الگوریتم جستجو گِرُوِر [1]

لو گرور این الگوریتم را در سال ۱۹۹۶ مطرح کرد. الگوریتم جستجو گِرُوِر یک الگوریتم کوانتومی برای جستجو در یک پایگاه داده نامرتب دارای N عضو، با تعداد محاسبات $O(\sqrt{N})$ و در فضای ذخیره‌سازی $O(\log(N))$ است [1] و به‌طور حدی، سریع‌ترین الگوریتم قابل پیاده‌سازی برای جستجوی پایگاه دادهٔ نامرتب روی یک رایانه کوانتومی است.[2]

من برای توضیح الگوریتم جستجو گرور ابتدا یک مثال ساده میزنم تا با نحوه ی کارکرد خود الگریتم گرور بیشتر آشنا شوید ،سپس به سراغ پیاده سازی این الگوریتم روی یک دایره ی واحد میرویم ،تا کم کم آماده ی پیاده سازیه این الگوریتم با استفاده از بیت های کوانتومی و مدار های کوانتومی شوید . و در اخر هم به حل ۲ مسئله ی واقعی یعنی برش بیشینه [2] و گراف دوبخشی [3] با استفاده از الگوریتم جستجو گِرُوِر میرویم تا قدرت این الگوریتم را درک کنیم .

نحوه ی کارکرد الگوریتم جستجو گرور [3]

با یک مثال شروع می‌کنم .یک لیست هشت تایی را در نظر بگیرد که تمام آن ها دارای مقدار یک هستند .در این الگوریتم همیشه داده ها در یکی از این دو دسته قرار می‌گیرند :

1. علامت گزاری شده [4]
2. علامت گذاری نشده [5]

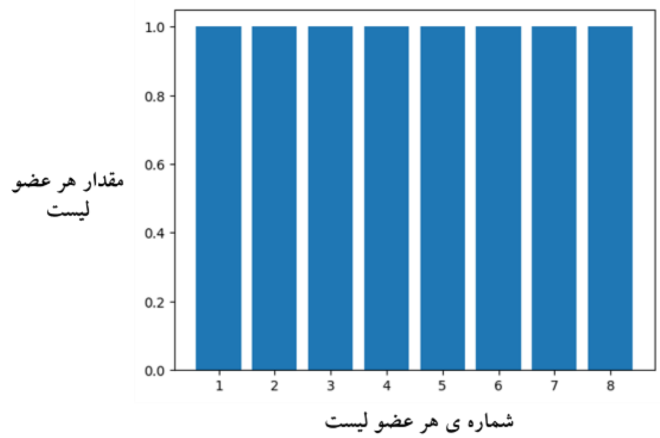
جواب یا جواب هایی که به دنبالشان هستیم در دسته ی علامت گزاری شده ها قرار دارند که در این مثال، مثلا داده ی شماره ی ۴ را فقط در دسته ی علامت گزاری شده ها قرار میدهیم و بقیه در دسته ی علامت گزاری نشده ها قرار میگیرند.این الگوریتم به طور کلی از دو بخش **پرس و جو** [6] و **وارونگی** [7] تشکیل شده است که این دو بخش مرتبا تا پیدا شدن جواب تکرار می‌شوند.

- پرس و جو : در این مرحله از تمام حالت های علامت گذاری شده و نشده درباره ی قرار گیری در دسته ی علامت گذاری شده ها سوال میشود و تنها عناصر علامت گذاری شده شناسایی شده و سپس علامت آن‌ها را قرینه می‌شود .
- وارونگی : در این مرحله، مقدار هر عنصر را نسبت به میانگین همه مقادیر منعکس می‌کنیم.

در مثالی که زدیم ،در ابتدا احتمال مقدار تمام داده ها یک است و میتوان به صورت شکل ۱ ان را نشان دهیم .

