بسم الله الرحمن الرحیم

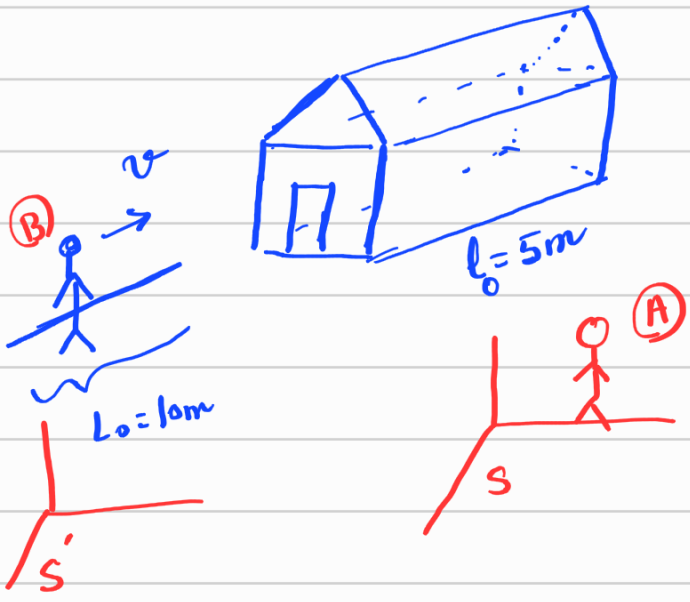
✳ The Pole and Barn Paradox

پارادوکس میله و انبار

مبتنی بر موضوع انقباض طول مطرح می‌شود.

موضوع: یک دونده‌ای یک میله‌ای با طول $L_0 = 10m$ در دست دارد و با سرعت v می‌دود.

یک انبار با سرعت v می‌دود. طول انبار $l_0 = 5m$



① سرعت دونده چقدر باشد که از دید ناظر (A) میله در انبار جا بگیرد

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$5 = 10\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$v/c = 0.866 \rightarrow \boxed{v = 0.866\,c}$$

② از دید ناظر (B) اندازه انبار چقدر است؟

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

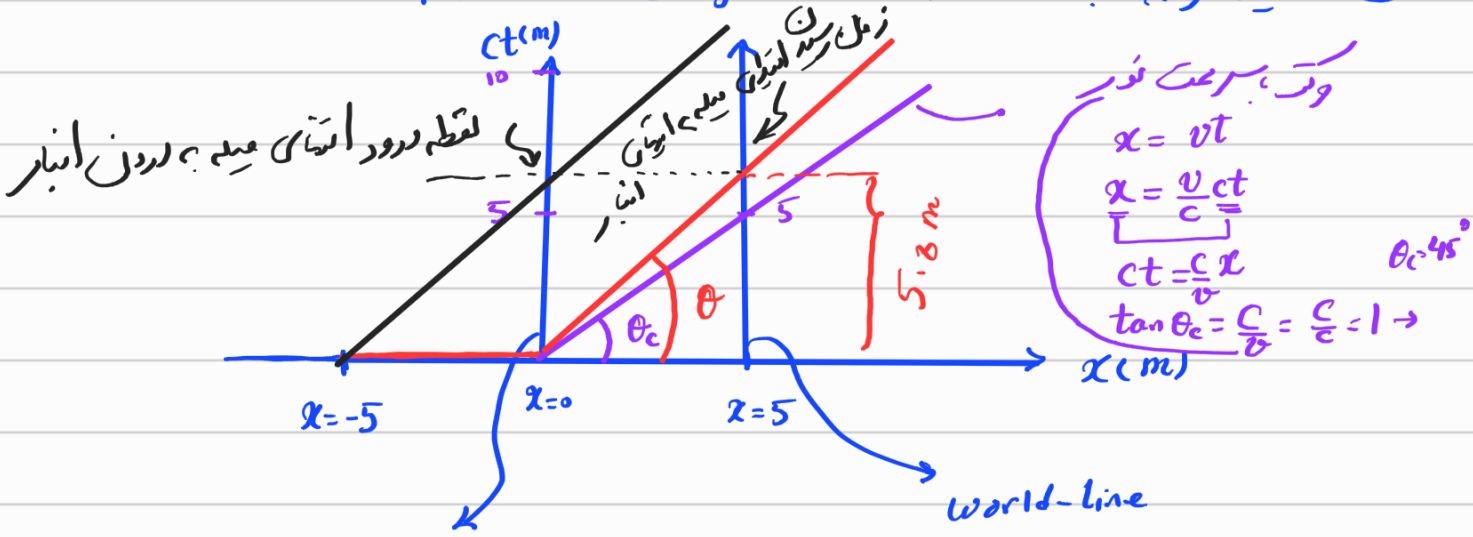
$$2.5m = 5\sqrt{1 - (0.866)^2}$$

③ از دید ناظر (A) میله قطعاً در انبار جا می‌شود ← (ابتدای میله منطبق بر انتهای انبار / انتهای میله منطبق بر ابتدای انبار) بصورت همزمان

