b u (P_2 v^{*\prime})' dx + \int_a^b v^* P_0 u \, dx$$

$$\int_a^b v^* \mathcal{L}u \, dx = \int_a^b u (P_2 v^{*\prime})' dx + \int_a^b v^* P_0 u \, dx$$ پس

خود الحاقی با اعمال شرایط مرزی این عبارت نتیجه

$$\boxed{\int_a^b v^* \mathcal{L}u \, dx = \int_a^b u (\mathcal{L}v)^* dx}$$

یعنی اگر انتگرال بگیریم

$$\int_a^b v^* \bar{\mathcal{L}} u \, dx = \left[\int u^* \mathcal{L} v \, dx \right]^* = \int v^* \mathcal{L} u \, dx$$

$$\int v^* \mathcal{L} u \, dx = \langle v | \mathcal{L} | u \rangle = \langle u | \bar{\mathcal{L}} | v \rangle^* = \langle u | \mathcal{L} | v \rangle^* \Rightarrow \mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

زمانی که $\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}}$ در شرایط مرزی مشخص که مبنی این باشد که $\mathcal{L}$ هرمیتی است که هرمیتی به همراه شرایط مرزی

یعنی خودالحاقی. یعنی خودالحاقی عام‌تر است و این معنی خودالحاقی که هرمیتی خودالحاقی است ولی هر خودالحاقی هرمیتی نیست

توضیح کلیتر عملگر $\mathcal{L}$ را با شرط هرمیتی گوییم که

$$\int \psi_1^* \mathcal{L} \psi_2 \, dx = \int (\mathcal{L}\psi_1)^* \psi_2 \, dx = \int \psi_1^* \bar{\mathcal{L}} \psi_2 \, dx$$

$\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}}$ و

عملگر A الحاقی است اگر در حقیقت عملگر A^+ عملگر الحاقی A است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int \psi_1^* A^+ \psi_2 \, dx = \int (A\psi_1)^* \psi_2 \, dx$$

هر الحاقی هرمیتی است ولی هر هرمیتی الحاقی نیست

مقدار انتظاری

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \int \psi^* \mathcal{L} \psi \, dx$$

$$\langle \mathcal{L} \rangle^* = \left[\int \psi^* \mathcal{L} \psi \, dx \right]^*$$

$$= \int \psi \mathcal{L}^* \psi^* \, dx$$

$$= \underbrace{\int (\mathcal{L}\psi)^* \psi \, dx}_{} = \int \psi^* \mathcal{L} \psi \, dx = \langle \mathcal{L} \rangle$$

با خیلی ساده‌تر مقدار این عبارت دقت:

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \int \psi^* \mathcal{L} \psi \, dx$$

$$\langle \mathcal{L} \rangle^* = \left[\int \psi^* \mathcal{L} \psi \, dx \right]^* = \int \psi (\mathcal{L}\psi)^* dx$$

$$= \int \ldots (\mathcal{L}\psi)^* \psi \, dx = \int (\mathcal{L}\psi)^* \psi \, dx$$

$$= \int \psi^* \mathcal{L}^+ \psi$$

$$= \int \psi^* \mathcal{L} \psi = \langle \mathcal{L} \rangle$$

یعنی هرمیتی. - حال از عبارت بالا صفحه که الحاقی نیستیم

$$\int \psi_1^* \mathcal{L} \psi_2 = \int (\mathcal{L}\psi_1)^* \psi_2$$

$$\int \psi^* \mathcal{L} \psi$$ یعنی کشترزیر

Subject :
Year. Month. Date. ( )

حال اگر روی این ویژگی ها تخصیص عملگر هرمیتی و خودالحاقی فرض کنیم می‌توان ثابت کرد که هر عملگر هرمیتی یا خودالحاقی

دارای ۳ خواص زیر هستند : توجه شود که عملگر هرمیتی، خودالحاقی به همراه شرایط مرزی گذشته می‌باشد

