بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۲۷/۹/۱۴۰۱

Section 4.7 Gaussian model Renormalization group

(Non-Perturbative RG)

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{U}$$

$\mathcal{U}$ ← Perturbative part

$\mathcal{H}_0$ ← Gaussian

برای حل حاضر $\mathcal{U}=0$ فقط نقش $\mathcal{H}_0$ در نظر است

→ Non-Perturbative approach

$$Z = \int \mathcal{D}\vec{m}(x)\, e^{-\beta\mathcal{H}}$$

$$= \int \mathcal{D}\vec{m}(q)\, e^{\left[-\int_0^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left(\frac{t+Kq^2+Lq^4+\dots}{2}\right) |\tilde{m}(q)|^2 + \tilde{h}\cdot\tilde{m}(q=0)\right]}$$

$h = cts \rightarrow q=0$

Gaussian model.

$$Z \xrightarrow{R\circ R\circ I} Z' = ? \longrightarrow [K'] \overset{?}{=} R_\ell [K]$$

→ scaling Exponent

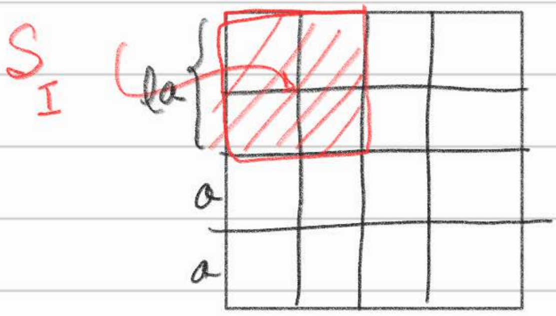
$\rightarrow x_K = ?$

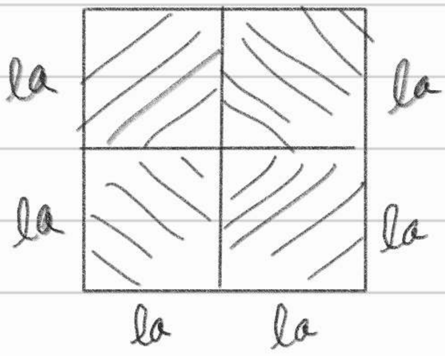
$R\circ R\circ I = ?$
- → Coarse grain (I)
- → Rescale (R)
- → Renormalization (R)

Real Space $\quad x \gtrsim a$ → unit cell

↑ coordinate

$(q \lesssim \Lambda)$ $\boxed{\Lambda = 1/a}$ } در فضای فوریه





$$X \geq a \xrightarrow{\text{Coarse grain}} X \geq la$$

یعنی روی $a \ll X \ll la$ جمع زدیم

در فضای فوریه $\left(\frac{\Lambda}{l} \ll q \ll \Lambda\right)$

پس نواحی کوچکتر از $X \ll la$ دیگر وجود ندارند

پس معادل آن در فضای فوریه چه خواهد بود؟

در فضای مختصات $\quad X \geq a \longrightarrow \int_a^{+\infty} d^d x$

در فضای فوریه $\quad q \ll \Lambda \longrightarrow \int_0^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d}$

$\longrightarrow$ Coarse graining

در فضای مختصات $\longrightarrow \int_{la}^{+\infty} d^d x \qquad la \ll X$

در فضای فوریه $\longrightarrow \int_0^{\Lambda/l} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \qquad q \ll \frac{\Lambda}{l}$

$$\int_0^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \longrightarrow \int_0^{\Lambda/l} + \int_{\Lambda/l}^{\Lambda}$$

جمع زدیم و کلهم آنها را کنار گذاشتیم.

$$\int_a^\infty d^d x \longrightarrow \underbrace{\int_a^{la}}_{\text{جمع زدیم}} + \int_{la}^\infty$$

$$\{\vec{m}(\vec{q})\} \equiv \underbrace{\overset{Z_>}{\{\vec{\sigma}(\vec{q}_>)\}}}_{\underbrace{\Lambda/l < q \leqslant \Lambda}_{q_>}} \oplus \underbrace{\overset{Z_<}{\{\vec{m}(\vec{q}_<)\}}}_{\underbrace{0 \leqslant q \leqslant \Lambda/l}_{q_<}}$$

