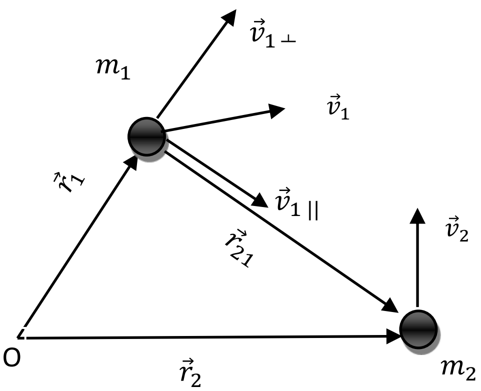
باسمه‌تعالی

امتحان میان‌ترم اول فیزیک ۴ نام و نام خانوادگی: زمان: ۲ ساعت تاریخ: ۱۴۰۲/۱۲/۲۲ ۷۰ نمره

سوال اول:



الف) یک اتم به جرم $m_1 = m$ در راستای x و با سرعت $\overrightarrow{v_1} = v\hat{\imath}$ به طور کشسان با یک اتم ساکن به جرم $m_2 = 3m$ برخورد می‌کند. بعد از برخورد اتم اول در راستای y حرکت می‌کند. فرض کنید ناظری با سرعت مرکز جرم v_{CM} این دو اتم حرکت می‌کند. سرعت اولیه (قبل از برخورد) و ثانویه (پس از برخورد) هر دو اتم را از دید این ناظر بدست آورید. (۵ نمره)

ب) فرض کنید سیستمی مطابق شکل روبرو داریم که در آن $\vec{v}_1$ سرعت اولیه ذره 1 و $\vec{v}_2$ سرعت اولیه ذره 2 است و $\vec{v}_{1\perp}$ سرعت اولیه ذره 1 در راستای عمود بر راستای برخورد و $\vec{v}_{1\parallel}$ سرعت اولیه ذره 1 در راستای موازی برخورد است. با فرض برخورد کشسان و هم‌جرم بودن دو ذره، سرعت هر یک از ذرات را بعد از برخورد، بر حسب مولفه‌های موازی و عمود سرعت‌های اولیه تعیین کنید. (۱۰ نمره)

سوال دوم:

هامیلتونی سیستمی به صورت $H = \sum_{i=1}^{DN}(\alpha p_i^2 + \beta q_i^3)$ تعریف می شود.

الف) متوسط انرژی این سیستم را محاسبه کنید. (۵ نمره)

ب) ظرفیت گرمایی در حجم ثابت C_V را بدست آورید. (۵ نمره)

ج) با قرار دادن $\beta = 0$ ، $\alpha = \frac{1}{2m}$ و D = 3، ظرفیت گرمایی در حجم ثابت C_V و ظرفیت گرمایی در فشار ثابت C_p را بیابید. (۵ نمره)

د) نشان دهید هامیلتونی وابستگی صریح به q, p دارد. (راهنمایی: لاگرانژی برابر است با $L(q,\dot{q}) = T - V$ و $\frac{dL}{d\dot{q}} = p$) (۱۰ نمره)

سوال سوم:

الف) توضیح دهید چگونه می‌توان نشان داد که سیستم مورد بررسی در رژیم کلاسیکی قرار دارد یا در رژیم کوانتومی؟ (۵ نمره)

ب) حال فرض کنید تعداد ذرات در واحد حجم ۲۰۰ بر مترمکعب و جرم ذرات 3×10^{-28} کیلوگرم باشد. بررسی کنید که در دمای اتاق این سیستم در رژیم کلاسیکی قرار دارد یا کوانتومی؟(۵ نمره)

سوال چهارم:

الف) یک دو قطبی مغناطیسی با ممان مغناطیسی μ را در نظر بگیرید که در یک میدان مغناطیسی B متناسب با q (مختصات تعمیم یافته) در راستای z قرار گرفته است . میدان مغناطیسی به این دوقطبی نیروی انتقالی و دورانی وارد می‌کند به گونه ای که در 3 راستای x , y , z دارای حرکت انتقالی و نسبت به محورهای x , y دارای حرکت دورانی است . هامیلتونی این سیستم را بنویسید. (راهنمایی : H = K + U) (۱۰ نمره)