① ویژه مقادیر عملگر هرمیتی حقیقی هستند — Real Eigen value

② ویژه توابع " " متعامدند — orthogonal Eigen func

③ " " " " یک مجموعه کامل را تشکیل می‌دهند — Completeness set

---

① توجه $W=1$ در نظر گرفته‌ام

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_i + \lambda_i u_i = 0 \xrightarrow{\times u_j^*} \\ \mathcal{L}u_j + \lambda_j u_j = 0 \longrightarrow (\mathcal{L}u_j)^* + \lambda_j^* u_j^* = 0 \xrightarrow{\times u_i} \end{cases}$$

در u_j^* ضرب می‌کنیم

از هم کم کنیم

در اینجا فرض شود که واگنی نباشد یعنی $\lambda_i \neq \lambda_j$ اگر $i \neq j$

$$u_j^* \mathcal{L}u_i - u_i(\mathcal{L}u_j)^* = (\lambda_j^* - \lambda_i)\, u_i u_j^*$$

حال انتگرال می‌گیریم یعنی

$$\int_a^b u_j^* \mathcal{L}u_i \, dx - \int_a^b u_i(\mathcal{L}u_j)^* = (\lambda_j^* - \lambda_i)\int_a^b u_i u_j^* \, dx$$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}^+$ چون ← $\int_a^b u_j^* \mathcal{L} u_i \, dx - \int_a^b u_j^* \mathcal{L}^+ u_i \, dx =$ "

پس این سمت چپ صفر است

$$0 = (\lambda_j^* - \lambda_i)\int_a^b u_i u_j^* \, dx$$

نتیجه هم هست

$$0 = (\lambda_j^* - \lambda_i)\int_a^b u_i u_j^* \, dx$$

حال اگر $i = j$ باشد $\lambda_i = \lambda_i^*$ یعنی حقیقی است.

$i \neq j$. $\int u_i u_j^* \, dx = 0$ یعنی متعامد هستند. البته در نظر گرفتیم که ویژه‌ها واگن نباشند

تا اینجا ۲ خاصیت را بررسی کردیم در حالتی که تبهگنی باشد هنوز اشاره نکرده‌ام که متعامد هستند یا نه ولی نکته‌ای که باید توجه کرد این است

در حالت تبهگنی متعامد نیستند ولی همیشه می‌توان یک ترکیب خطی پیدا کرد که ویژه حالت‌ها را متعامد کرد که در ادامه فرا خواهیم گرفت این روش را.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

شرایط مرزی.

① Cauchy Boundary Condition

$f|_a = \checkmark$

$\frac{\partial f}{\partial n}|_a = \checkmark$

بسته به الکترواستاتیک آن

② Drichlet Boundary $f|_a = \checkmark$ $\phi|_a = \checkmark$

③ Neumann Boundary $\frac{\partial f}{\partial n}|_a = \checkmark$ $\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\vec{E}\cdot\hat{n} = -\sigma$

قبل از اینکه بحث کامل بودن را مطرح کنیم چند جمله‌ای گرام اشمیت را معرفی کنیم.

PAPCO

1340

section 4

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Some Important Sturm-Liouville operators

① Legendre Eq

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + l(l+1)x = 0$$

$P_2(x) = 1-x^2$ $\quad P_1 = P_2' = -2x$

$P_0(x) = 0$ $\quad \lambda = l(l+1)$

② Associated Legendre Eq.

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + l(l+1)y - \frac{m}{1-x^2}y = 0$$

$P_2 = (1-x^2)$

$P_1 = P_2' = -2x$

$P_0 = -\frac{m}{(1-x^2)}$

$\lambda = l(l+1)$

③ Bessel Eq. $\quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2-n^2)y = 0$

$P_2(x) = x^2$

$P_1(x) = -x^2$

$\lambda = -n^2$

④ Simple Harmonic oscillator.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$$

$P_2 = 1$

$P_0 = 1$

$\lambda = \omega^2$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(5) Laguerre Eq. $x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}+\alpha y=0$

Self-adjoint Eq $\rightarrow$ $P_2=xe^{-x}$

$P_0=0$

$w=e^{-x}$

$\lambda=\alpha$

(6) Associated Laguerre Eq

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(k+1-x)\frac{dy}{dx}+(\alpha-k)y=0$$

(7) Hypergeometric Eq.