برهم ارج

اصطلاحاً

رفتار تکین در توابع ترمودینامیکی و مشاهده‌پذیرها نشان می‌دهد: در نقطه بحرانی و نزدیکی نقطه بحرانی

رفتارهای منظم بلندبرد داریم $\xi \to \infty$ یعنی عدد موج‌های کوچک ($q_<$) (طول موج‌های بزرگ)

Wave Number $\leftarrow q = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, $\lambda \rightarrow$ wave length

$$Z = \int \mathcal{D}\vec{m}(q_<) \int \mathcal{D}\vec{\sigma}(q_>)\, e^{-\beta \underbrace{\mathcal{H}[\vec{m},\vec{\sigma}]}_{\int_0^{\Lambda/l} + \int_{\Lambda/l}^{\Lambda}}}$$

$$= Z_< \, Z_>$$

$\int_0^{\Lambda/l}$	$\int_{\Lambda/l}^{\Lambda}$
$q_<$	$q_>$
$(\vec{m})$	$(\vec{\sigma})$

روی آن جمع می‌زنیم و رفتار تکین هم ندارد

پس اهمیتی هم برای ما به منظور مطالعه خواص
بحرانی ندارد.

(I) Coarse graining

$$\boxed{\Lambda/l < q < \Lambda}$$

$$Z = Z_> Z_< \qquad \boxed{0 < q < \Lambda/l}$$

$$Z = \underbrace{\left[e^{-\frac{n}{2} V \int_{\Lambda/l}^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \ln(t + Kq^2 + Lq^4 + \dots)} \right]}_{Z_>}$$

$$\underbrace{\times \int D\vec{m}(q_<)\, e^{-\int_0^{\Lambda/l} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left(\frac{t + Kq^2 + Lq^4 + \dots}{2}\right) |\vec{m}(q)|^2 + \vec{h}\cdot\vec{m}(q=0)}}_{Z_<}$$

(II) Rescale $\longrightarrow$ $x \rightarrow x' = x/l$ ← فضای مختصات

$q \rightarrow q' = ql$ ← فضای فوریه

$q = q'/l$

$$Z = \frac{Z_>}{e^{-V\delta f_b}} \int D\vec{m}(q_<)\, e^{\left(-\int_0^{\Lambda} \frac{d^d q'}{(2\pi)^d\, l^d} \left(\frac{t + K l^{-2} q'^2 + L l^{-4} q'^4 + \dots}{2}\right) |\vec{m}(q')|^2 + \vec{h}\cdot\vec{m}(q'=0)\right)}$$

$$\boxed{\vartheta = l^{-\Delta}}$$

(III) Renormalization

$m(x') \longrightarrow m'(x') = \frac{m(x')}{\vartheta} = l^{\Delta} m(x')$

فضای مختصات

$$\tilde{m}(q) \longrightarrow \tilde{m}'(q') = \frac{\tilde{m}(q')}{z}$$

در فضای فوریه

نحوه مقیاس شدن میدان

$$Z = Z_{>} \int D\tilde{m}'(q')\, e^{-\int_0^{\Lambda} \frac{d^d q'}{(2\pi)^d}\, l^{-d} \left(\frac{t + K l^{-2} q'^2 + L l^{-4} q'^4 + \dots}{2} \right) z^2 |\tilde{m}'(q')|^2 + \tilde{h}\cdot \tilde{m}'(q'=0)\, z}$$

تقاضا می‌کنیم Z **تغییر نکند** (فرض مقیاسی رفتار در کلیه سیستم خودمتشابه است)

$$[K] = \{ t, h, K, L, \dots \} \xrightarrow{R.R.I} [K'] = \{ t', h', K', L' \dots \}$$

$$Z = Z_{>} \int D\tilde{m}'(q')\, e^{\left[-\int_0^{\Lambda} \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \left(\frac{\underbrace{t l^{-d} z^2}_{t'} + \underbrace{K l^{-2-d} z^2}_{K'} q'^2 + \underbrace{L l^{-4-d} z^2}_{L'} q'^4 + \dots}{2} \right) |\tilde{m}'(q')|^2 + \underbrace{h z}_{h'} \cdot \tilde{m}'(q'=0) \right]}$$

