بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۴ر۱۰ر۱۴۰۱

Perturbative RG 2

$$\boxed{\langle O \rangle = ?}$$

$O \equiv$ A typical observable

$\langle\ \rangle =$ Ensemble average

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{U} \leftarrow \underbrace{\text{perturbation}}_{\text{اختلال}}$$

$\mathcal{H}_0$: $\underbrace{\text{Gaussian part}}_{m^2,\ \phi^2}$

$\mathcal{U}$: $m^4,\ \phi^4$; $\vec{m}^2 \cdot \vec{m}^2$

اهمیت وجود جمله m^4 در هامیلتونی مغناطیس، یادآوری

$$\langle m \rangle (t>0,\ T>T_c,\ h=0) = 0$$

$$\langle m \rangle (t<0,\ T<T_c,\ h=0) \neq 0 = \pm\sqrt{\frac{-t}{a_4}} \rightarrow a_4>0$$

چرا نظریه گوسی در زیر T_c کار نمی‌کند، از آنجا نیاز به در نظر گرفتن جمله غیرگوسی داریم (ولی به صورت اختلالی)

$a_4 = 0$

یعنی سهم اصلی توسط جملات گوسی حل می‌شوند (خواهیم دید نظریه اختلال جز $a_4 \neq 0$ در $d<4$ کار نمی‌کند یعنی سهم اختلال دیگر به صورت اختلال ظاهر نمی‌شود $\leftarrow$ $O(u^2)$ مرتبه دوم اختلال را، باید در نظر بگیریم. $\longrightarrow$ مجدداً مفصل بحث می‌کنم.

$$\langle O \rangle = \frac{\int D\phi\, O\, e^{-\beta \mathcal{H}}}{\int D\phi\, e^{-\beta\mathcal{H}}} \rightarrow \rho_{c,gc}$$

$$e^{-\beta U} \equiv 1 - \beta U + \frac{\beta^2 U^2}{2!} - \dots$$

$$= \frac{\int D\phi\, O\, e^{-\beta\mathcal{H}_0} e^{-\beta U}}{\int D\phi\, e^{-\beta\mathcal{H}_0} e^{-\beta U}}$$

$$\boxed{Z_0 = \int D\phi\, e^{-\beta\mathcal{H}_0}}$$

$$\langle O \rangle = \frac{Z_0 \int D\phi\, O\, e^{-\beta\mathcal{H}_0}\left[1 - \beta U + \frac{\beta^2 U^2}{2!} - \dots\right]}{Z_0 \int D\phi\, e^{-\beta\mathcal{H}_0}\left[1 - \beta U + \frac{\beta^2 U^2}{2!} - \dots\right]}$$

$$\langle O \rangle = \frac{\langle O\rangle_0 - \beta\langle OU\rangle_0 + \frac{\beta^2}{2!}\langle OU^2\rangle_0 - \dots}{\underbrace{1 - \beta\langle U\rangle_0 + \frac{\beta^2}{2!}\langle U^2\rangle_0 \dots}}$$

$$\simeq \left[\langle O\rangle_0 - \beta\langle OU\rangle_0 + \frac{\beta^2}{2!}\langle OU^2\rangle_0 \dots\right] \times \left[1 + \beta\langle U\rangle_0 - \frac{\beta^2}{2!}\langle U^2\rangle_0 \dots\right]$$

$$\langle O\rangle \simeq \underbrace{\langle O\rangle_0}_{\text{zero-order}} - \underbrace{\beta\left[\langle OU\rangle_0 - \langle O\rangle_0\langle U\rangle_0\right]}_{\text{first order}} + \underbrace{\frac{\beta^2}{2!}\left[\langle OU^2\rangle_0 - 2\langle OU\rangle_0 + 2\langle O\rangle_0\langle U\rangle_0^2 - \langle O\rangle_0\langle U^2\rangle_0\right]}_{\text{second order}} + \dots$$

یعنی

$$\boxed{\langle O\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \underbrace{\langle O U^n\rangle_0^{\text{connected}}}_{\text{Cumulant}}}$$

گشتاورها.

