بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۱۴/۱۰/۱۴۰۱

بخش دوم

خلاصه مطالب قبلی

(۱) فرآیندهای متنوعی در طبیعت هستند که دارای تغییر فاز (تغییر در پارامتر نظم) هستند و یک نوع گذار از آن است که نقطه بحرانی نامیده می‌شود و در آن نقطه، مشاهده‌پذیر که خاصیت مقیاسی را پیدا (بیان ریاضی رفتار خودمتشابهی است)

(۲) از فرض مقیاس‌بندی Widom رابطه بین نماها را بدست آوردیم.

$$f([K]) \longrightarrow f(R_l[K]) = l^d f([K])$$

(۳) خاصیت مقیاسی در بیان ریاضی $RG = ROROI$ منجر به خواص مقیاسی می‌شود

(۴) به صورت گرافیکی در $1+1D$ ، $1+2D$ نشان دادیم که RG چگونه کار می‌کند!

(۵) در نقطه بحرانی به دلیل بازمقیاس کردن چیزی عوض نمی‌شود

$$R_l[K = K^*] = K^*$$

(۶) تابع β_l تعریف کردیم ← ریشه تابع β نقطه بحرانی است
← ریشه مشتق تابع تابع β ← نماهای بحرانی را به ما می‌داد.

(۷) برای برخی از مدل‌های حل‌پذیر Z را حساب کردیم و f را بدست آوردیم ⟸ سایر کمیت‌ها؟

(۸) با داشتن H و RG بدون اختلال ← نماهای مقیاسی بدست آمد

$$\int d^d x \; F \phi \qquad d - x_\phi = x_F$$

x_F, x_ϕ

(۹) اغلب $\mathcal{H}$ که در نظر گرفتیم گوسی بودند $\leftarrow$ ϕ^2, m^2

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{U}$$

بعد تلاش کردیم با حضور $\mathcal{U}$ ببینیم ضرایب جفت شدگی چگونه عوض می‌شوند

معادلات ریاضی

دیاگرامی

(۱۰) $O(u^2)$ در $d<4$ اختلال خراب می‌شود.

$$\epsilon = 4 - d \quad \begin{cases} d>4 & \epsilon<0 \\ d<4 & \epsilon>0 \end{cases}$$

مجبور شدیم $O(u^3)$ در نظر بگیریم $\rightarrow$ Wilson-Fisher fixed point

$$u \rightarrow u_l = l^{x_u} u \qquad x_u < 0$$

Irrelevant

به طور کلی انتظار از جمله اختلال در ابعاد (d) چگونه است $\leftarrow$

ادامه می‌خواهیم

WF-fixed point $\leftarrow$ $O(u^3)$

Chapter 12 Goldenfeld

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\eta \, e^{-\beta L([\eta])} = \int \mathcal{D}\eta \, e^{-\mathcal{H}}$$

$\beta \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}$ = Dimensionless quantity

$$L \equiv \int d^d r \left\{ \underbrace{\frac{1}{2}\gamma (\nabla \eta)^2}_{} + \underbrace{a t}_{} \eta^2 + \underbrace{\frac{1}{2} b}_{} \eta^4 - h\eta \right\}$$

$\underline{\underline{b \neq 0}} \leftarrow t < 0 \leftarrow$ الزاماً باید مثبت باشد u

$$\Phi \equiv (\beta\gamma)^{1/2} \eta$$

$$\frac{r_0}{2} \equiv \frac{at}{\gamma} = \frac{1}{2} \bar{a} t \longrightarrow r_0 \equiv \bar{a} t$$

$$\frac{u_0}{4} \equiv \frac{1}{2} \frac{b}{\beta\gamma^2}$$

$h = 0$ فرض کنیم

بدون بعد است

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{eff}(\{\Phi\}, [K]) = \beta L = \int d^d r \left[\frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{2} r_0 \Phi^2 + \frac{1}{4} u_0 \Phi^4 \right] \\ \mathcal{Z}([K]) = \int \mathcal{D}\Phi \, e^{-\underbrace{\mathcal{H}_{eff}(\{\Phi\}, [K])}_{}} \end{cases}$$

بدون بعد است

$$\left[\int d^d r \, \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} \right] = 1 \longrightarrow L^d L^{-2} [\Phi]^2 = 1$$

$$\boxed{[\Phi] = L^{1 - d/2}}$$

$$\left[\int d^d r \, \frac{1}{2} r_0 \phi^2\right] = 1 \longrightarrow L^d [r_0][\phi]^2 = 1$$

$$[r_0] = L^{-2} \longrightarrow \xi^{-2} \sim L^{-2}$$

$$\left[\int d^d r \, \frac{u_0}{4} \phi^4\right] = 1 \longrightarrow L^d [u_0][\phi]^4 = 1$$

$$[u_0] = L^{d-4} \qquad \begin{matrix} d>4 \\ d<4 \end{matrix}$$

جمله اختلالی دارای حجم دیمانسیون دار است

انتظار داریم اتفاق متفاوتی داشته باشیم.

$$\mathcal{H}_{eff} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{U}$$

$$= \underbrace{\int d^d r \left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + r_0 \phi^2\right)}_{\text{Gaussian}} + \underbrace{\int d^d r \, \frac{u_0}{4}\phi^4}_{\text{Perturbation}}$$

مدل $\lambda\phi^4$ است.

$$\begin{cases} \varphi \equiv \dfrac{\phi}{L^{1-d/2}} \\[2ex] \bar{u}_0 \equiv \dfrac{u_0}{L^{d-4}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} r_0 = \bar{a}\, t \\ r_0 = L^{-2} \\ \bar{u}_0 = u_0 L^{4-d} \end{matrix}$$

جمله اختلال است $\boxed{\bar{u}_0 = L^{4-d} u_0 = r_0^{\frac{d-4}{2}} u_0 =}$ $(\bar{a})^{\frac{d-4}{2}} t^{\frac{d-4}{2}} u_0$

در نقطه ثابت گوسی $t=0$ چه بلایی بر سر $\bar{u}_0$ می‌آید؟

$$\bar{u}_0 \sim t^{\frac{d-4}{2}\mu}\, u_0$$

$d>4$, $t=0$ $\quad \mu>0 \;-\; \bar{u}_0 \to 0$

این جمله نامربوط است که سهمی ندارد و مفهوم اختلال کار می‌کند

$d<4$, $t=0$ $\quad \mu<0 \to \bar{u}_0 \to \infty$

سهم اختلال در نقطه بحرانی گوسی دیگر اختلال نیست $\leftarrow$ $\mathcal{O}(\bar{u}_0^3)$

Ex: RG for Gaussian model

$t>0$ کار می‌کند.

$$\mathcal{H}_0 = \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\nabla S)^2 + \frac{1}{2} r_0 S^2 \right]$$

$\downarrow$

F.T.

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = \int d^d q \; \frac{1}{2}(r_0 + q^2)\, |S(q)|^2$$

$\downarrow$

$$RG = R \circ R \circ I$$

$$q \to q' = l q$$

$$S(q) \longrightarrow S'(q) = \frac{S(q)}{z}, \qquad \boxed{z = l^{1+d/2}}$$

$$t \leftarrow r_0 \to r_0(l) = l^{x_r} r_0$$

$$\begin{cases} x_s = 1 + d/2 \\ x_t = x_{r_0} = -d + 2x_s \\ x_h = 1 + d/2 \end{cases}$$

از طرفی دیگر با استفاده از فرض مقیاسی Widom

$$M \sim |h|^{1/\delta}$$

$$M \sim |t|^{\beta}$$

$$\chi \sim |t|^{-\gamma}$$

$$C \sim |t|^{-\alpha}$$

$$\left.\begin{aligned} \nu d &= 2-\alpha \\ \beta &= \frac{d-2}{4} \\ \gamma &= 1 \\ \delta &= \frac{d+2}{d-2} \end{aligned}\right\}$$

برای RG

$$\begin{cases} \beta \overset{\text{Widom}}{=} \dfrac{1-b}{a} \overset{\text{RG}}{=} \dfrac{1-x_h}{x_t} \\[2ex] \delta = \dfrac{x_h}{1-x_h} = \dfrac{d+2}{d-2} \end{cases}$$

$$\beta = \frac{d-2}{4} = \frac{1-x_h}{x_t} = \frac{1-\left(1+\frac{d}{2}\right)}{2} = -\frac{d}{4}$$

سازگار نیست

$$\delta = \frac{d+2}{d-2} = \frac{x_h}{1-x_h} = -\frac{d+2}{d}$$

سازگار نیست

چرا β و δ از دید RG و Widom متناقض هستند.

مدل لاندو زیر $t<0$ کار نمی‌کند

$$f(t,h,u_0) = l^{-d} f(l^{x_t} t, l^{x_h} h, l^{x_{u_0}} u_0)$$

$$M = -\frac{1}{K_B T}\frac{\partial f}{\partial h}\Big|_{h=0} = l^{x_h-d} M(l^{x_t} t, l^{x_h} h, l^{x_{u_0}} u_0)\Big|_{h=0}$$

$$\boxed{M(t,0,u_0) = l^{x_h-d} M(l^{x_t} t, 0, l^{x_{u_0}} u_0)} \sim |t|^{\beta}$$

$$l^{x_t} t = 1$$

$$M(t,0,u_0) = t^{\frac{d-x_h}{x_t}} M(1,0,\underbrace{t^{-\frac{x_{u_0}}{x_t}} u_0}_{\text{از صفر بدانیم}}) \sim \cancel{|t|^{\beta}}$$

$$\sim t^{\frac{d-x_h}{x_t}} \longrightarrow \boxed{\beta = \frac{d-x_h}{x_t}}$$

$$M \sim \sqrt{-\frac{a_2}{a_4}} \quad , t<0$$

$u_0 \neq 0 \leftarrow t<0$ در صورتی که زیر

$$M \sim a_4^{-1/2} \sim u_0^{-1/2}$$

$$M(t,0,u_0) \sim u_0^{-1/2}$$

مستقل از اینکه در چه بعدی کار می کنیم یعنی حتی $d>4$ ($x_u<0$)

و u_0 یک متغیر نامربوط است اما خطرناک

u_0 is a dangerous irrelevant variable.

با یک سازوکار دیگری ارزش این ترم تغییر می کند δ , β

$$\begin{cases} M(t,0,u_0) = t^{-\frac{(x_h-d)}{x_t}} \, M(1,0,u_0\, t^{-x_u/x_t}) \\ M(t,0,u_0) \sim u_0^{-1/2} \end{cases}$$

$$M(t,0,u_0) = t^{-\frac{(x_h-d)}{x_t}} \left(t^{-\frac{x_{u_0}}{x_t}}\right)^{-1/2}$$

$$M(t) \sim t^{-\frac{(x_h-d)}{x_t}+\frac{x_{u_0}}{2x_t}} \longrightarrow \boxed{\beta = -\frac{(x_h-d)}{x_t} + \frac{x_{u_0}}{2x_t}}$$

$$\text{for } d=4 \longrightarrow \boxed{\beta = 1/2}$$

برای δ هم به صورت زیر عمل می کنیم

$$\begin{cases} M(0,h,u_0) = h^{-\frac{(x_h-d)}{x_h}} \, M(0,1,u_0\, h^{-\frac{x_{u_0}}{x_h}}) \\ M \sim u_0^{-1/3} \quad (h\neq 0) \end{cases}$$

$$d=4 \quad M(0,h,u_0) \sim h^{-\frac{(x_h-d)}{x_h}} \, h^{\frac{x_{u_0}}{3x_h}}$$

$$\frac{1}{\delta} = -\frac{(x_h - d)}{x_h} + \frac{1}{3}\frac{x_u}{x_h} = 1/3$$

که از کار خواهد بود.

پس تا اینجا مشخص شد که $\underline{u}$ و "d" داشت

انحراف

$\epsilon = 4 - d$

$\epsilon < 0 \to u_0 =$ اختلال است

$\epsilon > 0 - u_0 -$ نقش اختلال ندارد

$\underbrace{O(u_0^3)}$

← RG + طرح حذف شدگی اصلاح شود

Wilson-Fisher fixed point

بسیم

$\underline{\underline{x_u < 0}}$

اصلاحات $O(u^3)$ داریم ; $H = H_0 + U$ ← کتاب کاردی

$O(u^2)$

$t \to \tilde{t} = t + \ldots$