تغییرات ضرایب جفت شدگی در اثر عملیات RG

$$t' = z^2 l^{-d}\, t$$

$$h' = z h$$

$$K' = z^2 l^{-2-d} K \quad , \quad L' = z^2 l^{-4-d} L$$

☆ طبق تعریف اولیه

* $\left(\begin{matrix} t=0 \\ h=0 \end{matrix}\right)$ همان نقطه بحرانی

دقیقاً در نقطه بحرانی Z عوض نشود ← شرط لازم این است

$\boxed{K' = K} \longrightarrow Z^2 l^{-2-d} = cts \rightarrow \boxed{Z = l^{1+d/2}}$

کفایت می‌کند که Z خود متشابه باشد

$L' \overset{?}{=} L$

ضریب مقیاس میدان در فضای مختصات $\rightarrow \boxed{v = l^{-1-d/2}}$

ضریب مقیاس میدان در فضای فوریه.

$$L' = Z^2 l^{-4-d} L$$

$$L' = l^{2+\cancel{d}-4-\cancel{d}} L = l^{-2} L \longrightarrow L' = l^{x_L} L$$

Irrelevant $\leftarrow \boxed{x_L = -2 < 0}$

مهم

اگر $l>1$ که RG می‌دهیم مدام کم و کم‌تر

کوچک می‌شود.

نقشی در تعیین وضعیت بحرانی ندارد.

$L' \cancel{=} L$

$$t' = Z^2 l^{-d} t = l^{2+d-d} t = l^2 t \qquad \boxed{x_t = 2} > 0$$

$$h' = Z h = l^{1+d/2} h = l^{x_h} t \qquad \boxed{x_h = 1 + d/2} > 0$$

$$[K'] = R_0 [K] \longrightarrow \beta_l = \checkmark \longrightarrow RG \text{ flow}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2 - \dfrac{d}{x_t} \quad \checkmark \\ \nu = \dfrac{1}{x_t} \quad \checkmark \\ \beta = \dfrac{d - x_h}{x_t} \quad \checkmark \end{cases}$$

و در پایان نقد هم در اینجا است برخلاف روش نظریه میدان میانگین

$\boxed{\text{جدول فصل 3} \leftarrow \text{Goldenfeld}}$

در این قسمت که بیان شد RG غیر اختلالی بررسی شد.

$$\begin{cases} t' = l^2 t \\ h' = l^{1+d/2} h \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dt'}{dl} = 2lt \\ \dfrac{dh'}{dl} = (1+d/2)\, l^{d/2} h \end{cases}$$

β-function

جمع بندی و خلاصه نقشه راه.

① با توجه به نتایجی که در آزمایش دیده شده بود سیستم در نزدیکی نقطه بحرانی و خود نقطه بحرانی خاصیت خود متشابهی دارد. یعنی تحت تبدیلات مبتنی بر طول خواص فیزیکی عوض نمی شود.

مبتنی بر این دیدگاه معادلات بازگشتی را داریم

$$[\vec{K}] \xrightarrow{R_l} [\vec{K}'] = R_l[\vec{K}]$$

و با توجه به خودمشابهی بودن نقطه بحرانی از این ویژگی بهره ببریم

دقیقاً در نقطه بحرانی چیزی عوض نمی‌شود.

$$\underbrace{[K^*] = R_\ell [K^*]}$$

روش‌های مرسوم RG در فضای مختصات و با جمع زدن $[K^*] =$

بر روی درجات آزادی سیستم (منظورم 1D-Ising, 2D-Ising)

2. با توجه به تقریب‌های قابل اعتنا تلاش کردیم خود Z حل کنیم (روش میدان متوسط)

و توجه به مدل Landau-Ginzburg

3. تلاش بر اساس شبیه‌سازی ← حتماً اثرات اندازه محدود خواهیم داشت.