$$x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0$$

$$P_2=\left(\frac{x}{1-x}\right)^c(1-x)^{a+b+1}$$

$P_0=0$

$$w=\frac{P_2(x)}{x(1-x)}$$

$\lambda=-ab$

(8) Chebyshev Eq

$$x(1-x)y''+[\tfrac{1}{2}-x]u'n^2u=0 \rightarrow (1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}-z\frac{dy}{dz}+n^2y=0$$

$P_2(z)=(1-z^2)^{1/2}$

$$w(z)=\frac{1}{P_2(z)}$$

$\lambda=n^2$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

10.3 Gram - Schmidt orthogonalization

متعامدسازی گرام اشمیت:

در این بخش می‌خواهیم یک سری توابع مستقل خطی (یعنی $\underset{\text{بردار}}{x_1 a_1} + \underset{\text{بردار}}{x_2 a_2} = 0$ طوری که $x_1 = x_2 = 0$)

توابعی متعامد و بهنجار بسازیم. قبل از اینکه شروع Normalization را مطرح می‌کنیم یعنی

$$\int_a^b \varphi_i^2 \, w \, dx = N_i^2 \rightarrow \varphi_i \rightarrow \varphi_i' = \frac{\varphi_i}{\sqrt{N_i}}$$

$$\int_a^b \varphi_i'^2 \, w \, dx = \int_a^b \frac{\varphi_i^2}{N_i^2} w \, dx = \frac{N_i^2}{N_i^2} = 1$$

بهنجار

$u_n(x)$		ψ_n		φ_n
linearly independent	$\Rightarrow$	linearly independent	$\Rightarrow$	linearly independent
Non-orthogonal		orthogonal		orthogonal.
Un-Normalized		Un-Normalized.		Normalized.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) = 0 \\ a_1 = a_2 = 0 \\ \int_a^b u_i^2(x) \, dx \neq 1 \\ \int_a^b u_i(x) u_j(x) \, dx \neq \delta_{ij} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 = 0 \\ a_1 = a_2 = 0 \\ \int_a^b \psi_i \psi_j \, dx = \delta_{ij} \\ \int_a^b \psi_i^2 \, dx \neq 1 \end{array} \right\}$$

نحوه کار به صورت زیر است.

(I) for $n = 0$ $\quad \psi_0(x) = u_0(x)$

$$\varphi_0(x) = \frac{\psi_0(x)}{\left[\int_a^b \psi_0^2(x) \, w \, dx \right]^{1/2}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

II $n=1$ $\quad \psi_1(x) = u_1(x) + a_{10}\varphi_0(x)$

که ψ_1 بر φ_0 عمود شده باشد

$$0 = \int_a^b \psi_1^*(x)\,\varphi_0(x)\,w\,dx = \int_a^b u_1^*(x)\,\varphi_0(x)\,w\,dx + \int_a^b a_{10}\,\varphi_0^*(x)\,\varphi_0(x)\,w\,dx$$

نتیجه

$$a_{10} = -\int u_1^*(x)\,\varphi_0(x)\,w\,dx$$

و البته می‌خواهیم بهنجار شده باشد

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\left[\int_a^b \psi_1^2(x)\,w\,dx\right]^{1/2}}$$

III — (ith)

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i}{\left[\int_a^b \psi_i^2(x)\,w\,dx\right]^{1/2}}$$

که در آن

$$\psi_i = u_i(x) + a_{i0}\varphi_0 + a_{i1}\varphi_1 + a_{i2}\varphi_2 + \cdots\ a_{i\,i-1}\varphi_{i-1}$$

$$a_{ij} = -\int u_i^*\,\varphi_j\,w\,dx$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: می‌خواهیم از مجموعه توابع مستقل خطی $u_n(x) = x^n,\ n=0,1,\dots$ در $-1 \le x \le 1$ توابع متعامد نرمال بسازیم

$$u_0 = 1 \longrightarrow \boxed{\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\psi_1 = u_1 + a_{10}\varphi_0 = x + a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_{10} = -\int_{-1}^{+1} u_1^* \varphi_0\, dx = \int_{-1}^{+1} \frac{x}{\sqrt{2}}\, dx = 0$$

$$\psi_1 = x \longrightarrow \varphi_1 = \frac{x}{\left[\int_{-1}^{1} x^2\, dx\right]^{1/2}} = \boxed{x\sqrt{3/2}}$$