اما از دید ناظر B میله در انبار جا نمی‌شود

[تطابق سر میله با انتهای انبار و تطابق انتهای میله با ابتدای انبار] ← (A) (B)

④ از دید ناظر A با استفاده از Space-Time Diagram



وقتی با سرعت نور

$x = vt$

$x = \frac{v}{c} ct$

$ct = \frac{c}{v} x$

$\theta_c = 45^\circ$

$\tan\theta_c = \frac{c}{v} = \frac{c}{c} = 1 \rightarrow$

وقتی با سرعت $v = 0.866c$

$$\begin{cases} x = \frac{v}{c} ct \\ ct = \frac{c}{v} x \\ ct = \frac{1}{0.866} x \end{cases}$$

$5 = 0.866\, ct$

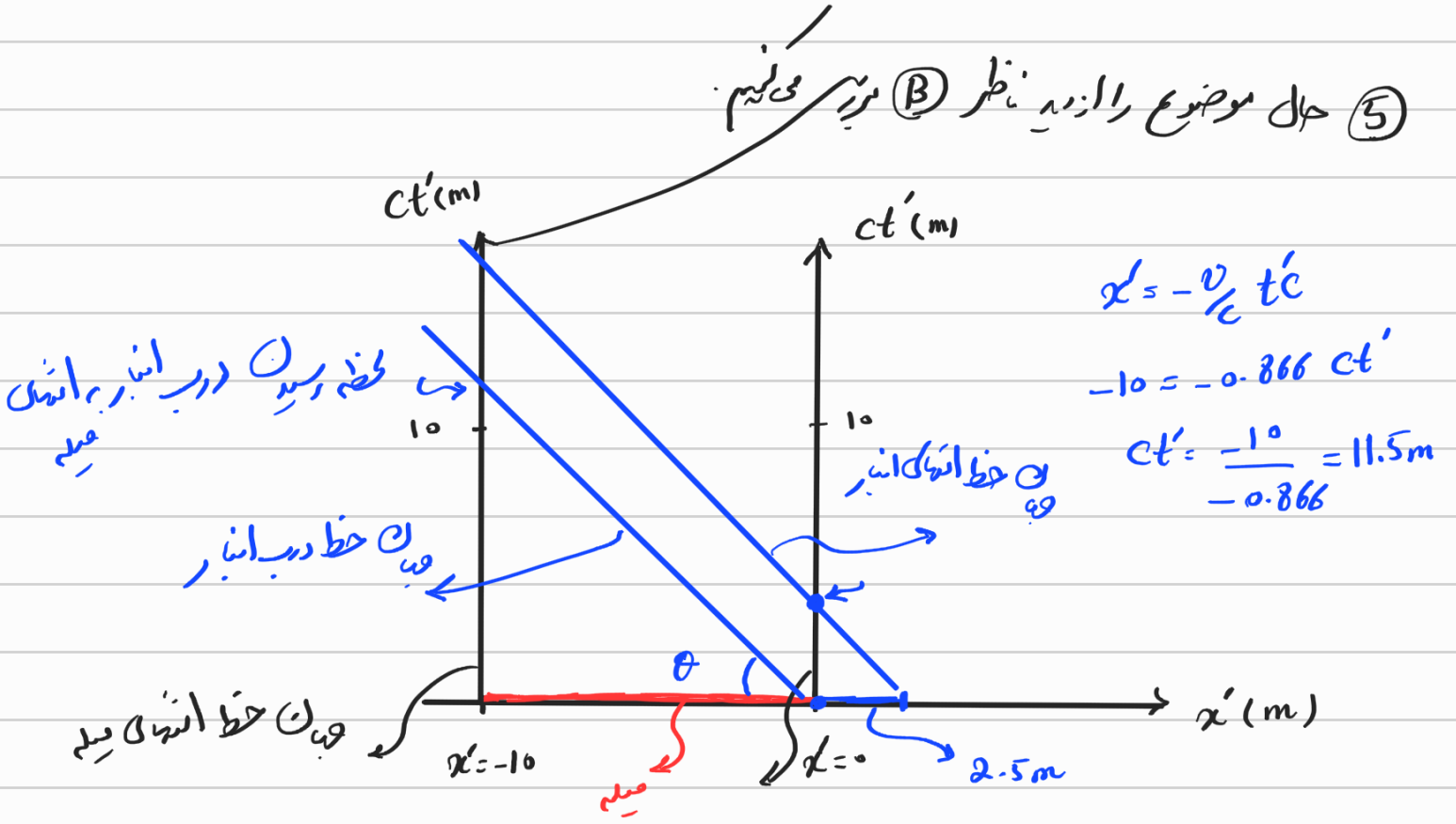
$ct = \frac{5}{0.866} = 5.8\,m$

$\tan\theta = \frac{1}{0.866}$

$\theta = 49.1^\circ$

(یعنی ابتدای میله از دید ناظر A لحظه $t = \frac{5.8\,m}{3\times10^8\,m/s}$ به انتهای انبار می‌رسد)