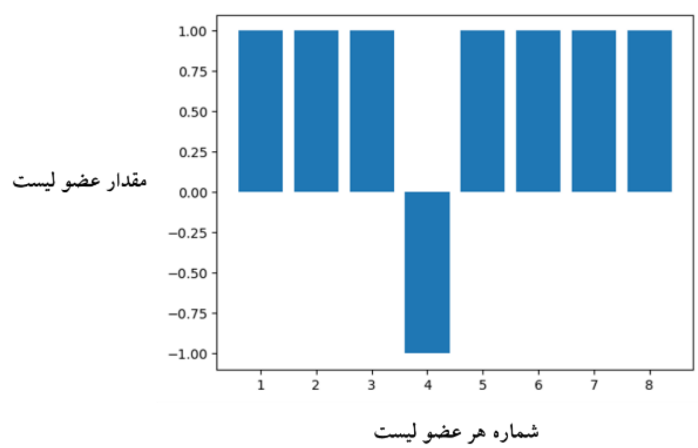
---

[1] Grover's algorithm
[2] Maximum cut
[3] Bipartite graph
[4] Marked
[5] Unmarked
[6] Query
[7] Inversion



شکل ۱ : در این شکل ۸ عضو درون لیست و مقدار اولیه ی ان ها را نشان داده ایم

حال یک بار، دو مرحله ی الگوریتم گرور را روی اعضای لیست اعمال میکنیم . در مرحله ی پرس و جو عضو چهارم که در دسته ی علامت گذاری شده ها قرار دارد ، قرینه میشود (شکل 2) .

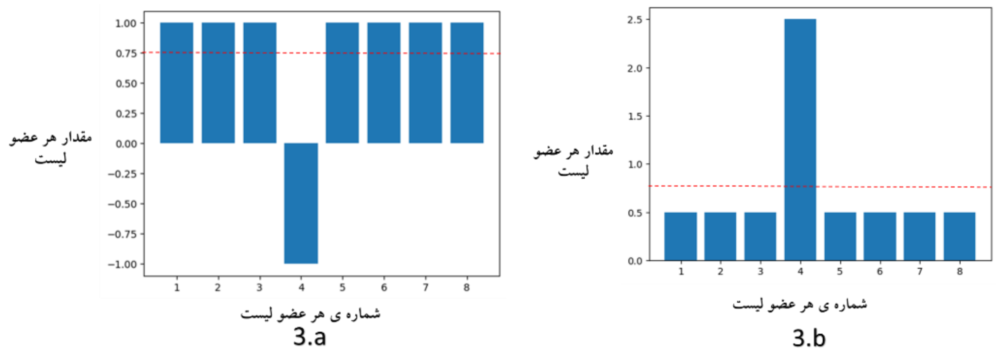


شکل ۲ : اعمال الگوریتم پرس و جو روی داده های لیست برای نخستین بار

در مرحله ی وارونگی تمام اعضای لیست نسبت به میانگین با رابطه ی (ا) مانند شکل 3 قرینه میشوند.

میانگین اعضای لیست$=\frac{(1+1+1+(-1)+1+1+1+1)}{8} = 0.75$

(ا) (مقدار هر عضو - میانگین اعضای لیست)+ میانگین اعضای لیست= قرینه ی هر عضو نسبت به میانگین

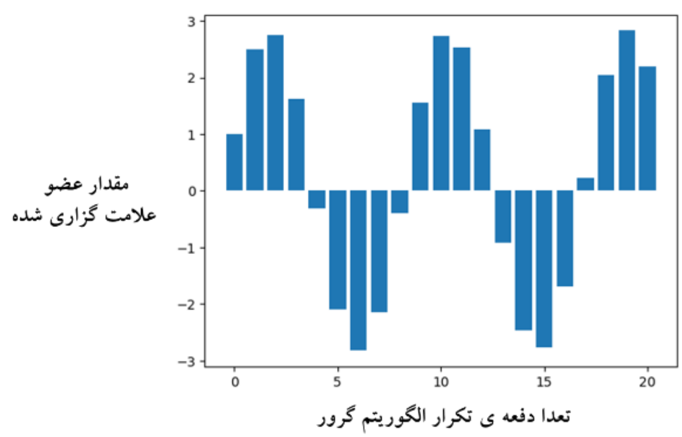


شکل ۳ : در شکل 3.a میاننگین داده ها را بعد از اعمال الگوریتم پرس و جو با خط چین قرمز نشان داده شده اند. .در شکل 3.b با استفاده از رابطه ی (۱) تک تک اعضای لیست بعد از اعمال پرس و جو قرینه شده اند و همان طورکه میبینید داد هی علامت گزاری شده دارای مقدار بیشتری شده است و از بقیه ی اعضا قابل تشخیص است .