این حال فیزیک است که می‌خواستیم.

یادآوری

$$\begin{cases} \langle X\rangle_c = \langle X\rangle \\ \sigma^2 = \langle X^2\rangle_c = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2 \end{cases}$$

به عنوان مثال

$$O \equiv \phi_i(x)\,\phi_j(x') \equiv m_\alpha(x)\, m_\beta(x') \longrightarrow \langle O\rangle = \langle m_\alpha(x)\, m_\beta(x')\rangle = G(x,x') = \chi$$

میدان برداری n مؤلفه‌ای

نمادگذاری کتاب کاردر

تابع پاسخ susceptibility

به عنوان مثال کاری که می‌خواهیم انجام دهیم این است که با حضور $H = H_0 + U$ رفتار بحرانی را بررسی کنیم

به صورت شهودی $\underbrace{U>0}$ پس یک جمله مثبت به H_0 اضافه شده افت‌وخیزهای بزرگتر در مقادیر m می‌توانند وجود داشته باشند وقتی بخواهیم همه m ها شبیه هم شوند پس لازم است سیستم سردتر از حالتی باشد که U نداشت پس

$m \neq 0 \quad (t<0)$

$$\begin{cases} H = H_0 \longrightarrow t = \dfrac{T-T_c}{T_c} = 0 \\ H = H_0 + U, \longrightarrow \underbrace{t=0}_{\text{نقطه بحرانی در مدل گوسی}} \longrightarrow \underbrace{t=?}_{\text{نقطه بحرانی در مدل اختلالی}} \end{cases}$$

$$\underbrace{T_c(U)}_{\text{اختلالی}} < \underbrace{T_c(U=0)}_{\text{گوسی}}$$

$$\underbrace{}_{O}$$

Ex1 : $\langle m_\alpha(x)\, m_\beta(x')\rangle = ?$

for d-Dimension

for n-Vectorfield

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{U}$$

$\beta\mathcal{H}_0 \equiv$ Gaussian

$$\beta\mathcal{H} = \beta\mathcal{H}_0 + \beta\mathcal{U} = \overbrace{\int d^d x \left[\frac{t}{2} \underbrace{\vec{m}\cdot\vec{m}}_{m^2} + K \underbrace{(\vec{\nabla} m)^2}_{m^2 \to q^2} + \frac{L}{2} \underbrace{(\nabla^2 m)^2}_{m^2 \to q^4} \cdots \right]}^{\beta\mathcal{H}_0 \equiv \text{Gaussian}}$$

$$\underbrace{+\, u \int d^d x\, (\vec{m}\cdot\vec{m})^2}_{\beta\mathcal{U}}$$

Coupling Constants $[K]$: $[\underbrace{t, K, L}_{\text{Gaussian}}, u]$ $\to$ Perturbation

$$t_\ell = \ell^{x_t} t \qquad K_\ell = \ell^{x_K} K \qquad L_\ell = \ell^{x_L} L \qquad u_\ell = \ell^{x_u} u$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 0 \to \text{Relevant} \\ x < 0 \to \text{Irrelevant} \end{array} \right\} \qquad \boxed{x = ?}$$

In Fourier space we have:

$$\beta\mathcal{H}_0 = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\overbrace{t + Kq^2 + Lq^4 \cdots}^{G^{-1}}}{2} |\vec{m}(q)|^2$$

$$m_\alpha(x) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{m}_\alpha(q) e^{-i\vec{x}\cdot\vec{q}}$$

$$\beta\mathcal{U} = u \int d^d x \left[\vec{m}(x)\cdot\vec{m}(x)\right]^2$$

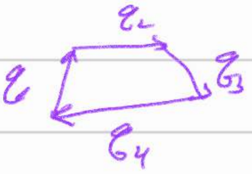
$$= u \int d^d x \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q_2}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q_3}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q_4}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 + \vec{q}_4)}$$

$$(2\pi)^d \delta_D(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)$$

$$\underbrace{\tilde{m}_i(q_1)\, \tilde{m}_i(q_2)}\, \underbrace{\tilde{m}_j(q_3)\, \tilde{m}_j(q_4)}$$

$$\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 + \vec{q}_4 = 0$$

بقای لذا زیود ک



$$\beta \mathcal{U} = u \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q_2}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q_3}{(2\pi)^d} \underbrace{\tilde{m}_i(q_1)\, \tilde{m}_i(q_2)\, \tilde{m}_j(q_3)\, \tilde{m}_j(\overbrace{-q_1-q_2-q_3}^{q_4})}$$