و ادامه می‌دهیم،

$$\psi_2 = u_2 + a_{20}\varphi_0 + a_{21}\varphi_1$$

$$= x^2 + a_{20}\frac{1}{\sqrt{2}} + a_{21}\, x\sqrt{3/2}$$

$$a_{20} = -\int_{-1}^{+1} x^2 \frac{1}{\sqrt{2}}\, dx = -\sqrt{2}/3$$

$$a_{21} = -\int_{-1}^{+1} x^3\sqrt{3/2}\, dx = 0$$

$$\boxed{\psi_2 = x^2 - \frac{1}{3}} \longrightarrow \boxed{\varphi_2 = \sqrt{5/2}\,\frac{1}{2}(3x^2-1)}$$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x)$$

که اشاره می‌کنیم به

Legendre - Polynomial

یعنی اگر ادامه دهیم، چندجمله‌ای‌های لژاندر را استخراج می‌کنیم که راه پیچیده‌ای است

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

Subject:
Year. Month. Date. ( )

10.4 Completeness of eigenfunctions of Hermitian operators

سومین خصیصه عملگر هرمیتی این است که ویژه‌توابع آن مجموعه کاملی تشکیل می‌دهند. مفهوم آن این است که هر تابع خوش‌رفتار $f(x)$ را می‌توان، به دقت دلخواه، به سری برحسب آن بسط داد:

و در مشتق‌پذیر

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \rightarrow$$ ویژه‌توابع $\mathcal{L}$ هرمیتی باشد.

$$\mathcal{L}\varphi_n(x)=\lambda_n w\varphi_n(x) \qquad \mathcal{L}\equiv \text{Hermitian operator}$$

به طور دقیق‌تر مجموعه φ_n را کامل گوییم اگر

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b \left[f(x)-\sum_{n=0}^{m}\varphi_n(x)\,a_n\right]^2 dx = 0$$

یعنی خطا به صفر ... میل کند

$$a_n=\int_a^b f(x)\,\varphi_n^*(x)\,w\,dx$$

به شکل برداری می‌توان نوشت:

$$\langle\varphi_n|\varphi_m\rangle=\delta_{nm} \qquad \langle\varphi_n|f\rangle$$

$$\langle\varphi_n|f\rangle=a_n \longrightarrow |f\rangle=\sum a_n|\varphi_n\rangle=\sum|\varphi_n\rangle a_n$$

$$\rightarrow |f\rangle=\sum_n|\varphi_n\rangle\underbrace{\langle\varphi_n|f\rangle}_{a_n}$$

$$|f\rangle=\sum a_n|\varphi_n\rangle$$

پس

$$\sum_n|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|=1 \leftarrow \text{operator}$$

Bessel inequality.

اگر $\varphi_n(x)$ ها یک مجموعه کامل تشکیل ندهند یعنی تعداد اعضای مجموعه محدود باشد نامساوی بسل پدید می آید.

$$A = \hat{e}_1 a_1 + \hat{e}_2 a_2 + \cdots \hat{e}_n a_n$$

$$a_i = \vec{A} \cdot \vec{e}_i$$

$$\left(\vec{A} - \sum_i \hat{e}_i \, a_i \right)^2 \geq 0$$

واضح است اگر $n \to \infty$ پس معادله بالا صفر است. ولی اگر [illegible]

شرط بین نامساوی بالا برقرار است. یعنی

$$A^2 \geq \sum_i a_i^2 \rightarrow \text{نامساوی بسل}$$

حالت پیوسته

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_i a_i \varphi_i \right]^2 w \, dx \geq 0$$

$$\int_a^b f^2(x) w \, dx - 2 \sum_i a_i \underbrace{\int f(x) \varphi_i(x) w \, dx}_{a_i} + \sum_i a_i^2 \geq 0$$

$$\int_a^b f^2(x) \, dx \geq \sum_i a_i^2$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نامساوی شوارتز — Schwarz Inequality — شبیه نامساوی بسل است

معادله درجه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n} a_i^2\left(x+\frac{b_i}{a_i}\right)^2=0$$

