بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۱۵، ۹، ۱۴۰۱

Renormalization Groups: General formulation

* 14.3 pathria
* chapter 9. Goldenfeld
* chapter 4 Cardy

$$\mathcal{H}(N,[K]) \xrightarrow{R_\ell} \mathcal{H}'(N_\ell,[K]_\ell)$$

$$N_\ell = \ell^{-d} N$$

$$[K]_\ell = R_\ell [K] \qquad K_\ell = \ell^{x_k} K$$

Scaling Exponent (x_k)

for a given value $\ell > 1$

$$[K] : \{K_0, \underset{h}{K_1}, \underset{t}{K_2} \dots\}$$

$$e^{-\beta F} = Z(N,[K]) = \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta \mathcal{H}(N,[K])}$$

R_ℓ: Decimation or Dedecoration

تبدیلات مبتنی بر طول

$$e^{-\beta F_\ell} = e^{N_\ell K_0^{(\ell)}} \sum_{\{S_j'\}} e^{-\beta \mathcal{H}_\ell(N_\ell,[K]_\ell)}$$

جمع روی اسپین های باقی مانده

No-singular

$$f([K]) = \ell^{-d}\left[-K_0^{(\ell)} + \underbrace{f_\ell([K]_\ell)}\right]$$

یک نکته مهم

$\sum_n a_n [K_n] m^n + \dots$

$n = 1, 2$

$K_1 \equiv t \ , \ K_2 \equiv h$

$$[K]_\ell = R_\ell [K] \longrightarrow [t, h]_\ell = R_\ell [t, h]$$

$$\underset{1\times 2}{[K]_\ell} = \underset{2\times 2}{R_\ell} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} t \\ h \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} t_\ell \\ h_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\ell^{11} & R_\ell^{12} \\ R_\ell^{21} & R_\ell^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ h \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} t_\ell &= R_\ell^{tt}\, t + R_\ell^{th}\, h \\ h_\ell &= R_\ell^{ht}\, t + R_\ell^{hh}\, h \end{aligned} \right\}$$

e.g. 2D Ising

$$K_1' = 2K_1 + K_2$$

$$K_2' = K_1^2 + 0$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1' \\ K_2' \end{pmatrix} = \overbrace{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2K_1 & 0 \end{pmatrix}}_{T}}^{R} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} t_\ell &= \ell^{x_t}\, t \ * \\ h_\ell &= \ell^{x_h}\, h \ * \end{aligned} \right\} \longrightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} u_1^{(\ell)} &= \ell^{x_{u_1}} u_1 \\ u_2^{(\ell)} &= \ell^{x_{u_2}} u_2 \end{aligned}$$

در فضای قطری، مقادیر ضریب حفظ شدنی x_{u_1}, x_{u_2}

$$[K]_\ell = R_\ell [K]$$

$\uparrow$ Renormalization Group operator

$$[K] = \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ \vdots \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

- Relevant $\quad x_K > 0$
- Irrelevant $\quad x_K < 0$
- Marginal $\quad x_K = 0$

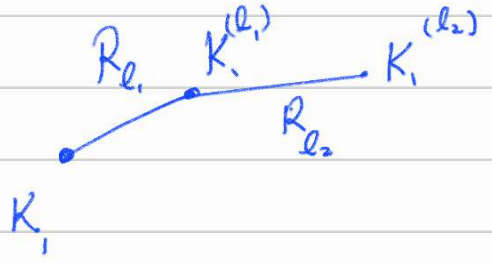
تعداد ضرایب جفت‌شدگی

در حالت کلی تعداد آنها بی‌نهایت است

$\vec{K}$

یک فضای شبه برداری که تحت عملگر RG به میدان شبه برداری $\vec{K'}$ می‌رود.

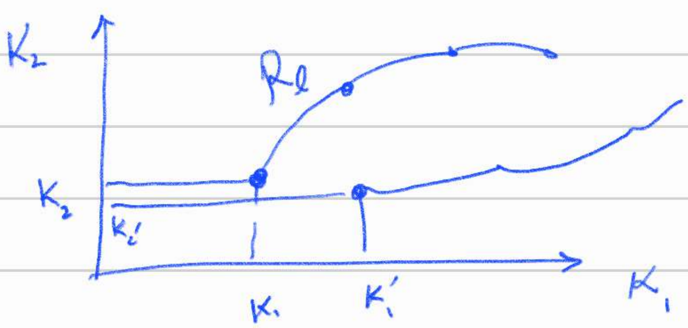
مثل یک شاره



$$K_1^{(\ell_2)} = R_{\ell_2}(K_1^{(\ell_1)}) = R_{\ell_2}(R_{\ell_1}(K_1))$$

$$= R_{\ell_2} R_{\ell_1} (K_1)$$

به هر تعداد دلخواه انجام شود



$$K \xrightarrow{R_1} K' \xrightarrow{R_2} K'' \rightarrow$$

$$\vec{K}^{(n)} = R_\ell(K^{(n-1)}) = \dots = R_\ell^{n}(K^{(0)})$$

$$\boxed{K^{(n)} = R_\ell^{(n)}(K)}$$

fixed point نیام توقف

چیزی عوض نمی‌شود.