از قبل دیگر می‌دانیم (جلسه قبل دیدیم)

$$\langle \tilde{m}_\alpha(q)\, m_\beta(q') \rangle_0 = \left.\frac{\partial^2 \ln Z_0}{\partial \lambda_\alpha\, \partial \lambda_\beta}\right|_{\vec{\lambda}=0}$$

$$= \delta_{\alpha\beta}\, \delta_D(\vec{q}+\vec{q}')\, (2\pi)^d\, \tilde{G}(q, q')$$

$$\checkmark \boxed{\langle \tilde{m}_\alpha(q)\, \tilde{m}_\beta(q') \rangle_0 = \frac{\delta_{\alpha\beta}\, \delta_D(\vec{q}+\vec{q}')\, (2\pi)^d}{t + Kq^2 + Lq^4 + \dots}}$$

محاسبه تابع پاسخ در مدل گاوسی یا مرتبه صفرم اختلال

$$\langle O \rangle = \widetilde{\langle O \rangle_0} - \underbrace{\beta \langle O\mathcal{U} \rangle_0^c}_{\text{مرتبه اول اختلال ?}} + \underbrace{\frac{\beta^2}{2!} \langle O\mathcal{U}^2 \rangle_0^c}_{\text{مرتبه دوم اختلال ?}} + \dots$$

الان هدفم محاسبه

$$\beta \langle O\mathcal{U} \rangle_0^c = \beta \langle \tilde{m}_\alpha(q)\, \tilde{m}_\beta(q')\, \mathcal{U} \rangle_0^c$$

$$= \beta \langle \tilde{m}_\alpha(q)\, \tilde{m}_\beta(q')\, \tilde{m}_i(q_1)\, \tilde{m}_i(q_2)\, \tilde{m}_j(q_3)\, \tilde{m}_j(q_4) \rangle_0^{\text{Connected}}$$

$$= \beta \langle \tilde{m}_\alpha(q)\tilde{m}_\beta(q')\, \tilde{m}_i(q_1)\tilde{m}_i(q_2)\,\tilde{m}_j(q_3)\,\tilde{m}_j(q_4)\rangle_0$$

$$- \beta \langle \tilde{m}_\alpha(q)\tilde{m}_\beta(q')\rangle_0 \langle \tilde{m}_i(q_1)\,\tilde{m}_i(q_2)\,\tilde{m}_j(q_3)\,\tilde{m}_j(q_4)\rangle_0$$

پس به طور کلی تا مرتبه اول اختلال $O(u^2)$ خواهیم داشت :

Ⓐ

$$* \langle \tilde{m}_\alpha(q)\tilde{m}_\beta(q)\rangle = \overbrace{\langle \tilde{m}_\alpha(q) m_\beta(q')\rangle_0}^{\substack{\text{حساب کردیم} \\ ①}}$$

$$- u \int \frac{d^dq_1\, d^dq_2\, d^dq_3}{(2\pi)^{3d}} \Bigg[\overbrace{\underbrace{\langle \tilde{m}_\alpha(q)\tilde{m}_\beta(q')\,\tilde{m}_i(q_1)\tilde{m}_i(q_2)\, m_j(q_3)\, \tilde{m}_j(q_4)\rangle_0}_{\text{۱۵ تا جمله}}}^{\substack{? \\ ②}} -$$

$$\underbrace{\langle \tilde{m}_\alpha(q)\,\tilde{m}_\beta(q')\rangle_0 \langle \tilde{m}_i(q_1)\,\tilde{m}_i(q_2)\,\tilde{m}_j(q_3)\,\tilde{m}_j(q_4)\rangle_0}_{\substack{③ \\ \text{۳ تا جمله دارد} \quad ?}} \Bigg]$$