ب) رفتار کلی ظرفیت گرمایی دوقطبی مغناطیسی در حالت پیوسته و در حالت گسسته را بر حسب دما رسم کنید و آنها را با هم مقایسه کنید. (۱۰ نمره)

ابداً خویشتن را محدود به آنچه قدمای ما به آن پرداختند نکنیم و سعی نماییم آنچه را که می توان تکمیل کرد تکمیل کنیم.

ابوریحان بیرونی

موفق باشید

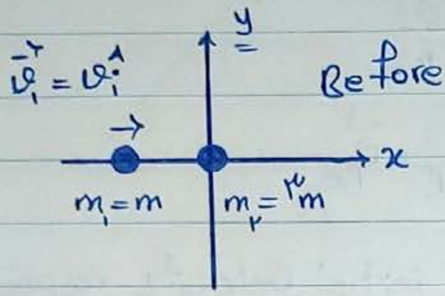
موحد

p1

Midterm exam answers.

Q1:

a)

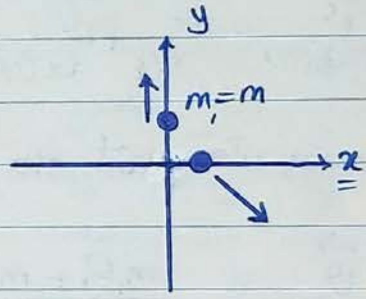


Before collision.

At first we should calculate the direction of second atom and the velocity of both of them.

Momentum Conservation

$\vec{P}_i = \vec{P}_f \rightarrow m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$



$P_{ix} = P_{fx} \Rightarrow m_1 v_1 + 0 = 0 + m_2 v_{2f}\cos\theta$

$P_{iy} = P_{fy} \Rightarrow 0 + 0 = m_1 v_{1f} - m_2 v_{2f}\sin\theta$

$\cancel{m} v_1 = 3\cancel{m} v_{2f}\cos\theta$ and $m_1 = \frac{v_{2f}}{v_{1f}} m_2 \sin\theta$

$\downarrow$

$v = 3v_{2f}\cos\theta$ and $v_{1f} = 3v_{2f}\sin\theta$

$\rightarrow v^2 = 9v_{2f}^2\cos^2\theta$ and $v_{1f}^2 = 9v_{2f}^2\sin^2\theta \rightarrow v^2 + v_{1f}^2 = 9v_{2f}^2$ I

Energy conservation $\rightarrow E_1 = E_2 \rightarrow \frac{1}{2}m_1 v^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m v_{2f}^2$

$v^2 = v_{1f}^2 + 3v_{2f}^2$ II

I and II $\rightarrow v^2 = v_{1f}^2 + \frac{1}{3}v^2 + \frac{1}{3}v_{1f}^2 = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}v^2 = \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}v_{1f}^2 \rightarrow \frac{v^2}{2} = v_{1f}^2$

$v_{1f} = \frac{v}{\sqrt{2}}$ $\rightarrow$ insert in II $\rightarrow v^2 = \frac{v^2}{2} + 3v_{2f}^2 \rightarrow \frac{v^2}{2} = 3v_{2f}^2 \rightarrow v_{2f} = \frac{v}{\sqrt{6}}$

p2

$\vartheta = 3\vartheta_{2f}\cos\theta \to \vartheta = \frac{3\vartheta}{\sqrt{6}}\cos\theta \to \frac{\sqrt{6}}{3} = \cos\theta \to \cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}} \to \theta = 35{,}9^\circ$

$\vec{\vartheta}_{cm_0} = \frac{m_1\vec{\vartheta}_1 + m_2\vec{\vartheta}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m\vartheta + 0}{4m} \to \frac{\vartheta}{4}\hat{i}$

Velocity addition formula $\to \vec{\vartheta}_{AC} = \vec{\vartheta}_{AB} + \vec{\vartheta}_{BC}$

Now, we would like to carculate the initial velocity respect to cM observer.