همان طور که میبینید داده ی علامت گزاری شده دارای مقدار بیشتری شده است و از بقیه ی اعضا قابل تشخیص است .

اما سوالی که در این جا پیش میاید این است که چند دفعه باید این دو مرحله را تکرار کرد تا اعضای علامت گذاری شده بیشترین تمایز را از اعضای علامت گذاری نشده داشته باشند ؟

برای پاسخ به این سوال من بیست دفعه الگوریتم گرور را روی همان لیست هشتایی با یک عضو علامت گذاری شده تکرار کردم و فقط مقدار عضو علامت گزاری شده را ذخیره کردم و نتیجه شد شکل ۴.



شکل ٤ : مقدار عضو علامت گزاری شده بر حسب تعداد تکرار الگوریتم گرور

همان طور که میبینید تکرار الگوریتم تا یک جایی باعث افزایش تمایز بین اعضای علامت گزاری شده و نشده میشود و از ان جا به بعد اثر معکوس دارد .همچنین در کل یک مقادیر عضو علامت گزاری شده در طول دفعات تکرار الگوریتم از خود رفتار دوره ای نشان میدهد .در مثال ما با یک لیست هشت عضوی که یکی از ان ها علامت گذاری شده تعداد تکرار مناسب با توجه به شکل ۴ ، سه مرتبه است که تقریبا برابر است با $\sqrt{8}$ یا همان $\sqrt{N}$. پس با تقریبا $\sqrt{N}$ مرتبه تکرار الگوریتم عضو علامت گذاری شده دارای بیشترین تمایز با سایر اعضای لیست است .در حالت کلی برای یک لیست N تایی که K تا از ان ها علامت گذاری شده باشند با تکرار الگوریتم گرور به تعداد $\sqrt{\frac{N}{K}}$ اعضای علامت گذاری شده بیشترین تمایز با سایر اعضای لیست را خواهند داشت .

شاید برای شما سوال پیش امده باشد ،ما که در این مثال از اول جواب را میدانستیم و مجهولی وجود نداشته ،اما باید بگویم تا این جا فقط یک مثال ساده برای اشنایی با نحوه ی کار کرد الگوریتم دیدیم و در ادامه در قسمت برش بیشینه و گراف دوبخشی به حل مسائلی میپردازیم که جوابرا نمیدانیم و با کمک الگوریتم گرور جواب را سریع تر از روش های کلاسیکی پیدا میکنیم .

پیاده سازی الگوریتم جستجوی گرور روی یک دایره ی واحد

هدف اصلی در این بخش تبدیل آموخته هایمان در بخش قبل به زبان مدارهای کوانتومی است تا بتوانیم دربخش بعدی الگوریتم جستجوی گرور برای یک مسئله ی واقعی با استفاده از مدار های کوانتومی پیاده کنیم .

فرض کنید یک بردار واحد به صورت زیر داریم که عضو سوم، چهارم وهفتم آن علامت گذاری شده باشند .

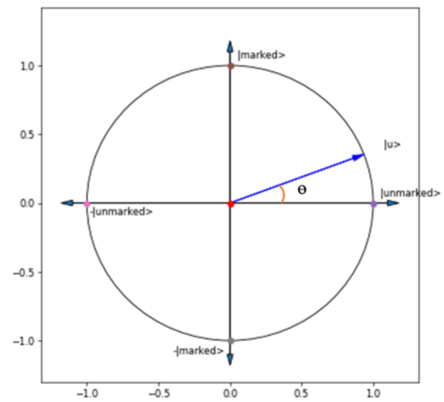
$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\1\\\mathbf{1}\\1\end{pmatrix} \qquad (2)$$

این بردار را می توان به صورت حاصل جمع دو قسمت علامت گذاره شده و علامت گذاری نشده نوشت .

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\1\\\mathbf{1}\\1\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad (3)$$

چون ضرب داخلی ۲ بردار علامت گزاری شده و علامت گزاری نشده صفر است پس بر هم عمودند و اگر ما هر یک را یکه کنیم میتوانیم بردار u را در یک دایره ی واحد که هر یک از محور های آن بردار های علامت گذاری شده ی یکه هستند، مانند شکل ۵ نمایش داد .

$$u\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\1\\\mathbf{1}\\1\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}\,x\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\0\end{pmatrix} + \frac{\sqrt{5}\,x\sqrt{5}}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\0\end{pmatrix} + \frac{5}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{8}}|u_{marked}\rangle + \frac{5}{\sqrt{8}}|u_{unmarked}\rangle$$

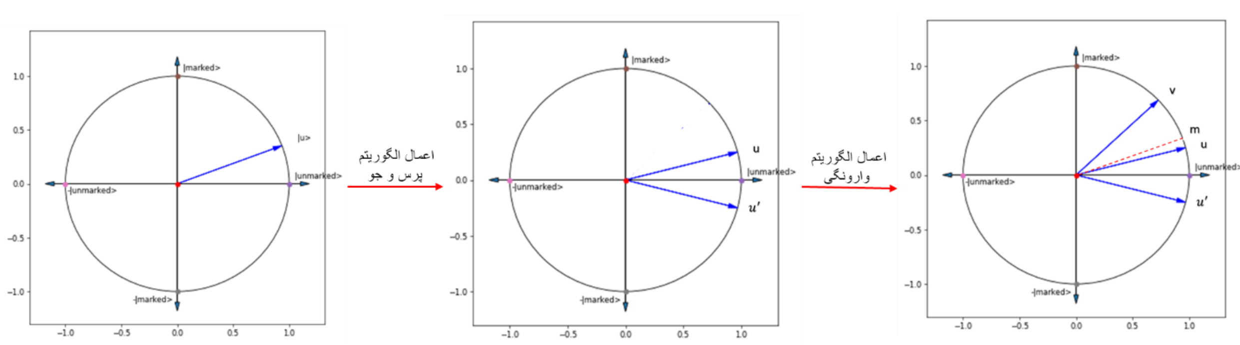


شکل ۵ :نمایش بردار یکه u در فضای بردارهای یکه علامت گذاری شده و علامت گذاری نشده

در شکل شماره ۵ مقدار ɵ از رابطه ی زیر به دست میاید .

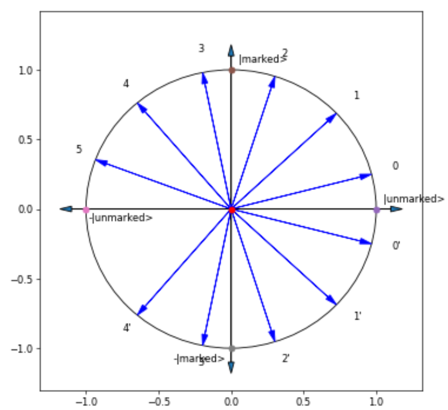
$$|u\rangle \frac{3}{\sqrt{8}}|u_{marked}\rangle + \frac{5}{\sqrt{8}}|u_{unmarked}\rangle \qquad ɵ = tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{\sqrt{8}}}{\frac{5}{\sqrt{8}}}\right) \qquad (4)$$

حال که بردار $|u\rangle$ را توانستیم در پایه های اعضای علامت گذاری شده و علامت گذاری نشده نشان دهیم وقت ان رسیده است که دو مرحله ی تشکیل دهنده‌ی الگوریتم گرور را پیاده سازی کنیم.مرحله‌ی اول پرس و جو است که اعضای علامت گذاری شده را قرینه میکند و این باعث میشود بردار $|u\rangle$ نسبت به محور علامت گزاری نشده ها قرینه شوند و ان را $|u'\rangle$ نشان میدهیم. مرحله‌ی دوم وارونگی است که بردار $|u'\rangle$ نسبت به بردار یکه $|m\rangle$ که اعضای آن حاصل میانگین گیری روی اعضای بردار $|u'\rangle$ هستند، قرینه می‌شود که ان را $|v\rangle$ می‌نامیم. این دو مرحله در شکل ۶ نشان داده شده است .



شکل ٦ : اعمال دو مرحلهی پرس و جوو وارونگی الگوریتم گرور روی بردار u

دو مرحله ی بالا را پنج بار تکرار کرده ایم و شکل بردار $|u\rangle$ را بعد از هر مرحله رسم در شکل ۷ رسم کرده ایم تا ببینیم چه تغییری کرده است.



شکل ۷ : بردار اولیه u را با ۰ نشان داده ایم و بعد از هر مرحله اعمال الگوریتم گرور ان را با ۱ و۲و۳و... نشان دادهایم همچنین $0'$ و $1'$ و... قرینه های بردار های ۰ ۱و... نسبت به محور unmarked هستند.

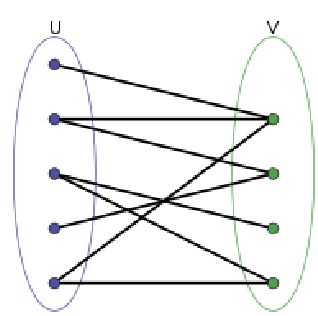
همان طور که در شکل ۷ میبینید بردار شماره سه که حاصل اعمال سه بار الگوریتم گرور روی بردار $|u\rangle$ است و دارای بیشترین تصویر روی محور marked است که این یعنی احتمال بخش علامت گذاری شده در بردار شماره ی سه نسبت به حالت اولیه ی $|u\rangle$ افزایش یافته است و این همان چیزی بود که از الگوریتم گرور انتظار داشتیم . همچنین نتیجه میگیریم تعداد دفعات مناسب برای اعمال این الگوریتم برای رسیدن به بهترین نتیجه برابر است با سه بار است .

پیاده سازی الگوریتم گرور با استفاده از مدار کوانتومی و حل مسئله‌ی گراف دوبخشی

ابتدا مسئله گراف دوبخشی را توضیح میدهیم سپس برای حل آن با استفاده از الگوریتم گرور، پیاده سازی الگوریتم گرور با استفاده از مدار های کوانتومی را خواهیم گفت.

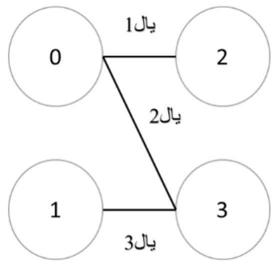
گراف دوبخشی[4]

گراف دو بخشی، گرافی است که می‌توان راس هایش را به دو دسته‌ی u و v تقسیم کرد به طوری که هر یال، یک راس از دسته ی u را به یک راس از دسته ی v وصل کند .



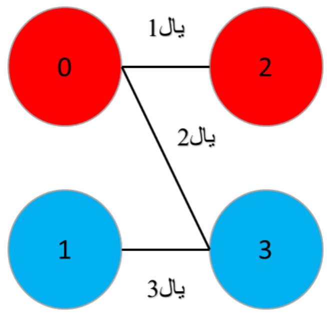
شکل ۸ : مثالی از یک گراف دو بخشی

فرض کنید گرافی مانند شکل ۹ داریم و هدفمان این است راس هایش را طوری رنگ آمیزی کنیم که گرافمان دوبخشی شود.



شکل ۹

فرض کنید فردی به اشتباه گراف شکل ۹ را مانند شکل ۱۰ رنگ امیزی کرده باشد .