$$[K^*] = R_\ell [K^*]$$

$$\xi_\ell = \ell^{-1} \xi$$

$$\xi(K_\ell) = \ell^{-1} \xi(K)$$

$$\xi(K^*) = \ell^{-1} \xi(K^*)$$

برای هر ℓ دلخواه

$T_c = \infty$

$\xi(K^*) = 0$

منجر به نقطه بدیهی

$T_c = 0$

$T_c \neq 0$

$\xi(K^*) = \infty$

منجر به نقطه غیر بدیهی

$K^* \longrightarrow \xi(K^*) = \infty$

یعنی نقاط ثابت غیر بدیهی

Non-Trivial fixed point

پس جمع‌بندی تا اینجا.

(1) $[\vec{K}] \longrightarrow \underbrace{[\vec{K}']}_{\text{Vector-field}} = \underbrace{R_\ell}_{\text{RG-Operator}} [\vec{K}]$

برای a امین مؤلفه ضرایب جفت‌شدگی $\quad K'_a = R_\ell^{(a)} [\vec{K}]$

$$\boxed{\text{مثلاً} \quad t' = R_\ell^{(t)} [t, h]}$$

- ☆ Scaling Exponents
- ☆ fixed points
- ★ RG flow — Universality Class

②

در نزدیکی نقطه بحرانی (fixed point) $[K^*]$ ضریب را بسط دهیم

$$\underbrace{\vec{K}' = R_\ell[\vec{K}]}\longrightarrow \vec{K}' = \underbrace{R_\ell[\vec{K}^*]}_{\vec{K}^*} + (\vec{K}-\vec{K}^*)\cdot \frac{\partial R_\ell}{\partial \vec{K}}\Big|_{\vec{K}=\vec{K}^*} + \mathcal{O}(\Delta \vec{K})$$

$$\vec{K}' = \vec{K}^* + \vec{k}\cdot \frac{\partial R_\ell[\vec{K}]}{\partial \vec{K}}\Big|_{\vec{K}=\vec{K}^*} + \mathcal{O}(k^2)$$

$$\vec{K}' = \vec{K}^* + \vec{k}\cdot \frac{\partial \vec{K}'}{\partial \vec{K}}\Big|_{\vec{K}=\vec{K}^*} + \mathcal{O}(k^2)$$

linearization of RG

$$\vec{K}' - \vec{K}^* \simeq \vec{k}\cdot \frac{\partial \vec{K}'}{\partial \vec{K}}\Big|_{\vec{K}=\vec{K}^*}$$

$$\boxed{\vec{k}' = \vec{k}\cdot \frac{\partial \vec{K}'}{\partial \vec{K}}\Big|_{\vec{K}=\vec{K}^*}} \longrightarrow k'_a = \sum_b \frac{\partial K'_a}{\partial K_b} k_b$$

$a, b = 1, 2 \ (t, h)$

مقدار انحراف از نقطه بحرانی

Residual

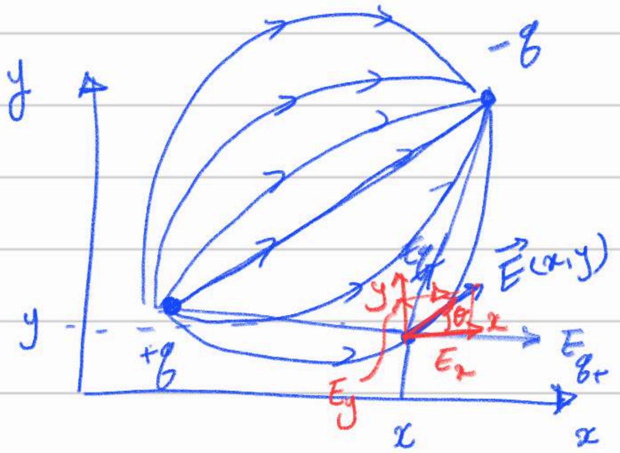
$$\begin{cases} \delta t' = \dfrac{\partial t'}{\partial t}\delta t + \dfrac{\partial t'}{\partial h}\delta h \\[2ex] \delta h' = \dfrac{\partial h'}{\partial t}\delta t + \dfrac{\partial h'}{\partial h}\delta h \end{cases}$$

