Subject:
Year. Month. Date. ( )

Chapter 14: Fourier Series.

• ... توابع تناوبی توصیف می‌شوند

• حل توابع و معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی تناوبی
• PDEs

نیز با استفاده سری تناوبی فوریه حل می‌شوند.

Definition: Fourier Series:

رابطه به چه توابعی ... تبدیل شوند ...

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

یک تابع دلخواه ... ، $a_n, b_n \rightarrow$ ضرایب ثابت هستند

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

• اینکه b_0 صفر ... واضح است

• اینکه جمله اول $\frac{a_0}{2}$ ... تعریف ... اگر $f = cts$ ...

$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx = 2 \rightarrow a_0 = 2$

$1 = f = 2/2 = 1$

یا به شکل

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n [\cos nx + i \sin nx]$$

$$= + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n[\cos nx + i \sin nx] + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n[\cos nx + i \sin nx]$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos nx + C_n i \sin nx + C_{-n}\cos nx - C_{-n} i \sin nx$$

$C_0 = \frac{a_0}{2}$,

$C_n + C_{-n} = a_n$

$i[C_n - C_{-n}] = b_n$

$C_n = 1/2 (a_n - i b_n)$

$C_{-n} = 1/2 (a_n + i b_n)$

$n >$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi \delta_{nm} & m \neq 0 \\ 0 & m = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi \delta_{mn} & m \neq 0 \\ 2\pi & m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0$$

این‌ها از روی Sturm-Liouville Theory بدست می‌آیند شرایط مرزی تکرار شونده در رابطه فوق ...

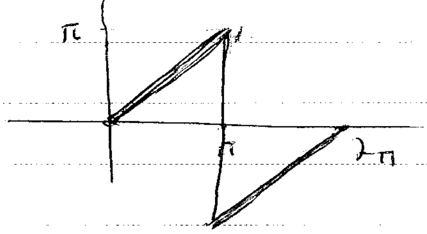
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(t) \cos n(t-x)\, dt$$

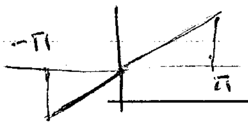
- شرط لازم برای اینکه فوریه وجود داشته باشد این است که f دارای انتگرال محدود باشد.
- گسستگی که اطلاعات حفظ می‌شود.

Ex: Sawtooth wave.



$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ x - 2\pi & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

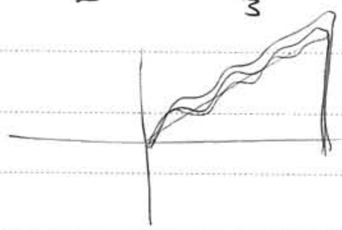
$-\pi < \underset{\sim}{x - 2\pi} < 0$



می‌توان این تابع را در بازه $[0, 2\pi]$ به بازه $[-\pi, \pi]$ منتقل کرد که دارای همان ... است

$f(x) = x \in [-\pi, \pi]$

$$x = f(x) = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \dots\right]$$ بدون



شکل.

توضیح اینکه با افزایش n دقت زیاد می‌شود.

Ex: $x(t) = e^{-\alpha t}$ $\quad x \geq 0$ بدون گسستگی اطلاعات حفظ نخواهد شد.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin\frac{2\pi n t}{T}$$

if $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$

$$a_n \rightarrow A(\omega_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} x(t)\cos\omega_n t\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega_n^2}$$

$$b_n \rightarrow B(\omega_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} x(t)\sin(\omega_n t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$a_0 \rightarrow A(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\, dt = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\pi\alpha}\left(1 - e^{-\infty\alpha}\right)$$ 0

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega_n^2}\cos\omega_n t + \frac{\omega_n}{\alpha^2+\omega_n^2}\sin\omega_n t$$

$$x(0) = \frac{1}{2\pi\alpha}\left(1 - e^{-2\pi\alpha}\right) + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\, d\omega}_{} = \frac{1}{2\pi\alpha}\left(1 - e^{-2\pi\alpha}\right) +$$

$$'' \quad + \frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{\alpha}\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi\alpha} + \frac{1}{2}$$

در حالیکه $x(0) = 1$ در تابع اصلی.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

14.2. Advantages of fourier Series.

① Dis Continuous function.

چرا که بسط فوریه را می‌توان با ناپیوسته بکار برد برعکس بسط تیلور را نه.
البته در کنار تغییرات انتگرالی تبدیل فوریه نشان خواهیم داد که در نواحی مشتق‌ناپذیر اطلاعات از دست می‌رود.

② Periodic functn

البته طبیعتاً وقتی تابعی را داشته باشیم که متناوب باشد بتوانیم آن را توابع پایه فوریه بسط دهیم.