شکل ۱۰

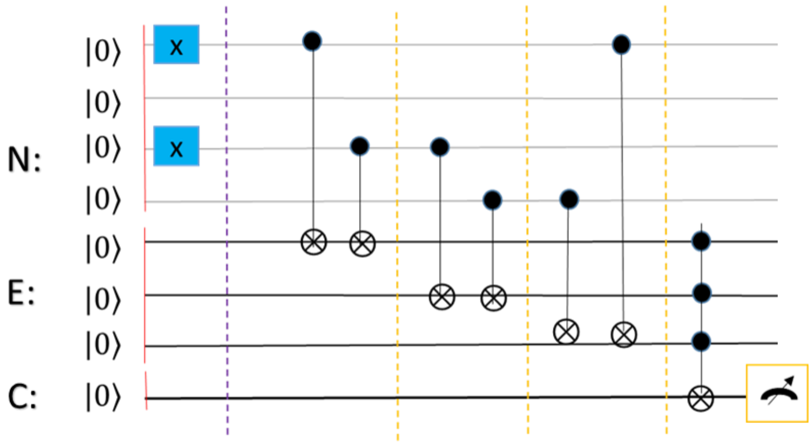
حال میخواهیم مدار کوانتومی ای طراحی کنیم که اگر گراف شکل ۱۰ را به آن بدهیم مشخص کند گراف دوبخشی هست یا نه.ابتدا به تعداد راس هایمان بیت کوانتومی[8] ۰ قرارا می‌دهیم که برای گراف شکل ۱۰ این تعداد چهار تا می‌باشد.و یک کوانتوم بیت را هم به عنوان بیتی که در نهایت با اندازه گیری آن بفهمیم گراف دوبخشی است(اگر مقدارش بعد از اندازه گیری ۱ شود)ویا دوبخشی نیست(اگر مقدارش بعد از اندازه گیری۰ شود) در نظر میگیریم. سپس شرط میکنیم راس قرمز رنگ را با حالت $|0\rangle$ و راس های آبی را با حالت $|1\rangle$ نشان میدهیم و حالت های $|1\rangle$ را با اعمال دروازه‌ی وارونگر روی حالت $|0\rangle$ میسازیم. تا[9] این لحظه راس های گراف را در مدار نشان دادیم نوبت ان است یال های گراف را نشان دهیم . برای این کار باید در نظر داشته باشیم یال ها را طوری نمایش دهیم تا در نهایت بتوانیم بفهمیم ایا به دو سر هر یال راس هایی با رنگ های متفاوت وصل شده است یا خیر .به جدول شماره ۱ نگاه کنید ما باید دروازه یا دروازه های کوانتومی را برای ایفای نقش یال ها پیدا کنیم که شرط موجود در جدول ۱ را ارضا کنند.

جوابی که توقع داریم با توجه به حالت های راس های دوسر هر یال بعد از اعمال دروازه های مربوط به یال داشته باشیم	حالت منتسب به راس انتهایی دوسر یک یال	حالت منتسب به راس ابتدایی دوسر یک یال
۰	۰	۰
۱	۱	۰
۰	۱	۱

جدول ۱

[8] Qbit
[9] Not Gate

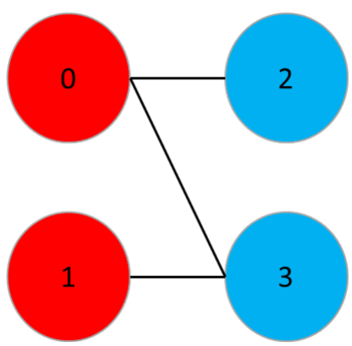
۱ دروازه هایی که بتوانند شرایط بالا را ارضا کنند دو دروازه ی وارونگر کنترل شده   هستند که از هر راس ذو سمت یک یال روی کوانتوم بیتی که برای جواب در مدار قرار داده ایم اعمال شوند.پس تا این لحظه مداری که نشان دهنده‌ی گراف با رنگ آمیزی شکل ۱۰ باشد مانند شکل ۱۱ خواهد بود.



شکل ۱۱ مدارکوانتومی معادل نمایش گراف شکل ۱۰

خروجی مدار بالا از آن جایی که توقع داشتیم • است .

حال اگر رنگ امیزی را به شکل ۱۲ در بیاوریم و مدارا را مطابق این رنگ امیزی تغییر دهیم درقسمت اندازه گیری مقدار ارا اندازه خواهیم گرفت.



