بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۱۴۰۱/۹/۲۰

Renormalization Group (RG) and β-function and RG-flow

① $[\vec{K}'] = R_l[\vec{K}]$ تحت تبدیل مبتنی بر طول تقارنی دیده می‌شود در سیستم‌هایی که در نقطه بحرانی هستند

② Fixed Points $[\vec{K}'] = [\vec{K}^*] = R_l[\vec{K}^*]$

برای هر l دلخواه

type of fixed Points → Trivial Fixed points

type of fixed Points → Non-Trivial fixed point

③ Linearization around $[K^*]$ to find $\boxed{\text{Scaling Exponets}}$

$$\vec{K}' = \vec{K}^* + (\vec{K}-\vec{K}^*)\cdot\left.\frac{\partial \vec{K}'}{\partial \vec{K}}\right|_{\vec{K}=\vec{K}^*} + \mathcal{O}(\Delta\vec{K}) \quad 0$$

$$\underbrace{\vec{K}'-\vec{K}^*}_{} = (\vec{K}-\vec{K}^*)\cdot\left.\frac{\partial R_l[\vec{K}]}{\partial \vec{K}}\right|_{\vec{K}=\vec{K}^*}$$

$$\vec{k}' = \left.\frac{\partial R_l[\vec{K}]}{\partial \vec{K}}\right|_{\vec{K}=\vec{K}^*}\cdot\vec{k} \longrightarrow \underset{n\times 1}{(k')} = \underset{n\times n}{T}\ \underset{n\times 1}{(k)}$$

n = # of Coupling Constant

$$T_{ab} \equiv \frac{\partial R_l^a}{\partial K_b} \neq T_{ba} = \frac{\partial R_l^b}{\partial K_a}$$

$$T_l \, \phi = \lambda \, \phi$$

ویژه تابع (ϕ) — ویژه مقدار (λ)

$\vec{k} = \sum u_i \phi_i$, $\vec{k}' = \sum u_i' \phi_i$

u_i: ضریب بسط انحراف در ضرایب جفت شدگی از مقدار نقطه بحرانی

$$\boxed{u' = \lambda_l \, u}$$

u': ضرایب جفت شدگی در فضای قطری

$\lambda_l \sim l^{x_u}$

$x_{u_i} \equiv$ نقش نماهای بحرانی ضرایب جفت شدگی هستند

* نماهای بحرانی مرتبط با یک : ویژه مقادیر linearized RG (آرگ)

$$\boxed{x = \frac{d \ln \lambda}{d \ln l}}$$

قبلاً هم نشان دادم که

$$\begin{cases} x < 0 \longrightarrow \text{Irrelevant couplings} \\ x > 0 \longrightarrow \text{Relevant coupling.} \end{cases}$$

$$u_i' = \lambda_i u_i = l^{x_i} u_i \qquad l > 1$$

اگر سیستم خیلی کوچک از نقطه بحرانی منحرف شود برای $x_i > 0$ یعنی با اعمال RG آن ضرایب جفت شدگی مربوط به شدت نسبت به مقدار قبلی اش منحرف می شود.

$$t' = l^{x_t} t \qquad x_t > 0$$

فرض $K_3' = l^{x_{K_3}} K_3 \qquad x_{K_3} < 0$

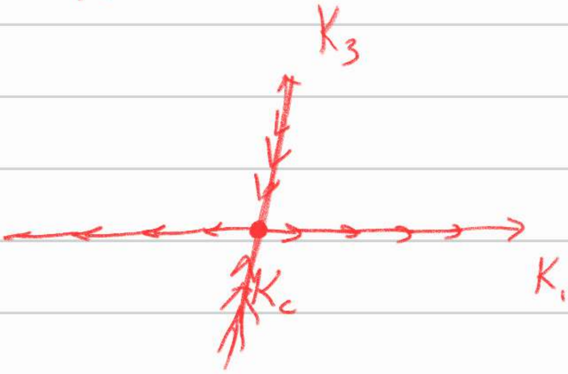
فقط توجه کنید که ما نماهای مقیاسی

$$k \equiv K - K_c$$

در این حالت اگر $x > 0$ باشد با RG $(l > 1)$ ← $k' = l^{x} k$

$$k' \underset{R_l}{>} k$$

$$k'' \underset{R_l R_l}{>} k' > k$$



برای n دلخواه
$\equiv$ تعداد ضرایب جفت شدگی

در راستای ضرایب جفت شدگی مربوط شار دافع داریم
در راستاهای ضرایب جفت شدگی غیر مربوط ما شار جاذب داریم.

$$n \to (m, q) \qquad n = m + q$$

m: مربوط (تعداد ضرایب جفت شدگی مربوط)

q: نامربوط (تعداد ضرایب جفت شدگی نامربوط)

کلاس جهانی   Universality class

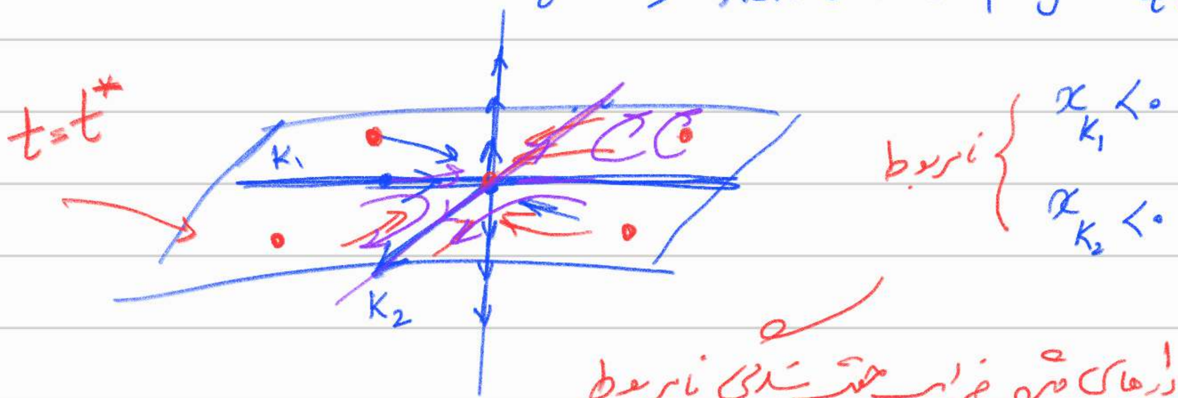
* تمام سیستم‌های موجود در یک کلاس جهانی توسط خطوط شار یکسان به نقاط ثابت حرکت پیدا می‌کنند

* یک کلاس جهانی شامل تمام مدل‌هایی است که تحت شار RG به نقاط ثابت یکسانی منتهی می‌شوند

ابرسطح بحرانی   Critical Hyper Surface

☆ رویه‌ای که شامل ضرایب جفت‌شدگی نامربوط به ازای ضرایب جفت‌شدگی مربوط در نقطه بحرانی هستند

مثال $t \rightarrow$ Relevant Coupling $x_t > 0$



بردارهای ویژه ضرایب جفت‌شدگی نامربوط مماس هستند بر ابرسطح بحرانی

بردارهای ویژه ضرایب جفت‌شدگی مربوط عمود هستند بر ابرسطح بحرانی

پس با یافتن $R_\ell[K]$ fixed point ها بدست می‌آید

β-function

$$\vec{K}' = R_\ell[\vec{K}] \longrightarrow \vec{K}' = \vec{K}^* + \vec{k} \cdot \left.\frac{\partial R_\ell[\vec{K}]}{\partial \vec{K}}\right|_{\vec{K} = K^*}$$

$$T$$

$$[\vec{K}'] = R_\ell[\vec{K}] \longrightarrow \vec{K}' = \vec{K} + \left.\frac{\partial \vec{K}'}{\partial \ell}\right|_{K' = K} \delta\ell$$

$$\ell \to 0$$

$$\boxed{\vec{K}' = \vec{K} - \vec{\beta}_\ell \, \delta\ell}$$

تابع بتا

$$\boxed{\beta_\ell \equiv - \left.\frac{\partial \vec{K}'}{\partial \ell}\right|_{K' = K}}$$

دلایل تاریخی

اهمیت این تعریف چیست؟

چه نیازی داریم.

$$\vec{T} = \left.\frac{\partial R_\ell[\vec{K}]}{\partial \vec{K}}\right|_{\vec{K} = K^*} = \left.\frac{\partial \vec{K}'}{\partial \vec{K}}\right|_{\vec{K}' = K = K^*}$$

$$T_{ab} = \left.\frac{\partial K'_a}{\partial K_b}\right|_{\vec{K} = K^*} = \frac{\partial}{\partial K_b}\left(K_a - \beta_\ell^{(a)} \delta\ell\right)$$

$$T_{ab} = \delta_{ab} - \frac{\partial \beta_\ell^{(a)}}{\partial K_b} \delta\ell$$

$$\vec{T} = \mathbb{1} - \frac{\partial \beta_\ell}{\partial \vec{K}} \delta\ell$$

$$T\phi_i = \lambda_i \phi_i$$

$$x = \frac{d\ln\lambda}{d\ln l}$$

$$\left(\mathbb{1} - \frac{\partial \vec{\beta}_l}{\partial \vec{K}}\,\delta l\right)\phi_i = \lambda_i \phi_i$$

$$l = 1 + \delta l$$

$$l^{x_i} = (1+\delta l)^{x_i} \simeq 1 + x_i\,\delta l$$

$$\left(\mathbb{1} - \frac{\partial \vec{\beta}_l}{\partial \vec{K}}\,\delta l\right)\phi_i = (1 + x_i\,\delta l)\,\phi_i$$

$$-\frac{\partial \vec{\beta}_l}{\partial \vec{K}}\,\phi_i = x_i\,\phi_i$$

ویژه مقادیر نماهای بحرانی است.

نکته اول: ویژه مقادیر $-\dfrac{\partial \vec{\beta}_l}{\partial \vec{K}} \longrightarrow$ نماهای بحرانی هستند

نکته دوم:

$$\vec{K}' = \vec{K} - \beta_l\,\delta l$$

$$\vec{K}^* = \vec{K}^* - \beta_l\,\delta l$$

$$\boxed{\beta_l(K = K^*) = 0}$$

ریشه‌های تابع بتا معادل با نقاط بحرانی یا fixed point هستند

جمع بندی:

① از راه $\left(\frac{\partial R_l[K]}{\partial K}\right)\Big|_{T}$ شروع کنیم

توابع بازگشتی $[K^*] = R[K^*]$

λ ها به دست می‌آید

$$x = \frac{d\ln\lambda}{d\ln l}$$

② از راه β شروع کنیم

$\beta_l = 0$ تعیین کننده نقاط بحرانی

$-\frac{\partial \beta_l}{\partial K}$ دارای ویژه مقادیری که همان

x ها هستند.

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_l \begin{cases} \to \text{Real space} \\ \to \text{fourier space} \end{cases}$$

$$\text{Ex 1:}\quad \frac{dt}{dl} = -\epsilon t + \frac{t^2}{2}$$

$$-\beta_l = -\epsilon t + \frac{t^2}{2} \longrightarrow \beta_l = 0 \begin{cases} \to t^* = 0 \\ \to t^* = 2\epsilon \end{cases}$$

$$x_t = -\frac{\partial \beta_l}{\partial t}\Big|_{t=t^*} = -\epsilon + t \begin{cases} \to t = t^* = 0 \longrightarrow x_t = -\epsilon \\ \to t = t^* = 2\epsilon \longrightarrow x_t = +\epsilon \end{cases}$$

Ex 2. Ising Model $\qquad d =$ Dimension

Migdal _ Kadanoff method $\qquad$ q، تعداد جهات تخفیف شده

$$K'_q = l^{d-q} R_l\left(l^{q-1} K_q\right)$$

$$R_l = \tanh^{-1}\left[(\tanh K)^l\right]$$

در $\begin{cases} d = 2 \\ q = 1 \to x \\ q = 2 \to y \end{cases}$

$d=2$ در حل

$g=1,2$

$$K'_x = l\,R_l(K_x)$$

$$K'_y = R_l(l K_y)$$

$$\boxed{l = 1+\delta l = e^{\delta l}}$$

$$K'_g = e^{(d-g)\delta l}\, R_{(1+\delta l)}\left(e^{\delta l (g-1)} K_g \right)$$

$$\boxed{K'_g = e^{(d-g)\delta l} \tanh^{-1}\left\{ \left[\tanh\left(e^{\delta l (g-1)} K_g \right) \right]^{1+\delta l} \right\}}$$

حول $\delta l = 0$ بسط بدهیم.

$$K'_g = \left(1 + K_g (d-1)\right)\delta l + \delta l \left[\frac{1}{2} \sinh 2K_g \ln \tanh K_g \right] + \mathcal{O}(\delta l^2)$$

$$\underbrace{K'_g - K_g}_{\tilde{K}'_g} = (d-1)\,\delta l\, K_g + \delta l \left[\frac{1}{2} \sinh 2K_g \ln \tanh K_g \right] + \cdots$$

$$\tilde{K}'_g = (d-1) K_g\, \delta l + \delta l \left[\quad - \quad - \quad \right] + \cdots$$

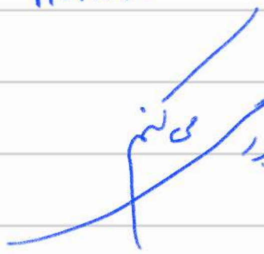
$$\beta_l^{(g)} = -\frac{\tilde{K}'_g}{\delta l} = -\frac{\delta K'_g}{\delta l}$$

$\beta_l = 0 \longrightarrow$ نقطه بحرانی . — —

EX3: 2D Ising Model.

$$l=\sqrt{2} \qquad \underset{\downarrow \atop \text{n.n}}{K},\ \underset{\downarrow \atop \text{n.n.n}}{L},\ \underset{\searrow \atop \text{square}}{M}$$

حلش بعد بررسی می‌کنم



Ex4: RG-flow according to β-function

$$\vec{\beta}_l = \frac{\partial \vec{K}'}{\partial l}\bigg|_{K'=K}$$

$$n=2 \quad \begin{cases} u \\ v \end{cases}$$

یافتن شار RG حوالی نقطه‌ی ثابت

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\bigg|_{K'=K=K^*} = M\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\bigg|_{K=K^*}$$

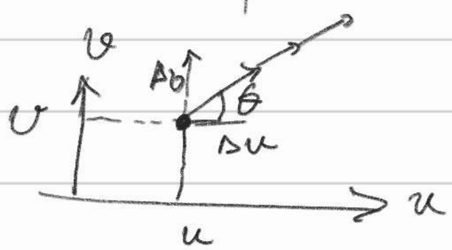
$$\frac{d}{dl}u = M_u\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longrightarrow u(l+\delta l) = u(l) + \overbrace{M_u\,\delta l}^{\Delta u}$$

$$\frac{d}{dl}v = M_v\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longrightarrow v(l+\delta l) = v(l) + \overbrace{M_v\,\delta l}^{\Delta v}$$

در هر نقطه دلخواه در صفحه ضرایب جفت شدگی (u,v) قرار داریم

به اندازه δl قدم برمی‌داریم ولی سهم آنکه با چه زاویه‌ای حرکت کنیم

$$\frac{\Delta u}{\Delta v} = \frac{M_u}{M_v} = \tan\theta$$



$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{M_u}{(M_u^2+M_v^2)^{1/2}}\,\delta l = \cos\theta\,\delta l \\[2ex] \Delta v = \dfrac{M_v}{(M_u^2+M_v^2)^{1/2}}\,\delta l = \sin\theta\,\delta l \end{cases}$$

Ex 3: 2D Ising model.

$$\mathcal{H} = -J\sum_{\langle ij\rangle} s_i s_j - h\sum s_i$$

$l = \sqrt{2}$

$$K = \frac{J}{K_B T}$$

$K_2 \leftarrow K' = \frac{1}{2}\cosh 4K + \dots$

n.n.n $\leftarrow L' = \frac{1}{8}\ln\cosh 4K +$

squar $\leftarrow M' = \frac{1}{8}\ln\cosh 4K - \frac{1}{2}\ln\cosh 2K$

$$[\vec{K}'] = R_{l=\sqrt{2}}[\vec{K}]$$

Recursive Relation

$$R_\ell \begin{cases} K' = 2K^2 + L \\ L' = K^2 \\ M = 0 \end{cases} \Longrightarrow [K^*] = R_\ell [K^*]$$

$$\begin{Bmatrix} K^* = 2K^{*2} + L^* \\ L^* = K^{*2} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} K^* = 1/3 \\ L^* = 1/9 \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \text{1975} & \begin{Bmatrix} K^* = 0.3921 \\ L = 0 \end{Bmatrix} \\ \text{Wilson} & \\ \text{numerically} & \end{Bmatrix}$$

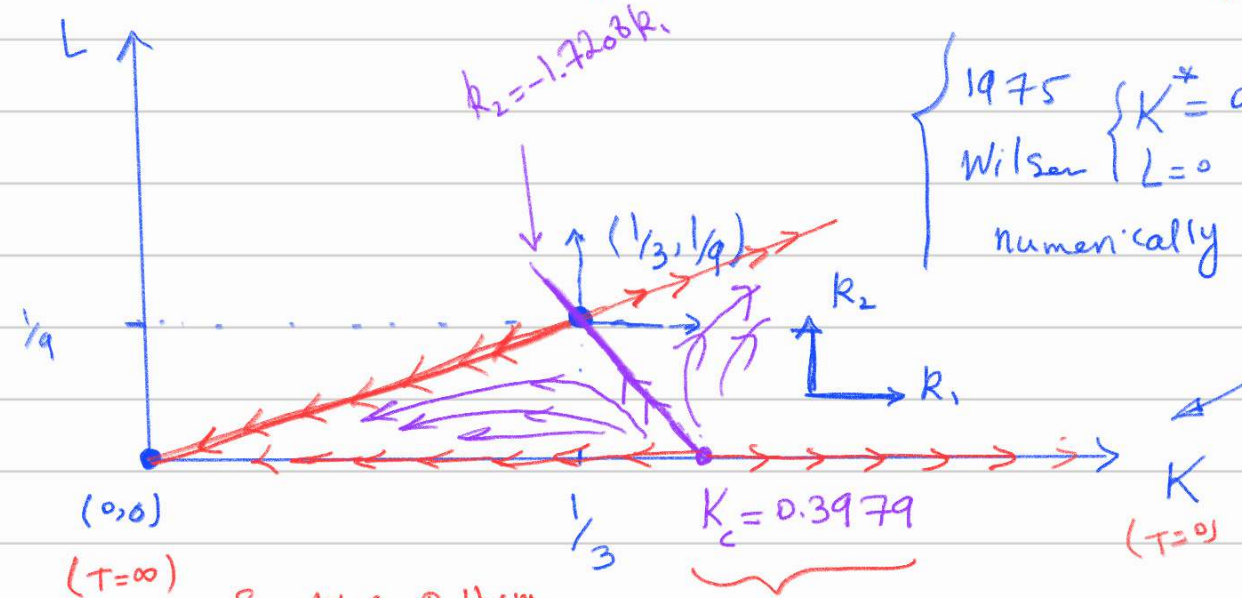


fig: 14.6 Pathria

Linearizatn around fixed points.