$$+ O(u^2)$$

$$① \ \langle \tilde{m}_\alpha(q)\tilde{m}_\beta(q')\rangle = \frac{\delta_{\alpha\beta}\,\delta_D(q+q')(2\pi)^d}{t + Kq^2 + Lq^4}$$

$$② \ \langle \tilde{m}_\alpha(q)\,\tilde{m}_\beta(q')\ \tilde{m}_i(q_1)\,\tilde{m}_i(q_2)\ \tilde{m}_j(q_3)\,\tilde{m}_j(q_4)\rangle_0 = \ ?$$

$$③ \ \langle \tilde{m}_\alpha(q)\,\tilde{m}_\beta(q')\rangle_0 \langle \tilde{m}_i(q_1)\,\tilde{m}_i(q_2)\ \tilde{m}_j(q_3)\,\tilde{m}_j(q_4)\rangle_0 = \ ?$$

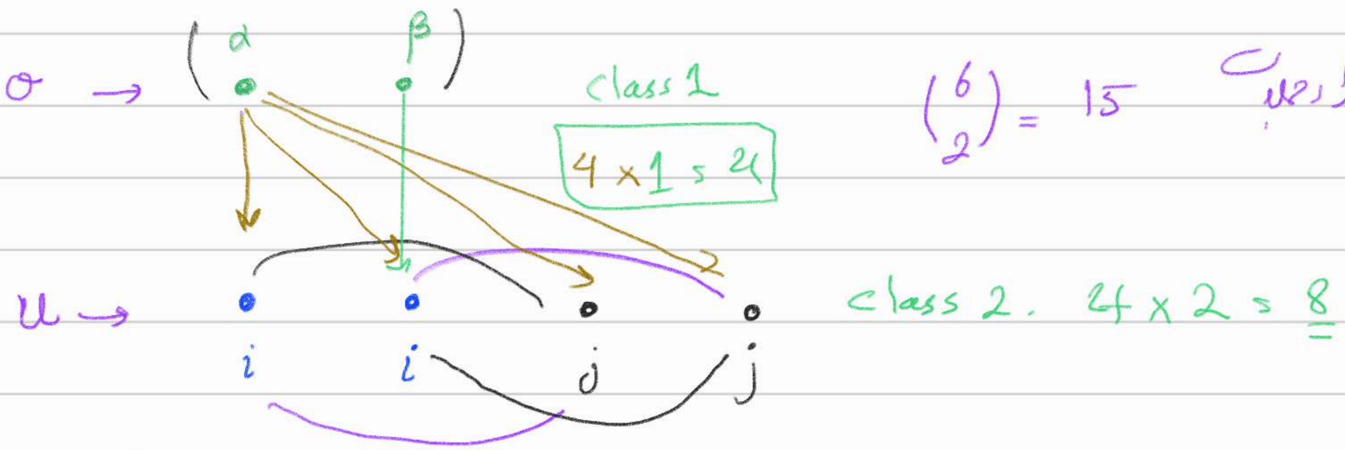
Wick's Theorem

$$\langle m_i m_j m_k m_l \rangle_0 = \langle m_i m_j \rangle_0 \langle m_k m_l \rangle_0$$

$$+ \langle m_i m_k \rangle_0 \langle m_j m_l \rangle_0 + \langle m_i m_l \rangle_0 \langle m_j m_k \rangle_0$$

$$= \frac{1}{2}\binom{4}{2} = 3\text{-terms}$$

(2)



$$\binom{6}{2} = 15 \quad \text{تعداد جمله}$$

$$\langle \alpha\beta \rangle \langle i\, i \rangle \langle j\, j \rangle + \langle \alpha\beta \rangle \langle ij \rangle \langle ij \rangle + \langle \alpha\beta \rangle \langle ij \rangle \langle ij \rangle$$

$+$ (12) جمله دیگر

۱۵ جمله داریم.