finite Size Effect

4. خاصیت خودمشابهی (Widom) ←

$$\begin{cases} N \longrightarrow N' = N\ell^{-d} \\ \xi \longrightarrow \xi' = \xi\ell^{-1} \\ [K] \longrightarrow [K'] = \{ t' = \ell^{x_t} t,\ h' = \ell^{x_h} h, \ldots \} \\ f(t,h,\ldots) \longrightarrow f(t_\ell, h_\ell, \ldots) = \ell^{d} f(t,h,\ldots) \end{cases}$$

به این نتیجه رسیدیم مطالعه خواص سیستم در نقطه بحرانی و نزدیک نقطه بحرانی با کمک روش

$$RG \equiv R \circ R \circ I \longrightarrow Z \longrightarrow Z'_l$$

$$\boxed{Z = Z'_l}$$

با این تقاضا به طور خودکار و بدون نیاز به [illegible] حل

$$\left.\begin{array}{c} C \\ \chi \\ G \\ M \end{array}\right\} \longleftarrow F = -k_B T \ln Z$$

محاسبه Z

فقط کافی است تبدیل یکتا Z برای داشتن آنها $\underbrace{R_l[K]}$ به دست می‌آید

$$\downarrow$$

$$\beta_l \text{ —— } \beta_l = 0 \longrightarrow [K^*]$$

$$-\left.\frac{d\beta_l}{dK}\right|_{K=K^*} = x_K$$

(بخش غیر اختلالی) Gaussian Part

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{U}$$

به دلیل وجود 5

(بخش اختلالی) Intraction

$$Z = \int Dm\, e^{-\beta\mathcal{H}} \longrightarrow$$ Perturbative RG method

(First order - Second order ...)

$$\mathcal{U} = 0 \qquad \{x^0_K\} \ , \ [K^*]$$

$$\mathcal{U} \neq 0 \quad \begin{cases} \{x^0_K\} \longrightarrow \{x_K\} = \{x^0_K\} + \underbrace{\{\Delta x_K\}} \\ [K^*] \longrightarrow [K^*] + [\Delta K^*] \end{cases}$$

به خاطر تغییر اختلالی در هامیلتونی

قبل از اینکه بخواهیم وارد بحث اختلالی بشوم یک بار دیگر جمع بندی را داشته باشیم از RG :

غیر اختلالی (فضای مختصات ، فضای فوریه)

$$Z = \int Dm \, e^{-\beta \mathcal{H}}$$

$$\mathcal{H} = \int d^d x \, \mathcal{L}(\quad) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{U}$$

Real Space (RG)

فرض کنید داریم

$$\mathcal{H} = \int d^d x \left[t m^2 + K(\nabla m)^2 - h m \right]$$

* Coarse graining $\qquad m(x) = \dfrac{1}{l^d} \displaystyle\int_{x' \in x} d^d x' \, m(x')$

* Rescale $\qquad x_{New} = \dfrac{x_{old}}{l}$

نمای مقیاسی میدان

$\Delta = x_m$

* Renormalization $\qquad m_{New}(x_{New}) = \dfrac{m_{old}(x_{New})}{\zeta} = l \, m_{old}(x_{New})$

آنچه که اتفاق می‌افتد به شرح زیر

$$\boxed{\begin{matrix} x \geqslant a \\ q \leqslant \Lambda \end{matrix}} \xrightarrow[\underbrace{\begin{matrix} a \leqslant x \leqslant la \\ \Lambda/l \leqslant q \leqslant \Lambda \end{matrix}}_{Z_>}]{} \underbrace{\boxed{\begin{matrix} x \geqslant la \\ \underbrace{q \leqslant \Lambda/l} \end{matrix}}}_{Z_<}$$

تقاضا کردیم Z تحت RG عوض نشود که شرط کافی $\mathcal{H}$ عوض نشود.

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\text{R.R.T}} \mathcal{H}' = \mathcal{H} \longrightarrow [K'] = R_l[K]$$

$$\mathcal{H} = \int \underbrace{d^d x} \left[\underbrace{t m^2} + \underbrace{K(\nabla m)^2} - \underbrace{h m} \right]$$

RG $\downarrow$ Rescal Renormalizar

$$\mathcal{H}' = \int \underbrace{dx'\, l^d} \left[\underbrace{t \upsilon^2} m'^2 + K l^{-2} \upsilon^2 (\nabla' m')^2 - \underbrace{h \upsilon} m' \right]$$

$$\mathcal{H}' = \int dx' \left[t' m'^2 + K'(\nabla' m')^2 - h' m' \right]$$

فرض می‌خواهیم در فضای مختلف $\boxed{\upsilon \sim l^{x_m}}$

$$t' = l^d \upsilon^2 t \equiv l^{x_t} t \longrightarrow \boxed{x_t = d + 2x_m} \quad *$$

$$K' = l^{d-2} \upsilon^2 K \equiv l^{x_K} K \longrightarrow \boxed{x_K = d - 2 + 2x_m} \quad *$$

$$h' = l^d \upsilon h = l^{x_h} h \longrightarrow \boxed{x_h = d + x_m} \quad *$$

یک نکته مهم در حالت کلی اگر در هامیلتونی دلخواه

$$\int d^d x \, F \phi \xrightarrow{RG} \begin{cases} x = x'/l \\ \phi' = \dfrac{\phi}{\upsilon} = l^{x_\phi} \phi \end{cases}$$

جفت شدگی

میدان

$$\int d^d x \, F \phi \xrightarrow{RG} \int d^d x' \, l^{+d} F \upsilon \phi'$$

$$\downarrow$$

$$\int d^d x' \, l^d \upsilon F \, \phi'$$

$$\int d^d x' \, F' \phi'$$

$$F' = l^d \upsilon F = l^{x_F} F$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x_F = d + x_\phi \\ \hline x_\phi = x_F - d \end{array}}$$

Fourier Space (RG)

$$\boxed{\nabla \to iq}$$

$$\mathcal{H} = \int d^d x \left[t m^2 + K (\nabla m)^2 - h m \right]$$

$$\tilde{\mathcal{H}} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left[t\, \tilde{m}^2(\vec{q}) + K q^2 \tilde{m}(q)^2 \right] - h\, \tilde{m}(q=0)$$

cts

$$x \longrightarrow x' = x/\ell \quad , \quad m \longrightarrow m' = m/v$$

$$q \longrightarrow q' = q\ell \quad , \quad \tilde{m} \longrightarrow \tilde{m}' = \tilde{m}/z$$

$$\tilde{\mathcal{H}}' = \int d^d q'\, \ell^{-d} \left[\underbrace{t z^2}_{t'} \tilde{m}'^2 + \ell^{-2} K q'^2 z^2 \tilde{m}'^2 \right] - h z\, \tilde{m}'(q'=0)$$

در فضای فوریه $\boxed{z = \ell^{x'_m}}$

$$t' = \ell^{-d} z^2 t \equiv \ell^{x_t}\, t \implies \boxed{x_t = -d + 2x'_m} \; *$$

$$K' = \ell^{-d-2} z^2 K \equiv \ell^{x_K} K \implies \boxed{x_K = -d - 2 + 2x'_m} \; *$$

$$h' = z h = \ell^{x_h} h \implies \boxed{x_h = x'_m} \; *$$

مقایسه کنیم نماهای بحرانی فضای مختصات با فضای فوریه:

Coordinate Space | Fourier Space

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_t = d + 2x_m & \longleftrightarrow & x_t = -d + 2x'_m \\ x_h = d + x_m & \longleftrightarrow & x_h = x'_m \\ x_K = d - 2 + 2x_m & \longleftrightarrow & x_K = -d - 2 + 2x'_m \end{array} \right\}$$

نقطه بحرانی $\quad t=0,\ h=0$ یعنی $K=K' \leftarrow$

فضای مختصات $\rightarrow d-2+2x_m=0 \Rightarrow \boxed{x_m=\frac{2-d}{2}}$

$$x_t=+d+2\left(\frac{2-d}{2}\right)=d+2-d=2$$

$$x_h=d+x_m=d+1-d/2=1+d/2$$

فضای فوریه $\rightarrow -d-2+2x'_m=0 \Rightarrow \boxed{x'_m=\frac{d+2}{2}}$

$$x_t=-d+2x_m'=-d+2\left(\frac{d+2}{2}\right)=-d+d+2=2$$

$$x_h=x'_m=\frac{d}{2}+1$$

پس نتایج نهایتاً سازگار است.