نام‌گذاری جدید

$$\boxed{\begin{matrix} K_1 \equiv K \\ K_2 = L \end{matrix}}$$

$$\underbrace{\vec{K}' - \vec{K}^*}_{\vec{k}'} = \left.\frac{dR_\ell}{d\vec{K}}\right|_{\vec{K} = K^*} \cdot (\vec{K} - \vec{K}^*)$$

$$k_1' = \frac{dR_\ell(K_1)}{dK_1} k_1 + \frac{dR_\ell(K_1)}{dK_2} k_2 = 4K\Big|_{K=1/3} k_1 + 1\,k_2 = \frac{4}{3}k_1 + k_2$$

$$k_2' = \frac{dR_\ell(K_2)}{dK_1} k_1 + \frac{dR_\ell(K_2)}{dK_2} k_2 = 2K\Big|_{K=1/3} k_1 + 0 = \frac{2}{3}k_1 + 0$$

$$\begin{pmatrix} k_1' \\ k_2' \end{pmatrix} = T_\ell \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$T_\ell \phi = \lambda \phi \quad \begin{cases} \lambda_1 = ? \\ \lambda_2 = ? \end{cases}$$

$$1 < \lambda_1 = \frac{1}{3}(2+\sqrt{10}) \quad , \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{10} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^{(1)} \\ \phi_1^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$1 > \lambda_2 = \frac{1}{3}(2-\sqrt{10}) \quad , \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{10} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2^{(1)} \\ \phi_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} K_1 = \sum_{i=1}^{2} u_i \phi_i \\ K_2 = \sum u_i \phi_i \end{cases} \longrightarrow K_i' = \sum u_i' \phi_i$$

$$u_i' = \lambda_i u_i \quad \begin{cases} u_1' = \lambda_1 u_1 \\ u_2' = \lambda_2 u_2 \end{cases}$$

ضرایب تفکیک شده‌ای هستند در فضای قوانین

$$\begin{cases} t' = \ell^{x_t} t \\ h' = \ell^{x_h} h \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow \lambda_i = \ell^{x_i} \\ \rightarrow x_i = \dfrac{d\ln\lambda}{d\ln\ell} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_i < 1 \ (x_i < 0) \longrightarrow \text{Irrelevant} \\ \lambda_i > 1 \ (x_i > 0) \longrightarrow \text{Relevant} \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1 = u_1 \phi_1^{(1)} + u_2 \phi_2^{(1)} = u_1(2+\sqrt{10}) + u_2(2-\sqrt{10}) \\ K_2 = u_1 \phi_1^{(2)} + u_2 \phi_2^{(2)} = u_1(2) + u_2(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = 2k_1 + (\sqrt{10}-2)\,k_2 \\ u_2 = 2k_1 - (\sqrt{10}+2)\,k_2 \end{cases}$$

انحراف از نقطه بحرانی در فضای قطری

انحراف از نقطه بحرانی در فضای
بر حسب
غیر قطری.

$$\begin{cases} u_1' = \lambda_1 u_1 & \lambda_1 > 1 \longrightarrow u_1 = \text{Relevant} \\ u_2' = \lambda_2 u_2 & \lambda_2 < 1 \longrightarrow u_2 = \text{irrelevant Coupling Constant} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1' = \tfrac{2}{3}(2+\sqrt{10})\,k_1 + 2k_2 \\ u_2' = \tfrac{2}{3}(2-\sqrt{10})\,k_1 + 2k_2 \end{cases}$$

$l = \sqrt{2}$

در فضای قطری $u_1' = 0$ (یعنی در نقطه بحرانی نشسته ایم).

$$u_1' = 0 \Rightarrow \boxed{k_2 = -\frac{1}{3}(2+\sqrt{10})\,k_1} = -1.7208\,k_1$$

$$\underbrace{\left(L - \tfrac{1}{9}\right)}_{\tilde{k}_2} = -\tfrac{1}{3}(2+\sqrt{10})\underbrace{\left(K - \tfrac{1}{3}\right)}_{\tilde{k}_1}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{9} - \frac{1}{3}(2+\sqrt{10})K + \frac{1}{9}(2+\sqrt{10})}$$

$$L = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{3}\left(\frac{3+\sqrt{10}}{2+\sqrt{10}}\right) = \underline{0.3979}$$

چون مسئله اصلی [illegible] $\left\{ K_{L=0}^{*} = K_c \right.$

Wilson
0.3921