پس سه تا جمله اول که $\alpha\beta$ با u درگیر نمی‌شوند، سه جمله مربوط به (۳) حذف می‌شوند

پس مجموعه (2) و (3) کلاً ۱۲ جمله تولید می‌کنند که حتماً α و β با اندیس‌های ن و ز مخلوط می‌شوند

Terms − 12

class 1 : $\langle m_\alpha m_i \rangle_0 \langle m_\beta m_i \rangle_0 \langle m_j m_j \rangle_0$ ۴ جمله

class 2 : $\langle m_\alpha m_i \rangle_0 \langle m_\beta m_j \rangle_0 \langle m_i m_j \rangle_0$ ۸ جمله

برای سادگی $L=0$

Class 1

ضریب 4

$$\langle \tilde m_\alpha(q)\tilde m_i(q_1)\rangle_0 \langle m_\beta(q')\tilde m_i(q_2)\rangle_0 \langle \tilde m_j(q_3) m_j(q_4)\rangle_0$$

$$\frac{\delta_{\alpha i}\,\delta_D(q+q_1)(2\pi)^d}{(t+Kq^2)} \times \frac{\delta_{\beta i}\,\delta_D(q'+q_2)(2\pi)^d}{(t+Kq'^2)} \times \frac{\underbrace{\delta_{jj}}_{=n}\,\delta_D(q_3+q_4)(2\pi)^d}{(t+Kq_3^2)}$$

Class 2: — ضریب 8 دارد

$$\langle \tilde m_\alpha(q)\tilde m_i(q_1)\rangle_0 \langle \tilde m_\beta(q')\tilde m_j(q_3)\rangle_0 \langle \tilde m_i(q_2) m_j(q_4)\rangle_0$$

$$\frac{\delta_{\alpha i}\,\delta_D(q+q_1)(2\pi)^d}{(t+Kq^2)} \times \frac{\delta_{\beta j}\,\delta_D(q'+q_3)(2\pi)^d}{(t+Kq'^2)} \times \frac{\delta_{ij}\,\delta_D(q_2+q_4)(2\pi)^d}{(t+Kq_2^2)}$$

پس با جایگذاری در معادله A خواهیم داشت

(B) $$\langle \tilde m_\alpha(q)\tilde m_\beta(q')\rangle = \frac{\delta_{\alpha\beta}\,\delta_D(q+q')(2\pi)^d}{(t+Kq^2)}\left[1 - \frac{(4un+8u)}{(t+Kq^2)}\int \frac{d^dq_3}{(2\pi)^d}\frac{1}{t+Kq_3^2}\right]$$

$$+\ \mathcal{O}(u^2)\Big]$$

$$\underbrace{\langle \tilde{m}_\alpha(q)\tilde{m}_\beta(q')\rangle}_{\chi} = \underbrace{\left(\frac{\delta_{\alpha\beta}(2\pi)^d\delta_D(q+q')}{t+Kq^2}\right)}_{\text{تابع پاسخ حالت گوسی}}\left(1-\underbrace{\frac{4u(n+2)}{t+Kq^2}\int\frac{d^dq_3}{(2\pi)^d}\frac{1}{t+Kq_3^2}}_{\text{به دلیل سهم } u \text{ در مرتبه اول}}+\cdots\right)$$

در نقطه بحرانی $\chi\to\infty$ میل $\chi^{-1}\to 0$ ما هم می‌خواهیم $T_c^{New}=?$ (حالتی که u دارا

در نظر بگیریم ($T_c^{New} < \underbrace{T_c^{0}}_{\text{Gaussian}}$

$$\chi^{-1}(t)=\langle \tilde{m}_\alpha(q)\tilde{m}_\beta(q')\rangle^{-1}=?$$

$$\chi^{-1}(t)=\underset{\substack{\uparrow\\ T-T_c^{old}}}{t}+4u(n+2)\underbrace{\int\frac{d^dq'}{(2\pi)^d}\frac{1}{t+Kq'^2}}+\mathcal{O}(u^2)$$

تابع پاسخ در نقطه بحرانی واگراست یعنی $\chi^{-1}(t=0)=0$

$$\chi^{-1}(t=0)\neq 0=4u(n+2)\int\frac{d^dq'}{(2\pi)^d}\frac{1}{t+Kq'^2}+\mathcal{O}(u^2)$$

$$t=T-T_c^{old}$$

الان $t=0$ دیگر نقطه بحرانی نیست

$$t=0 \quad - \quad T=T_c^{old}$$

$$T_c^{old}\neq \underbrace{T_c^{New}}_{u}$$

درخواست کنیم که $\chi^{-1}=0$ در چه دمایی؟

$$T_c^{New} - T_c^{old}$$

$$0 = \chi^{-1}(t_c^{New}) = t_c^{New} + 4u(n+2)\int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{t + Kq'^2} + O(u^2)$$

$$\boxed{t_c^{New} = -4u(n+2)\int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{t + Kq'^2} + O(u^2)}$$

$$\underline{t_c^{New} < 0} \longrightarrow T_c^{New} - T_c^{old} < 0 \longrightarrow \underbrace{T_c^{New} < T_c^{old}}$$

حضور $u>0$ موجب افت‌وخیزهای آشکار شده، برای پایداری آنها لازم است دما سردتر از حالت قبلی شود.

نکته مهم

$$\chi^{-1}(t) - \chi^{-1}(t = t_c^{New}) =$$

$$\left[t + 4u(n+2)\int_0^{\Lambda} \frac{d^d q'}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{t + Kq'^2}\right] - \left[t_c^{New} - 4u(n+2)\int_0^{\Lambda} \frac{d^d q'}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{t_c^{New} + Kq'^2}\right]$$

$$= (t - t_c^{New})\left[1 - \frac{4u(n+2)}{K^2}\underbrace{\int_0^{\Lambda} \frac{d^d q'}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{q'^2\left(q'^2 + \frac{(t - t_c^{New})}{K}\right)}}_{\Lambda^{d-4}}\right]$$

$$\chi^{-1}(t) - \chi^{-1}(t_c^{New}) = t - t_c^{New}\left[1 - \underbrace{\frac{4u(n+2)}{K^2}\, cts\left(\frac{K}{t - t_c^{New}}\right)^{2-d/2}}_{\Delta\chi^{-1}}\right]$$

اگر $u = 0 \leftarrow$ $\chi^{-1}(t) = \chi^{-1}(t_c^{New})$ یعنی سهم اختلال حذف می‌شود.

$$\boxed{\chi \sim t^{-1}}$$

سهم اختلال در تابع پاسخ

$$\Delta\chi^{-1} \equiv -\frac{4u(n+2)}{K^2}\, cts \left(\frac{K}{t-t_c^{new}}\right)^{2-d/2}$$

شبیه

$$\chi^{-1} = \chi^{-1}(t_c^{new}) + \Delta\chi^{-1}$$

انتظار داریم وقتی خودمان فرض کردیم که u تحت اختلالی است پس کماکان تحت اصلاح شده $\Delta\chi^{-1}$ به نسبت جمله اصلی کوچک باشد

$$2-d/2>0 \longrightarrow \lim_{t\to t_c^{new}} \left(\frac{K}{t-t_c^{new}}\right)^{2-d/2} \longrightarrow \infty$$

$t \to t_c^{new}$ نقطه بحرانی جدید

اختلال نیست

$$2-d/2>0 \to 2> d/2 \to d<4$$

در ابعاد کوچکتر از 4 کار کنیم در بسط اختلال آنجا حساب ها کار نمی کند

چون تحت ناشی از اختلال می آید در نقطه بحرانی به هر اندازه بزرگ شود

پس اختلال شکست می خورد

اما برای $2-d/2<0 \leftarrow d\geq 4$ کماکان فرض اختلال

پابرجاست و همه چیز خوب است.

در ادامه تلفیق RG با اختلال ← ورای اختلال! کار می کند دلبخواه

در نظر گرفتن $O(u^2)$ این اشکال برطرف می شود

برای $d<4$ لازم است تا مرتبه $\mathcal{O}(u^2)$ اختلال را در نظر بگیریم

5.3: Diagramatic Representation of Perturbation Theory