شکل ۱۲

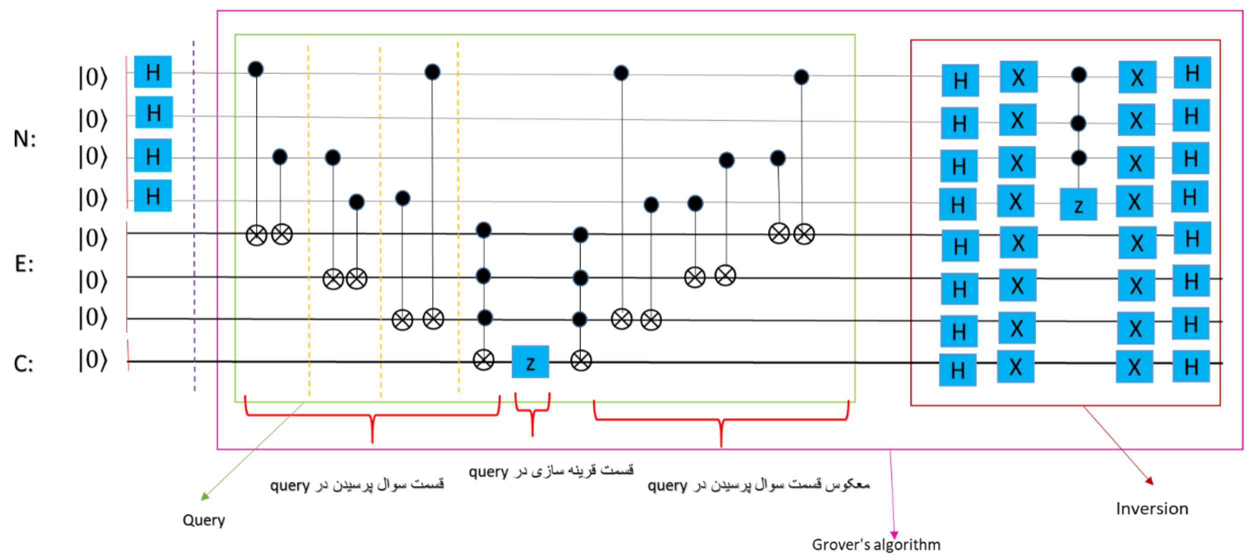
---

[1] Controlled NOT gate   0

حال وقت ان رسیده اولا به جای دادن جواب درست تمام حالت های ممکن برای رنگ امیزیه راس ها در مدار کوانتومی را با اعمال دروازه های ادامار روی حالت های $|0\rangle$ مربوط به راس ها تولید کنیم و سپس الگوریتم گرور را اعمال کنیم .پس در ادامه به چگونه اعمال کردن گرور در مدار کوانتومی برای حل مسئله ی گراف دو بخشی میپردازیم.

پیاده سازی الگوریتم گرور با استفاده از مدار کوانتومی

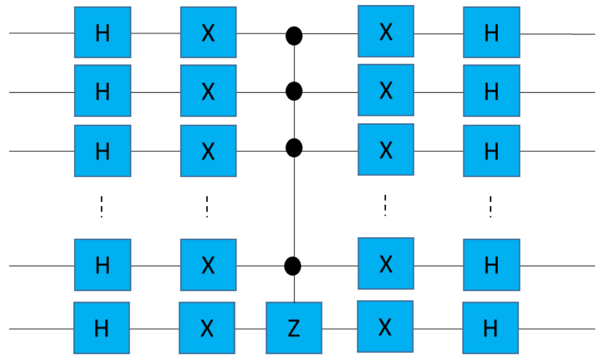
الگوریتم گرور باید روی تمام حالت های ممکن برای جواب ها اعمال شود برای همین مرحله ی اول ساخت تمام جواب های ممکن با اعمال دروازهی ادامار روی تمام کیوبیت های مربوط به راس ها است تا تمام رنگ امیزی هارا ابتدا به صورت برهم نهای ای با احتمال برابر وارد مدار کنیم .در ادامه قصد داریم با اعمال الگوریتم گرور احتمال جواب ها صحیح را افزایش دهیم .الگوریتم گرور از دو بخش پرس وجو و وارونگی تشکیل شده است . بخش پس و جو با توجه به نوع مسئله مشخص میشود و در واقع نوعی اورکل است که باید شامل ۲ بخش پرسیدن سوال و قرینه سازی جواب های صحیح باشد و بخش وارونگی که قرار است بردار قرینه شده بعد از اعمال پرس و جو را نسبت به بردار میانگین ان دوران دهد ماتریس معادل این اتفاق در معادلهی ۵ نشان داده شده است و دروازه های معادل ان در شکل ۱۴ نمایش داده شده اند و دروازه ی متناظر با هر دو بخش پرس و جو و وارونگی در شکل ۱۳ نشان داده شده است.