$$\bullet\ (t, h) \longrightarrow (t', h') = (t' + \delta t', h' + \delta h')$$

$$\vec{k}'_{(n\times 1)} = T^*_{\ell\,(n\times n)}\, \vec{k}_{(n\times 1)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \delta t' \\ \delta h' \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial t'}{\partial t}\Big|_{K^*} & \frac{\partial t'}{\partial h} \\ \frac{\partial h'}{\partial t} & \frac{\partial h'}{\partial h} \end{pmatrix}}_{\substack{2\times 2 \\ T_\ell^*}} \underbrace{\begin{pmatrix} \delta t \\ \delta h \end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

Ex: field Plot. Stream Plot



$$\vec{E}(x,y) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\right] + \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-q)\hat{r}'}{r'^2}\right] = \vec{E}_x\hat{i} + E_y\hat{j}$$

$$(x,y) \longrightarrow (x+\delta x,\ y+\delta y)$$

$$\left.\begin{matrix}\delta x = ? \\ \delta y = ?\end{matrix}\right. \longrightarrow \vec{E}$$

$$\delta x = \Delta \cos\theta$$

$$\delta y = \Delta \sin\theta$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \left.\dfrac{E_x}{|E|}\right|_{(x,y)} \\ \sin\theta = \left.\dfrac{E_y}{|E|}\right|_{(x,y)} \end{cases}$$

$$\delta x_1 = \Delta\left(\frac{E_x}{|E|}\right)$$

$$\delta y_1 = \Delta\left(\frac{E_y}{|E|}\right)$$

$$(x,y) \longrightarrow (x+\delta x_1,\ y+\delta y_1) \longrightarrow (x+\delta x_1+\delta x_2,\ y+\delta y+\delta y_2)$$

$$T_e^* = \left.\frac{\partial \bar{K}'}{\partial \bar{K}}\right|_{\vec{K}=K^*} = \left.\frac{\partial R_e[\vec{K}]}{\partial \bar{K}}\right|_{\vec{K}=\vec{K}^*}$$

$$T^*_{(ab)} = \left.\frac{\partial R_e^{(a)}[K]}{\partial K_b}\right|_{\vec{K}=K^*} \neq T_{ba} = \left.\frac{\partial R_e^{b}[K]}{\partial K_a}\right|_{K^*}$$

③

$$T\phi = \lambda \phi$$

Eeigen Vector

Eeigen valu

$$|\phi_1\rangle \doteq \begin{pmatrix} \phi_1^{(1)} \\ \phi_1^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix}_n$$

$$|\phi_2\rangle \doteq \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$$

$\vdots$

(n)

$$[K]_\ell = R_\ell [K]$$

$$R(t) = t_\ell = \ell^{x_t} t$$

$$\lambda \equiv \ell^{x_t}$$

$$\ln \lambda = x_t \ln \ell$$

$$x_t = \frac{\ln \lambda}{\ln \ell} = \frac{d \ln \lambda}{d \ln \ell}$$

تورب بر زمن

Ex. $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \phi_1^{(1)} + u_2 \phi_2^{(1)} \\ u_1 \phi_1^{(2)} + u_2 \phi_2^{(2)} \end{pmatrix}$

$$\vec{k} = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{\phi}_i$$

$$\vec{k}' = \sum_{j=1}^{n} u'_j \vec{\phi}_j$$

T اثر دهیم

$$T\vec{k} = \sum_i u_i \underbrace{T\vec{\phi}_i}_{\lambda_i \phi_i} = \sum_i u_i \lambda_i \phi_i$$

$$T\vec{k}' = \sum u'_i T\vec{\phi}_i = \sum u'_i \lambda \phi_i$$

$$\vec{k}' = T\vec{k} = \sum u_i \lambda_i \phi_i$$

$$\sum_i \underbrace{u'_i}\phi_i = \sum \underbrace{u_i \lambda_i} \phi_i$$

$$u'_i = u_i \lambda_i$$

نقش ضرایب جهت شرکی به فضای فطری را دارند $\rightarrow u'_i = \lambda_i u_i$ ضریب تبدیل به دلیل RG

$$\lambda_i \sim l^{x_i} \longrightarrow \boxed{x_i = \frac{d\ln\lambda}{d\ln l}}$$