نکته جالب در خصوص توابع زوج و فرد است

$\sin nx \longrightarrow [-\pi, \pi] \longrightarrow$ فرد

$\cos nx \longrightarrow [-\pi, \pi] \longrightarrow$ زوج

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$ زوج پس

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$ فرد

③ نکته بسیار مهم دیگر اینکه بسط‌های فوریه در خصوص توابع متناوب است

بازه $[-\pi, \pi]$ یا $[0, 2\pi]$ برای ما هیچ تفاوتی ندارد که بر روی این بازه حساب کنیم مگر شکل تابع را بر روی بقیه بازه‌ها داشته باشیم.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* Change of Interval.

تاکنون که سری ما بازه $[0, 2\pi]$ بود می‌توان آن را تعمیم داد یعنی:

$[0, 2\pi] \to [0, 2L]$ or $[-L, L]$

$\cos nx \to \cos \frac{n\pi x}{L} = \cos \omega x$

$\omega = \frac{n\pi}{L}$

$\frac{\pi}{L} = \Delta\omega$

در بازه $2L$ داریم پس

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} \, dt \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} \, dt \qquad n = 1, \ldots$$

$L = \frac{\pi}{\Delta\omega}$

در حالت $L \to \infty$ یعنی

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^{+L} f(t) \cos \omega (t - x) \, dt$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n} \Delta\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega (t - x) \, dt$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega (t - x) \, dt$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega (t - x) \, dt$$

چون تابع زوج بود دو برابر کردیم

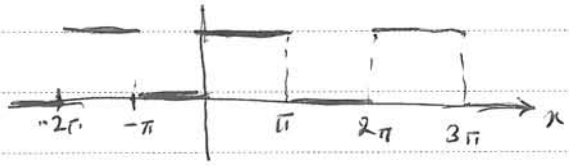
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \, d\omega \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} \, dt}_{F(\omega)}$$

تبدیل فوریه.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

14.3 Application of fourier Series

Ex: Square wave



$$f(x) = 0 \qquad -\pi < x < 0$$

$$f(x) = h \qquad 0 < x < \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} h\,dt = h$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} h \cos n\pi t\,dt = 0 \qquad n = 1, 2, 3$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} h \sin n\pi t\,dt = \frac{h}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

$$b_n = \frac{2h}{\pi n} \qquad n \text{ odd}$$

$$b_n = 0 \qquad n \text{ even}$$

$$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \dots\right)$$

Ex: $f(x) = x^2 \qquad -\pi \leq x \leq \pi$

$f(x) =$ is even

ص۰ $b_n = 0$ ص۰

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos n\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}(-1)^n\frac{2\pi}{n^2}$$

$$= (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$ ص۰ [illegible]

$x = \pi$ حال آن [illegible]

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$ ص۰

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \zeta(2)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

14.4: Properties of fourier series.

14.6. Discrete fourier Transform

در فصل بعد بیشتر در خصوص تبدیل فوریه پیوسته صحبت خواهد شد. اما در واقعیت عموماً با داده‌های دیجیتالی سروکار خواهیم بود پس به جای یک تبدیل فوریه یک تبدیل گسسته خواهیم داشت.

$$\{f_1 \ldots \quad f_N\} \qquad [0,T]$$ در بازه

$$t_0 = 0,\quad t_1 = \frac{T}{N},\ t_3 = \frac{2T}{N},\ \ldots\ t_N = \frac{(N-1)T}{N}$$ که با فاصله‌ها

پس بازه‌های زمانی که اندازه‌گیری انجام شده برابر است با:

$$\Delta t = \frac{T}{N}, \qquad t_K = \frac{KT}{N}$$

حال اگر کرنل فوریه را صحبت $e^{i\omega t}$ پس به صورت گسسته داریم.

$$t_0 = 0,\ t_1 = \Delta t,\ t_2 = 2\Delta t \ldots \quad t_{N-1} = (N-1)\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{T}{N}$$

$$\omega \to \omega_p = \frac{2\pi p}{T}, \quad \omega_0 = 0,\quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \quad \ldots \quad \frac{2\pi(N-1)}{T}$$

حال تابعی از زمان در نظر بگیرید که در زمان‌های گسسته مقادیر را خواندیم یعنی

$$f(t) \to f(t_0)\ f(t_1) \ldots\ f(t_{N-1})$$

$$f(t_K) = \sum_{p=0}^{N-1} F(\omega_p)\, e^{-i\omega_p t_K}$$

$$F(\omega_p) = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} f(t_K)\, e^{i\omega_p t_K}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \left(e^{i\omega_p t_m}\right)^* e^{i\omega_p t_K} = \delta_{mK}$$ که رابطه تعامد هم

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )