بسم الله الرحمن الرحیم جلسه ۱۴۰۱/۹/۸

Renormalization Group (I)

* Chapter 9 Goldenfeld
* chapter 3 Cardy
* Chapter 4 Kardar
* Pathria Statistical Mechanics 13, 14, 15

خب ما تاکنون مسیری که طی کردیم عمدتاً در مبنای تابع پارش (تلاش برای محاسبه آن) بود

$$Z = e^{-\beta F} \longrightarrow F = -K_B T \ln Z \longrightarrow$$ مشاهده‌پذیرها

↓

رفتارهای دیگر در مشاهده‌پذیرها

☆ Mean field

☆ Integrate out on some degree of freedom

☆ Landau – Ginzburg – Wilson theory
(Phenomenological Description)

اما اکنون رویکرد خود را عوض می‌کنیم. یعنی نمی‌خواهیم Z را محاسبه کنیم. بلکه با توجه به
خواصی نظیر تقارن‌ها و تبعات آن‌ها و توجه به خاصیت خودمشابهی (Self Similarity)

در نزدیکی نقطه بحرانی و خود نقطه بحرانی نماهای مقیاسی را می‌سنجیم.

$T_c = ?$ و البته می‌خواهیم خود نقطه بحرانی را هم بدست بیاوریم

لم غالب داشت $\cancel{\chi(K, \omega)}$ $\omega \to \infty$ توجه، نظم بلند برد

$K = 0$

$\omega = 0$

و همبستگی نشان می‌دهد

$K_{ij} \cdots \delta_{ij}$ تعریف کلی

برابر بودن

$$\boxed{Z([K]) \to Z'([K_\ell])}$$

پس با تکیه بر خود متشابه بودن

coupling constants

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n([K])\, m^n + b_n([K])\, (\nabla m)^n + \cdots \right]$$

$$[K] \xrightarrow{\ell} [K_\ell] \xrightarrow{\ell'} [K_{\ell'}] \cdots$$

$$[K_\ell] = R_\ell [K] \longrightarrow [K_\ell^*] = R_\ell [K^*]$$

عملگر

$$\boxed{K_\ell^* = K} \longrightarrow T_c$$

$$[K] = [t, h, u, \cdots]$$

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}$$

$$\boxed{K_\ell = \ell^{\alpha_K} K}$$

$$\{\alpha_K\} \longrightarrow \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \eta \end{cases}$$

$\{x_1, x_2 \ldots x_N\} \longrightarrow \underbrace{p(x) = N(\bar{x}, \sigma)}$

کسب می کنیم $\underline{x(t) \sim t^{\alpha}} \leftarrow$ تابعیت متغیر به پارامتر را که

※ Widom scaling Hypothesis — فرض مقیاسی ویدام

Recall that (x, ϕ)

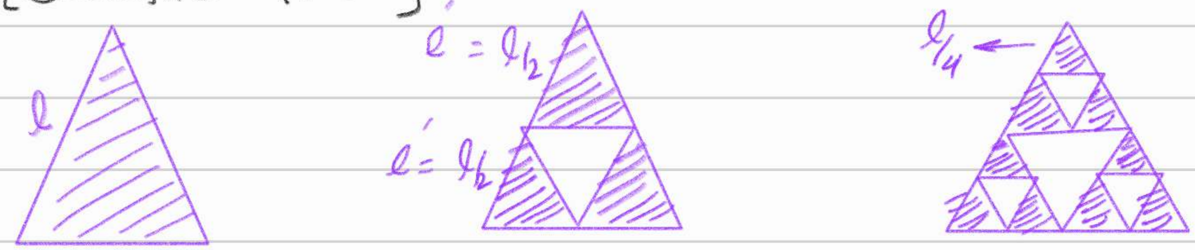
ϕ ← Dependent parameter (e.g. Temperature)

x ↑ Independant Parameter (e.g. time)

$\phi(x) \longrightarrow$ Homogenous function with scaling Behavior

$x \to bx \qquad \phi(x) \longrightarrow \phi'(bx) \stackrel{\Delta}{=} b^{\alpha}\phi(x)$

[Geometrical fractal]