$\vec{\vartheta}_{AC} = \vec{\vartheta}_{AB} + \vec{\vartheta}_{BC} \to \vec{\vartheta}_{1_i cm} = \vec{\vartheta}_{1_i G} + \vec{\vartheta}_{Gcm} \to \vec{\vartheta}_{1_i cM} = \vartheta\hat{i} + \frac{\vartheta}{4}\hat{i} = 5\vartheta/_4\,\hat{i}$

$\vec{\vartheta}_{2_i cM} = \vec{\vartheta}_{2_i G} + \vec{\vartheta}_{GCM} \Rightarrow \vec{\vartheta}_{2_i cM} = 0 + \vartheta/_4\,\hat{i}$

Now, we want to calaulate it after collision.

$$\vec{\vartheta}_{cM f} = \frac{m_1\vec{\vartheta}_1 + m_2\vec{\vartheta}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m\vartheta/_{\sqrt{2}}\,\hat{j} + 3m(\vartheta/_{\sqrt{6}}\cos\theta\hat{i} - \vartheta/_{\sqrt{6}}\sin\theta\hat{j})}{3m}$$

$$\vec{\vartheta}_{cm f} = \frac{\vartheta}{3\sqrt{2}}\hat{j} + \vartheta\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}\right)$$

$$\vec{\vartheta}_{1fcM} = \vec{\vartheta}_{1fG} + \vec{\vartheta}_{GcM} = \frac{\vartheta}{\sqrt{2}}\hat{j} + \frac{\vartheta}{3\sqrt{2}}\hat{j} + \vartheta\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}\right)$$

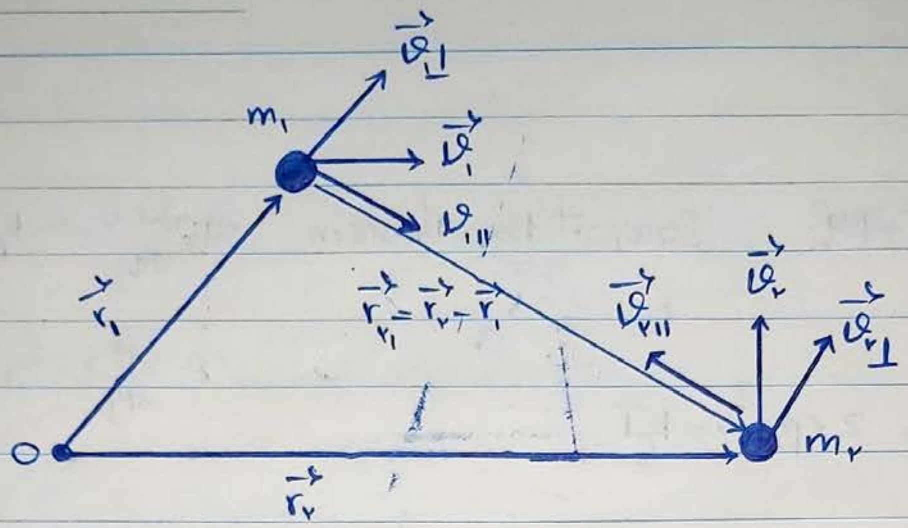
$$= \left(\frac{4}{3\sqrt{2}}\vartheta - \frac{1}{\sqrt{3}}\vartheta\right)\hat{j} + \sqrt{\frac{2}{3}}\vartheta\hat{i}$$

$$\vec{\vartheta}_{2fcM} = \vec{\vartheta}_{2fG} + \vec{\vartheta}_{GcM} = \vartheta\sqrt{\frac{2}{3}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}\vartheta + \frac{\vartheta}{3\sqrt{2}}\hat{j} + \vartheta\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}\right)$$

$$= 2\vartheta\sqrt{\frac{2}{3}}\hat{i} + \vartheta\left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\hat{j}$$

p3:

B1



$\vec{\vartheta}_1 = \vec{\vartheta}_{1\parallel} + \vec{\vartheta}_{1\perp}$ and $\vec{\vartheta}_2 = \vec{\vartheta}_{2\parallel} + \vec{\vartheta}_{2\perp}$ and $|\vec{r}_{21}| = |\vec{r}_{12}| = r$

$m_1 = m_2$ same mass collision.