نمای مقیاسی ضرایب جفت شدگی در فضای دوران بدهیم

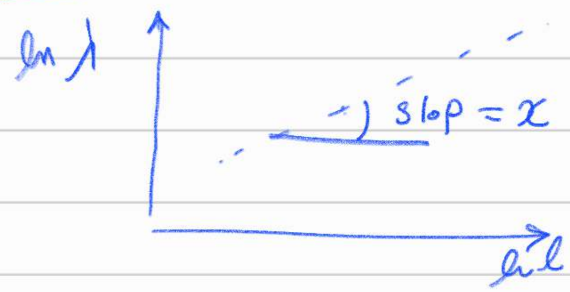
پیش کار $R_l[K]$ ← خطی سازی ← T_l ← قطری کنیم ← $\lambda(l)$

fixed point

RG-flow

$$\boxed{x = \frac{d\ln\lambda}{d\ln l}}$$

نمای مقیاسی



④ $U_i' = \lambda_i U_i$ (RG) $\qquad \lambda_i = l^{x_i} \qquad x_i = \frac{d\ln\lambda_i}{d\ln l}$

☆ If $\lambda_i > 1 \to (x_i > 0) \longrightarrow U_i$ is Relevant Coupling.

$K' \sim ① K$ Ising مدل 1D (یادآوری وابستگی به بعد در x وجود دارد)

$K' \sim ③ K$ 〃 〃 2D 〃

جواب دقیق را

Migdal – Kadanoff $\longrightarrow$ $K_n' = l^{d-n} R_l(l^{n-1} K_n)$

$n=1 - K_1 \leftarrow t$, $d =$ Dimension

$n=2 - K_2 \leftarrow h$

$$\longrightarrow \underline{\underline{R_l}} \equiv \tanh^{-1}\left[(\tanh(K))^l\right]$$

☆ If $\lambda_i < 1$ $(x_i < 0)$ $\longrightarrow$ u_i is Irrelevant Coupling

☆ If $\lambda_i = 1$ $(x_i = 0)$ u_i is marginal Coupling

البته غیر از این ۳ نوع ضریب جفت‌شدگی یک نوع دیگر هم داریم به نام Dangerous irrelevant coupling که بعداً صحبت خواهیم کرد.

$$f(t,h,K_3,K_4,\dots) = \ell^{-d} f(\ell^{x_t} t, \ell^{x_h} h, \ell^{x_{K_3}} K_3, \ell^{x_{K_4}} K_4, \dots)$$

بعد از RG : m

$$f(t,h,K_3,K_4,\dots) = \ell^{-md} f(\ell^{mx_t} t, \ell^{mx_h} h, \ell^{mx_{K_3}} K_3, \ell^{mx_{K_4}} K_4, \dots)$$

Suppose that $\ell^{mx_t} t = cts = b = 1 \longrightarrow \ell = \left(\frac{b}{t}\right)^{\frac{1}{mx_t}}$

$$f(t,h,K_3,K_4,\dots) = \left(\frac{b}{t}\right)^{\frac{-md}{mx_t}} f(1, t^{-\frac{x_h}{x_t}} h, t^{-\frac{x_{K_3}}{x_t}} K_3, \dots)$$

$-\frac{x_h}{x_t} < 0 \longrightarrow \infty$ $\quad > 0$

نقطه بحرانی

$$\lim_{t\to 0} t^{-\frac{x_h}{x_t}} h \longrightarrow 0$$

$$\lim_{t\to 0} t^{-\frac{x_{K_3}}{x_t}} K_3$$

$$\lim_{t\to 0} t^{-\frac{x_{K_4}}{x_t}} K_4$$

$-\frac{x_{K_n}}{x_t} > 0 \longrightarrow$ سهم آنها در پتانسیل ترمودینامیکی در نقطه بحرانی صفر می‌شود ← بی‌اثر است

اگر $x_{K_n} < 0$ در نتیجه $-\frac{x_{K_n}}{x_t} > 0$ پس $\lim_{t\to 0} t^{-\frac{x_{K_n}}{x_t}} = 0$ یعنی سهم ضریب جفت‌شدگی K_n قابل صرف نظر کردن است

① کلاس‌های مبتنی بر شار RG و اثر نقطه بحرانی

Critical manifold

② β-function و مقایسه آن با T_ℓ و $(R)_\ell$ ← نقطه بحرانی، ویژه‌مقادیر ← λ

$\lambda \sim \ell^{x} \rightarrow x = \frac{d\ln\lambda}{d\ln\ell}$

?

ریشه تابع بتا ← نقاط بحرانی

مشتق x را به ما می‌دهد λ

چند مثال

و بعد هم با آنها خود شکل H_ℓ ، محاسبه K^* و x می‌پردازیم

β-funct