$N_{l=1} = 1 \qquad N_{l'} = 3 \qquad N_{l''} = 9$

$N(l=1) = 1 \qquad N(l=\frac{1}{2}) = 3 \qquad N(l=\frac{1}{4}) = 9$

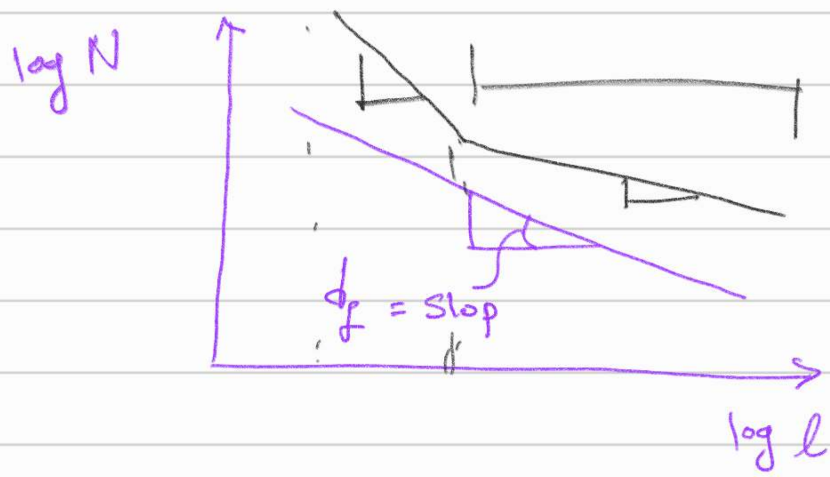
$N_l \sim l^{-d_f} \qquad \ln N_l = -d_f \ln l$

$d_f = -\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$

$\left\{\begin{array}{l} d_f = -\dfrac{\ln 9}{\ln 4} \\ d_f = -\dfrac{\ln 3}{\ln 2} \end{array}\right.$

$$N_\ell = N_1\, \ell^{-d_f\cancel{(\ell)}} \rightarrow$$ exact scaling behavior

Mono-fractal.



Multi-fractal behavior

$\left.\begin{matrix} d_f(\ell) \\ d_f(\ell') \end{matrix}\right\}$

$$\left\{\begin{matrix} \phi(bx) = b^\alpha \phi(x) \\ \phi(x) = b^{-\alpha}\phi(bx) \end{matrix}\right\}$$ توابع مقیاسی

Widom supposed that thermodynamical potential

behave as scaling function

$$\underset{\text{Free Energy}}{\underbrace{f}}(t,h) \xrightarrow{\ } \text{has scaling behavior} \qquad \overset{[K]}{\sim}$$

Consistency with experimental Results

$\left\{\begin{matrix} \text{Universality class} \\ \text{Symmetries} \end{matrix}\right.$

$$\left.\begin{matrix} t \rightarrow \lambda^a t \\ h \rightarrow \lambda^b h \end{matrix}\right\} \quad f(t,h) \rightarrow f' \equiv f(\lambda^a t, \lambda^b h) = \lambda f(t,h)$$

وقتی در نقطه بحرانی و خیلی نزدیک به نقطه بحرانی

اگر a و b داشته باشیم ⟵ کلیه نماهای مقیاسی را می‌یابیم. چطور؟

Ex1: $M \sim t^{\beta} \Big|_{h=0}$ $\qquad \beta \longrightarrow (a, b)$

$$M = \frac{\partial f}{\partial h}\Big|_{h=0}$$

فرض میکنیم

$$f(\lambda^a t, \lambda^b h) = \lambda f(t, h) \qquad , \quad \underline{\underline{h=0}}, \; \lambda = t^{-1/a} \quad \text{فرض}$$

$$\longrightarrow \lambda^b M(\lambda^a t, \lambda^b h) = \lambda M(t, h)$$

$$(t^{-1/a})^a t = 1$$

$$(t^{-1/a})^b M(1, 0) = (t^{-1/a}) \underbrace{M(t, 0)}_{M(t)}$$

$$M(t) = t^{\frac{1-b}{a}} \underbrace{M(1,0)}_{\text{عدد ثابت}} \sim t^{\beta} \qquad \boxed{\beta = \frac{1-b}{a}}$$

Ex2: $M \sim h^{1/\delta}$ $\qquad \delta \longrightarrow (a, b)$

$$\lambda^b M(\lambda^a t, \lambda^b h) = \lambda M(t, h)$$

$$t = 0, \; \lambda = h^{-1/b} \longrightarrow M(0, h) = h^{\frac{1-b}{b}} M(0, 1)$$

$$\sim h^{\frac{1}{\delta}}$$

$$\boxed{\delta = \frac{b}{1-b}}$$

Exercise $\quad \chi \sim t^{\gamma}$ $\qquad \boxed{\gamma = \frac{1-2b}{a}}$

$$C \sim t^{-\alpha} \qquad \boxed{\alpha = 2 - \frac{1}{a}}$$

Summary

$$f(t,h) \longrightarrow f(\lambda^a t, \lambda^b h) = \lambda f(t,h)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= 2 - 1/a \\ \beta &= \frac{1-b}{a} \\ \delta &= \frac{b}{1-b} \\ \gamma &= \frac{2b-1}{a} \end{aligned} \right\}$$

☆ هیچ ردپایی از بعد (d) در نهایت !

☆ روش تعیین a و b را به دست نمی‌دهد.

☆ چون در آزمایش دیده شده بود که M و C و G و X رفتار مقیاسی دارند در نقطه بحرانی

Widom گفت که ریشه این رفتار در خاصیت خودمتشابهی در پتانسیل ترمودینامیکی است $f(t,h)$

برای تکمیل کار به سراغ روش مبتنی بر RG می‌رویم.

Symmetry and phase transition

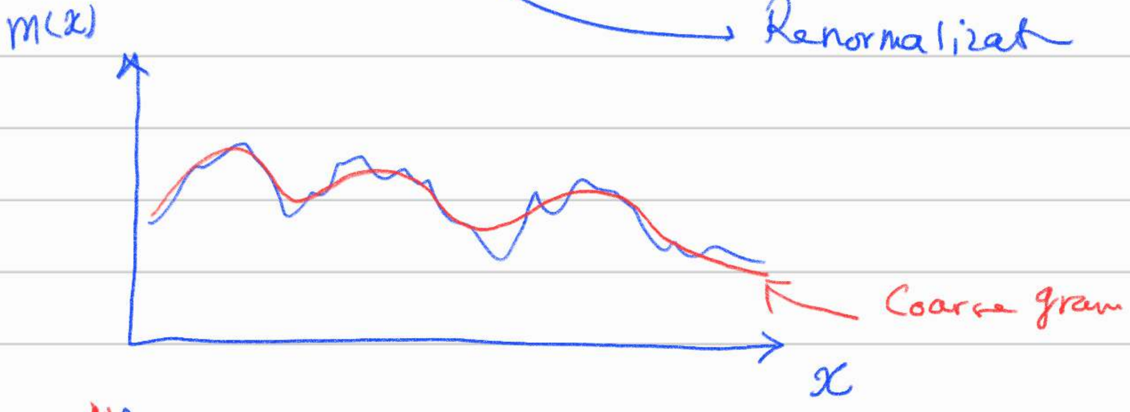
$$L = \int d^d x \left(\underbrace{(\nabla s)^2 + a s^2 + b s^4 - h s}_{\text{تقارن نقش داشتند}} \right)$$

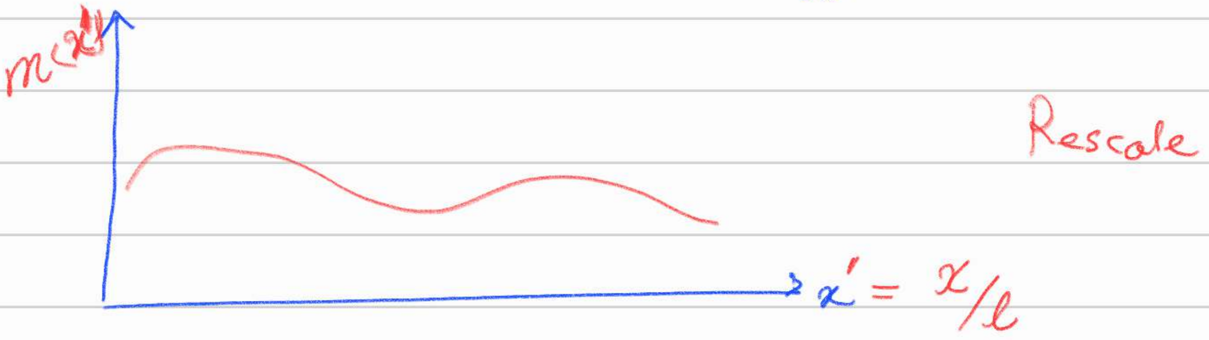
(البته قبلاً دیده بودیم که نماها می‌توانند به بعد وابسته شوند (جدول ۳.۱ کتاب Goldenfeld) اینجا ردپایی از بعد نیست.

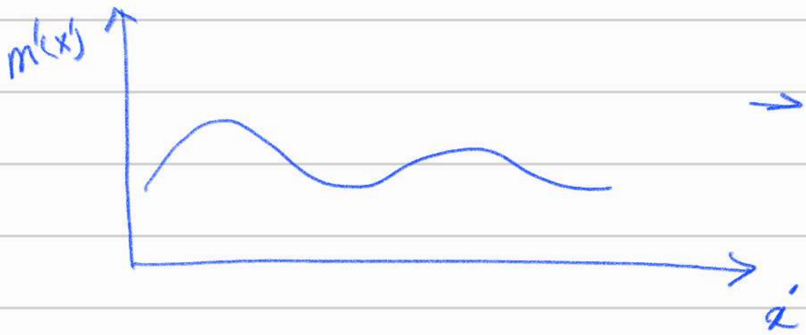
Renormalization Group. (RG)

$$RG = R \circ R \circ I$$

- I → Integration (Coarse graining)
- R → Rescale
- R → Renormalization







$$\boxed{m'(x') \sim m(x')\, l^{\Delta}}$$

دنبال این رابطه و تعیین آن

$\Delta \rightarrow (a, b)$ — $(\alpha, \beta \text{ --})$

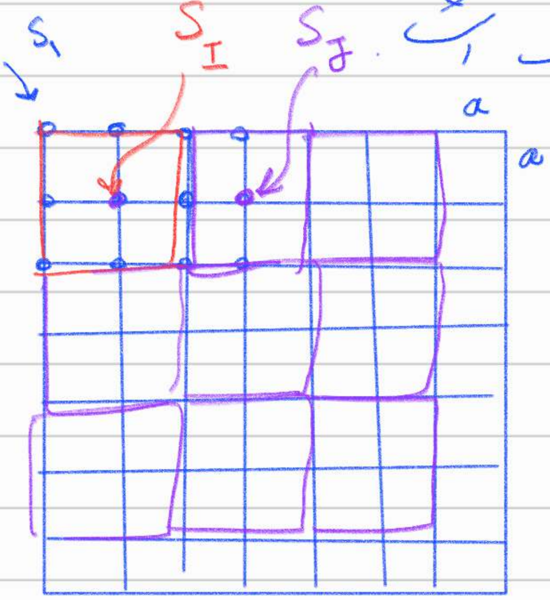
$$\begin{cases} \text{Integration} & m_I = \dfrac{1}{l^d} \displaystyle\sum_{i \in I}^{l^d} S_i \\ \text{Rescale} & x \rightarrow x' = x/l \\ \text{Renormalization} & m_I(x) \rightarrow \boxed{m'(x') = m(x')\, l^{\Delta}} \end{cases}$$

Ex: Spin - Block Kadanoff Idea 1966

9.1 (Goldenfeld)

{ Fisher, Wilson 1971

ساده‌ترین روش مبتنی بر RG روش کادانوف است.



① N تعداد کل اسپین‌ها s_i

$i=1,\dots,N$

② a: lattice constant

③ $l =$ عدد دلخواه

$N(l=1) = N$

$N(la) = \frac{N(l=1)}{l^d}$

④ $\xi_{phy} = \xi a = \xi'_{phy} = \xi' a'$

$\xi a = \xi' l a$

$\xi = 0$, $\xi = \infty$

$\boxed{\xi' = \xi / l}$

با دانه درشت کردن نظم قوی‌تر می‌شود

از نقطه بحرانی دور می‌شویم

مثل این است که ما در یک سیستم دمای متفاوت تر شده است

$\boxed{\xi = \xi(l)}$

$\boxed{\xi = l\xi'}$

$\xi \to \infty$ یعنی حالت بحرانی

$K^* = R[K^*] \rightarrow$ نقطه بحرانی ما است

$\boxed{K^* - R[K^*] = 0} \longrightarrow T = T_c$

$$\xi t \longrightarrow \xi_\ell t_\ell = \mathcal{O}(1) \longrightarrow \nu = ?$$