Before collision: $\vec{\vartheta}_{1\parallel} = \dfrac{\vec{\vartheta}_1 \cdot \vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|}\hat{r}_{21}$, $\vec{\vartheta}_{2\parallel} = \dfrac{\vec{\vartheta}_2 \cdot \vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|} \cdot \hat{r}_{21}$ $\rightarrow$ $\vec{\vartheta}'_{1\parallel} = \vec{\vartheta}_{2\parallel}$ $\vec{\vartheta}'_{1\perp} = \vec{\vartheta}_{1\perp}$ and $\vec{\vartheta}'_{2\parallel} = \vec{\vartheta}_{1\parallel}$ $\vec{\vartheta}'_{2\perp} = \vec{\vartheta}_{2\perp}$

$$\vec{\vartheta}'_1 = \vec{\vartheta}'_{1\parallel} + \vec{\vartheta}'_{1\perp} = \vec{\vartheta}_{2\parallel} + \vec{\vartheta}_{1\perp} = \vec{\vartheta}_{2\parallel} - \vec{\vartheta}_{1\parallel} + \vec{\vartheta}_{1\parallel} + \vec{\vartheta}_{1\perp}$$

$$\hookrightarrow \vec{\vartheta}'_1 = \left((\vec{\vartheta}_2 - \vec{\vartheta}_1) \cdot \hat{r}_{21}\right) \cdot \hat{r}_{21} + \vec{\vartheta}_1 \rightarrow \vec{\vartheta}'_1 = \Delta\vec{\vartheta} + \vec{\vartheta}_1$$

$$\vec{\vartheta}'_2 = \vec{\vartheta}'_{2\parallel} + \vec{\vartheta}'_{2\perp} = \vec{\vartheta}_{1\parallel} + \vec{\vartheta}_{2\perp} = \vec{\vartheta}_{1\parallel} - \vec{\vartheta}_{2\parallel} + \underbrace{\vec{\vartheta}_{2\parallel} + \vec{\vartheta}_{2\perp}}_{\vec{\vartheta}_2}$$

$$\vec{\vartheta}'_2 = -\left((\vec{\vartheta}_2 - \vec{\vartheta}_1) \cdot \hat{r}_{21}\right) \hat{r}_{21} + \vec{\vartheta}_2 \rightarrow \vec{\vartheta}'_2 = -\Delta\vec{\vartheta} + \vec{\vartheta}_2$$

p4:

Q2:

a) $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{DN} \alpha p_i^2 + \beta q_i^3$ Equipartition theorem $\langle q_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \rangle = \delta_{ij} k_B T$

$\langle p_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \rangle = \delta_{ij} k_B T$

$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = 3\beta q_i^2 \rightarrow 3 \langle \beta q_i^3 \rangle = k_B T$

$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = 2\alpha p_i \rightarrow 2 \langle \alpha p_i^2 \rangle = k_B T$

$\langle \mathcal{H} \rangle = \sum_{i=1}^{DN} \frac{k_B T}{4} + \sum_{i=1}^{DN} k_B T/2 \rightarrow DNk_B T \frac{3}{4} \rightarrow C_V = \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial T} = \frac{3}{4} DNk_B$

c) insert $\beta = 0$, $\alpha = \frac{1}{2m}$, $D = 3 \rightarrow \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}$

$\langle q_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \rangle = \delta_{ij} k_B T$ and $\langle p_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \rangle = \delta_{ij} k_B T$