⑤ حال موضوع را از دید ناظر B بررسی می‌کنیم



$x' = -\frac{v}{c} ct'$

$-10 = -0.866\, ct'$

$ct' = \frac{-10}{-0.866} = 11.5\,m$

طبان خط ابتدای میله

بعد از گذشت $ct' = 11.5\,m$ درب انبار به انتهای میله می رسد.

$$-2.5 = -0.866\,ct'$$

$$ct' = \frac{2.5}{0.866} = 2.9\,m$$

انتهای انبار به ابتدای میله می رسد

نتیجه اینکه انتهای انبار در $ct' = 2.9\,m$ به ابتدای میله می رسد در حالی که هنوز درب انبار به انتهای میله نرسیده است پس از دید ناظر (B) در انبار حبابی شکل می شود. (رسیدن ابتدا و انتهای انبار به انتهای و ابتدای میله همزمان است)

صورت دیگر این باطل نما، صورت زیر مطرح شده است:

فرض کنید انتهای انبار یک دیوار فولادی است حال ناظر (A) و (B) چه می بینند؟

از دید ناظر (A) چون ابتدا و انتهای میله همزمان به انتها و ابتدای انبار می رسد پس میله درون انبار حبابی شکل (حتی در یک لحظه خیلی کوچک) و بعد از آن با فرض اینکه میله نمی شکند حتماً خم می شود.

از دید ناظر (B) چه دیده می شود؟ ناظر (B) طول انبار را $2.5\,m$ دید و با سرعت $v = 0.866c$ به درون انبار می رود.

وقتی انتهای انبار (دیوار فولادی) با سر میله برخوردی کند ابتدای انبار هنوز راه خود را می رود. در آن لحظه درب انبار هنوز $7.5\,m$ راه دارد تا به انتهای میله برسد.

در لحظه ای که سر میله به دیوار فولادی برخوردی کند اطلاعات برخورد در طول میله منتشر می شود

اگر سرعت انتشار موج کشسان حال سرعت c باشد این زمان رسیدن اطلاع از جلوی انتهای میله

$$t_1 = \frac{10\,m}{3\times10^{8}\,m/s} = 3.33\times10^{-8}\,s$$

در این حال ضربه جلوی انبار مسافت 7.5 m را باید طی کند تا به انتهای میله برسد

$$t_2 = \frac{7.5\,m}{0.866\times3\times10^{8}\,m/s} = 2.89\times10^{-8}\,s$$

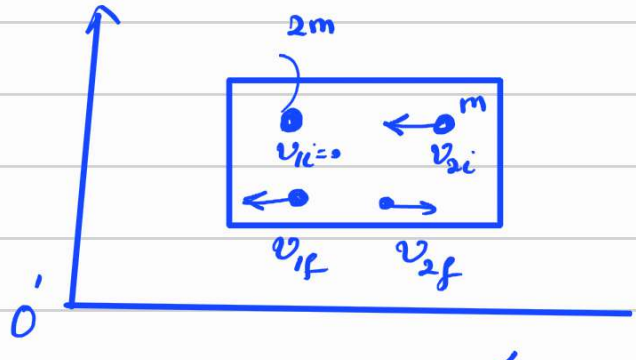
$$t_2 < t_1$$

پس درست در زمانی که طول می‌کشد که میله متوجه شود که باید بایستد ضربه انتهای میله می‌رسد. این میله در انبار 2.5 متری جای می‌گیرد.

2.7 : Relativistic Dynamics

دینامیک نسبیتی

Momentum and Energy Conservation ?



$$\begin{cases} P_i' = m_1 v_{1i}' + m_2 v_{2i}' \\ \quad = 2m(0) + m(-0.75) = \checkmark \end{cases}$$

$$P_f' = m_1 v_{1f}' + m_2 v_{2f}'$$

در دستگاه ساکن $P_i' = P_f'$

$P_i = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$

$P_f = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$

$v_{1i} \leftrightarrow v'_{1i}$

$v_{1f} \leftrightarrow v'_{1f}$

$v_{2i} \leftrightarrow v'_{2i}$

$v_{2f} \leftrightarrow v'_{2f}$

$P_i \neq P_f$

از تبدیلات لورنتس استفاده کنیم

$\vec{P} \longrightarrow \vec{P} = \cancel{m\vec{v}} \longrightarrow$ باید داریم $\vec{P} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

تا سرعت نزدیک به سرعت نور

$$W = \int_{v=0}^{v} F\,dx = \int v\,dp$$

$$= pv - \int p\,dv$$

$$\rightarrow E_K = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \int_0^v dv' \frac{mv'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}$$

$$\rightarrow E_K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2$$

$v^2/c^2 \ll 1$ $\Longrightarrow$ $E_K = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}v^2/c^2\right) - mc^2$

$= \cancel{mc^2} + \frac{1}{2}mv^2 - \cancel{mc^2}$

$$E_K = E - E_0 \quad , E_0 = mc^2$$

$$\text{ώστε } \boxed{E} = E_K + E_0 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4}$$