کوچک می‌شود

بزرگ می‌شود

$$\xi \sim t^{-\nu}$$

صحبت می‌کنیم

$$\mathcal{H} = -\sum \overset{J(T)}{J} s_i s_j - h\sum s_i + \sum \frac{p_i^2}{2m} + \cdots$$

$$T_c = \frac{J}{K_B} \quad J = cts.$$

(5)

$$S_I = \frac{1}{\ell^d} \sum_{i \in I}^{\ell^d} s_i \longleftarrow \text{Integration}$$

نماینده اسپین در بلاک I ام

$$S_I = \pm 1$$

$$|m_\ell| = \frac{1}{\ell^d} \sum_{i=1}^{\ell^d} \langle s_i \rangle \sim \ell^{-\Delta} \longleftarrow \text{Anamolous Dimension}$$

$$S_I \longrightarrow S_I' \equiv \frac{S_I}{|m_\ell|} = \ell^{\Delta - d} \sum_{i \in I}^{\ell^d} s_i$$

Z ← عوض نمی‌شود ← RoRI با

ولی $\mathcal{H}$

نقطه بحرانی

در یا فرض

مقیاس بردن

$$\mathcal{H} \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}_\ell = \mathcal{H}} \longrightarrow a, b ✓$$

درست تر این که بگوییم

$$\boxed{Z = Z_\ell}$$

Ex 3: $\mathcal{H} = -J \sum s_i s_j - h \sum s_i$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H}_\ell &= -J_\ell \sum_{IJ} s_I s_J - h_\ell \sum_I S_I \\ &= -J \sum s_i s_j - h \sum s_i = \mathcal{H} \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{ \underbrace{\mathcal{H}_\ell [K_\ell] = \mathcal{H}[K]} \right.$$ شرط لازم و کافی برای بحرانی بودن

$$[K] \xrightarrow{R_\ell} \boxed{[K_\ell] = R_\ell [K]}$$

$$Z \xrightarrow{R_\ell} \boxed{Z_\ell [\mathcal{H}_\ell] = Z[\mathcal{H}]}$$

ویژگی خود متشابه بودن است

$$F(N, \mathcal{H}) \overset{?}{\longleftrightarrow} F_\ell (N_\ell, \mathcal{H}_\ell)$$
$$=$$

$$f_\ell = \frac{F_\ell(N_\ell, \mathcal{H}_\ell)}{N/\ell^d} = \frac{F(N, \mathcal{H})}{N/\ell^d} = \frac{f(N,\mathcal{H})\cancel{N}}{\cancel{N}/\ell^d}$$

$$\boxed{f_\ell(N_\ell, \mathcal{H}_\ell) = \ell^{+d} f(N, \mathcal{H})}$$

$$\boxed{f_\ell(R_\ell[K]) = \ell^{d} f([K])}$$

$$f_\ell(t_\ell, h_\ell) = \ell^{d} f(t, h) \qquad \left\{ \begin{array}{l} t_\ell = \ell^{x_t} t \\ h_\ell = \ell^{x_h} h \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N \to N_\ell = \ell^{-d} N \\ \xi \to \xi_\ell = \ell^{-1} \xi \\ t \to t_\ell = \ell^{x_t} t \\ h \to h_\ell = \ell^{x_h} h \end{array} \right\}$$

$$h \sum_i s_i = h \underbrace{\sum_I^{N/\ell^d} \sum_{i \in I}}_{} s_i$$

$$= h \frac{\ell^{d-\Delta}}{\ell^{d-\Delta}} \sum_I \sum_{i \in I} s_i$$

$$= h \, \ell^{d-\Delta} \sum_I \frac{\ell^{\Delta}}{\ell^{d}} \sum_{i \in I} s_i$$