که a_i و b_i حقیقی است. اگر $\frac{b_i}{a_i}\equiv d$ داشته باشیم در نتیجه $\boxed{x=-d}$

$$\Rightarrow x^2\underbrace{\sum_i a_i^2}_{a}+2x\underbrace{\sum_i a_i b_i}_{b}+\underbrace{\sum b_i^2}_{c}=0$$

حل معادله درجه دوم با شرط زیر برقرار است

$$\underbrace{a^2b^2\cos^2\theta}_{(a.b)^2\le a^2b^2}\leftarrow\left(\sum a_i b_i\right)^2\leqslant\left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$$

چرا؟ چون اگر $b_i/a_i=c$ یعنی ثابت باشد پس $x=-c$ است اگر b_i/a_i ثابت نباشد پس

در این صورت که x حقیقی نمی‌تواند جواب باشد پس جواب باید مختلط باشد. پس $b^2-4ac\leqslant 0$ باشد که

شرط لازم و کافی

که عبارت فوق می‌گردد

به صورت پیوسته داریم:

$$\left|\int_a^b f^*(x)g(x)\,dx\right|^2\leqslant\int_a^b f^*(x)f(x)\,dx\int_a^b g^*(x)g(x)\,dx$$

برای اثبات این شکل از نامساوی شوارتز [illegible].

اینجا $\psi(x)=f(x)+\lambda g(x)$ $\quad\lambda: cte\to$ Imaginary

$$\int_a^b\psi^*\psi\,dx=\int_a^b f^*f\,dx+\lambda\int_a^b f^*g\,dx+\lambda^*\int g^*f\,dx$$

$$+\lambda\lambda^*\int_a^b g^*g\,dx\geqslant 0\longrightarrow\psi\psi^*$$ چون که مثبت است

حالا λ را Extremum کردن [illegible] حالا می‌خواهیم عبارت $\int\psi\psi^*$ را اکسترمم کنیم.

$$\frac{\partial}{\partial\lambda^*}\int\psi^*\psi\,dx=\int_a^b g^*f\,dx+\lambda\int g^*g\,dx=0$$

$$\lambda=-\frac{\int_a^b g^*f\,dx}{\int_a^b g^*g\,dx}\,,\qquad\lambda^*=-\frac{\int_a^b f^*g\,dx}{\int g^*g\,dx}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال ما دو تعریف معادله اصلی کار کردیم، و حال اصلی به این آید:

پس بنویسیم

$$\langle f|g\rangle = \int f^* g \, dx$$

نامساوی شوارتز به صورت است:

$$|\langle f|g\rangle|^2 \leq \langle f|f\rangle \langle g|g\rangle$$

Delta-Dirac funct.

می‌خواهیم که یک مجموعه کامل توابع متعامد داشته باشیم که در تابع دلتا را بسط دهیم

$$\delta(x-t) = \sum a_n(t)\, \varphi_n(x)$$

$$a_m(t) = \int_a^b \delta(x-t)\, \varphi_m(x)\, dx = \varphi_m(t)$$

پس

$$\delta(x-t) = \sum_n \varphi_n(x)\, \varphi_n(t)$$

حال کاربرد آن چیست:

$$\int F(t)\, \delta(t-x)\, dx = \int \sum_{p=0}^{\infty} a_p \varphi_p(t) \sum_{n=0} \varphi_n(x)\, \varphi_m(t)\, dt$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} a_p \varphi_p(x)$$

یعنی نمایش سری تابع δ نوشتیم خواص آن را نشان می‌دهد. و جالب است

تمرین: ثابت کنید در خصوص معادلات اشترم لیوویل کسب خواهد شد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Recall.

$$\Gamma(Z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots n}{Z(Z+1) \cdots (Z+n)} n^{Z} \qquad Z \neq 0, -1, -2,$$

$$\Gamma(Z+1) = Z\,\Gamma(Z)$$

$$(Z-1)! = \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{Z-1}\, dt$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = Z e^{\gamma Z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + Z/n) e^{-Z/n}$$

$$\Gamma(Z)\Gamma(1-Z) = \frac{\pi}{\sin \pi Z}$$

$$\Gamma(1+Z)\,\Gamma(Z+1/2) = 2^{-2Z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2Z+1)$$ Legendre's Duplication formula

البته رابطه را از روی تابع Beta استخراج کرد

Subject:
Year. Month. Date. ( )