شکل ۱۳

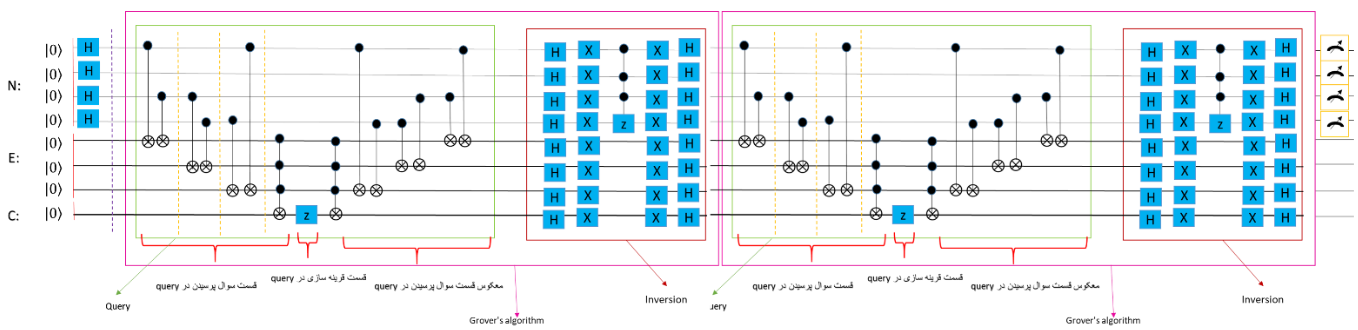
$$I-2\begin{pmatrix}\frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N}\end{pmatrix} \qquad (5)$$

[1] Hadamard Gate 1



شکل ۱٤

مثلا فرض کنید مداری با ۴ تا بیت کوانتومی داشته باشیم(N=16) و از بن تمام حالت هایی که با این مدار کوانتومی میتوان ساخت (۱۶حالت) حالت $|1111\rangle$ جواب ما باشد توقع داریم با اعمال $\sqrt{\frac{N}{K}}\ \sqrt{\frac{16}{4}} \cong 2$ دفعه الگوریتم گرور حالت $|1111\rangle$ بیشترین احتمال را داشته باشد .پس مدار شکل ۱۵را تشکیل میدهیم و ان را ۱۰۰۰ مرتبه اندازه میگیریم .



شکل ۱٥

تعداد دفعاتی که هر کدام از ۱۶ حالت در ۱۰۰۰ دفعه اندازه گیری به دست امده به صورت زیر است :

{'1111': 963, '0011': 6, '1110': 5, '0000': 4, '0010': 4, '1001': 3, '1101': 3, '0101': 3, '1011': 3, '0110': 2, '1010': 1, '0001': 1, '0111': 1, '0100': 1}

همان طور که واظح است جواب مد نظر ما به طرز چشم گیری تعدات دفعات بیشتری مشاهده شده است

منابع

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Grover%27s_algorithm

[2] Grover L.K.: A fast quantum mechanical algorithm for database search, Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, (May 1996) p. 212

[3] https://gitlab.com/qworld/bronze-qiskit

[4]https://fa.wikipedia.org/wiki/%DA%AF%D8%B1%D8%A7%D9%81_%D8%AF%D9%88%D8%A8%D8%AE%D8%B4%DB%8C

[5]