$\langle \mathcal{H} \rangle = \frac{1}{2} \langle p_i^2/m \rangle = k_B T/2 \rightarrow \langle \mathcal{H} \rangle = \frac{3Nk_B T}{2}$

$C_V = \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial T} = \frac{3Nk_B}{2}$ $C_p - C_V = R = Nk_B \rightarrow C_p = C_V + R$

$C_p = \frac{3Nk_B}{2} + Nk_B = 5/2\, Nk_B$

d) $\mathcal{H} = \dot{q}p - L(q,\dot{q}) \rightarrow d\mathcal{H} = \dot{q}dp + \cancel{p d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} dq$

$= d\mathcal{H} = \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial q} dq$

p۵:

Q3:

a) برای اینکه تشخیص دهیم یک سیستم در رژیم کلاسیکی است یا کوانتومی باید $n\ell^3$ را بررسی کنیم.

if $n\ell^3 \ll 1 \rightarrow$ classical regime.

if $n\ell^3 \gg 1 \rightarrow$ Quantum regime.

b) $n = ۲۰۰$, $m = ۳ \times ۱۰^{-۲۸}\ kg$, $k_B = ۱٫۳۸ \times ۱۰^{-۲۳}\ J/K$, $h = ۶٫۶۲۶ \times ۱۰^{-۳۴}\ J.s$

$T_۲ = ۲۵^\circ C \rightarrow ۲۹۸\ K$

$$\ell = \left[\frac{h^۲}{۲\pi m k_B T}\right]^{۱/۲} = \left[\frac{۴۳٫۹۵۴۹ \times ۱۰^{-۶۸}}{۶٫۲۸ \times ۳ \times ۱۰^{-۲۸} \times ۱٫۳۸ \times ۱۰^{-۲۳} \times ۲۹۸}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\left(\frac{۴۳٫۹۵۴۹ \times ۱۰^{-۶۸}}{۲۵٫۹۹۹۲ \times ۱۰^{-۵۱}}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \left[۱٫۶۹ \times ۱۰^{-۱۷}\right]^{۱/۲} \rightarrow ۴٫۱۱ \times ۱۰^{-۹} \ll ۱$$

so the system is in classical regime.

pb:

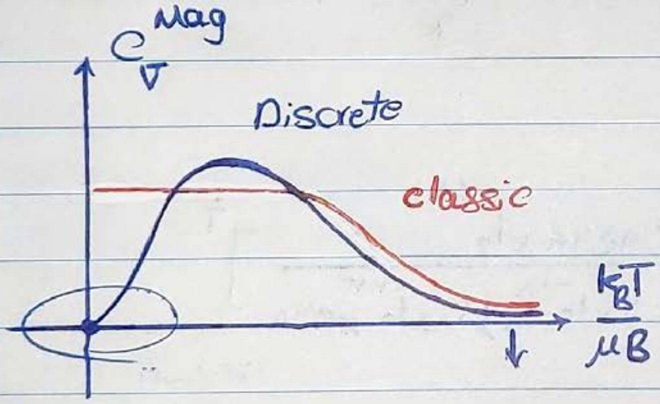
Q۴:

a) $\mathcal{H} = K + U_i \to K = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_x + \omega_y^2 I_y)$

$\to$ and $U_i = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -B\mu\cos\theta \to$ Interaction part

هامیلتونی $\mathcal{H} = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2) - B\mu\cos\theta$

b)



Low Temperature

High temperature

در دماهای بالا افت و خیزهای دمای باعث صفر شدن C_V^M می‌شود، حالت Discrete به سمت حالت کلاسیک میل می‌کند.
در دمای خیلی کم انرژی صفر مناسب برای حالت کلاسیک و سیستم متفاوت است.

$$C_V^{mag} = \frac{\partial \langle \mathcal{H}^{mag} \rangle}{\partial T} \to 0 \quad \text{and} \quad T \to 0 \quad \frac{\partial \langle \mathcal{H}_e^{mag} \rangle}{\partial T} \neq 0$$