$$h \sum s_i = \underbrace{\ell^{d-\Delta} h}_{} \sum_I S_I$$

h_ℓ

$$h_\ell = h\,\ell^{d-\Delta} = \ell^{d-\Delta} h = \ell^{x_h} h$$

$$\boxed{x_h = d - \Delta}$$

$$\xi \sim t^{-\nu} \qquad \xi_\ell t_\ell = \xi t = O(1)$$

$$\boxed{\nu = \frac{1}{x_t}}$$

Exercise

$$\left\{\begin{array}{lll}
M \sim t^{\beta} & \longrightarrow & \beta = \nu \Delta \\[2mm]
M \sim h^{1/\delta} & \longrightarrow & \delta = \dfrac{d-\Delta}{\Delta} \\[2mm]
\chi \sim t^{\gamma} & \longrightarrow & \gamma = \nu(2\Delta - d) \\[2mm]
G(i,j) = \langle S_i S_j \rangle \sim \dfrac{e^{-r/\xi}}{r^{d-2+\eta}} & \longrightarrow & \Delta = \dfrac{d-2+\eta}{2}
\end{array}\right.$$

اشتباهی ندارم $\quad \boxed{\Delta \equiv \dfrac{x_h}{x_t}} \longrightarrow$ بعداً خواهیم دید که این عبارت چی است

$$\begin{matrix}\beta\\ \gamma\\ \delta\\ \vdots\end{matrix} \longleftarrow \boxed{x_t\,,\ x_h}$$ تعیین

توضیح کیفی

$$\xi \sim t^{-\nu}$$

$$\xi_l = l^{-1}\xi \longrightarrow (\xi_l)^{x_t} = l^{-x_t}\xi^{x_t} \xrightarrow{\times t_l} t_l\,\xi_l^{x_t} = l^{-x_t}\underbrace{t_l}_{t}\,\xi^{x_t}$$

$$t_l = l^{x_t}t$$

پس

$$\xi_l^{x_t}t_l = \xi^{x_t}t$$

$$\xi_{l^n}^{x_t}t_{l^n} = \xi_l^{x_t}t_l = \xi^{x_t}t = 1$$

می‌توان برای lها
هر تعداد بار این کار را انجام داد.

لذا می‌توان فرض کرد که از مرتبه 1 است. البته از حیث فیزیکی بی‌نظمی را دمای منتسب به سیستم
بیشتر می‌کند.

پس

$$\xi \sim t^{-1/x_t} \sim t^{-\nu} \Longrightarrow \nu = 1/x_t$$

$$M \sim t^{\beta} \quad = ?$$

$$M_l = \langle S_I \rangle = l^{\Delta-d}\sum_{i\in I}\langle s_i \rangle = l^{\Delta}\langle s \rangle = l^{\Delta}M$$

$$M_l(t_l, h_l) = l^{\Delta}M(t,h)$$

$$M_l(l^{x_t}t, l^{x_h}h) = l^{\Delta}M(t,h)$$

$$M_\ell(\ell^{x_t} t, 0) = \ell^{\Delta} M(t,0) \qquad \ell^{x_t} t = 1 \rightarrow t = \ell^{-1/x_t} = \ell^{-\nu}$$

$$M_\ell(1,0) = t^{-\nu\Delta} M(t,0) \longrightarrow M(t) \sim t^{\nu\Delta} \sim t^{\beta}$$

$$\boxed{\beta = \nu\Delta}$$

$$M \sim h^{1/\delta}$$

$$M(\ell^{x_t} t, \ell^{x_h} h) = \ell^{\Delta} M(t,h) \longrightarrow t=0 \rightarrow M(0, \ell^{x_h} h) = \ell^{\Delta} M(h)$$

$$x_h, \ d-\Delta \qquad \ell^{d-\Delta} h = 1 \longrightarrow \ell \sim h^{\frac{1}{\Delta - d}}$$

$$M(0,1) = h^{\frac{\Delta}{\Delta-d}} M(h) \longrightarrow \boxed{\delta = \frac{d-\Delta}{\Delta}}$$

$$\chi \sim t^{\gamma}$$

$$M(\ell^{x_t} t, \ell^{x_h} h) = \ell^{\Delta} M(t,h)$$

نسبت به h مشتق می‌گیریم.

$$\ell^{x_h} \chi(\ell^{x_t} t, \ell^{x_h} h) = \ell^{\Delta} \chi(t,h)$$

$$\ell^{x_h} \chi(\ell^{x_t} t, 0) = \ell^{\Delta} \chi(t,0) \qquad \ell^{x_t} t = 1 \longrightarrow t \sim \ell^{-x_t}$$

$$\ell^{x_h}\chi(1,0) = t^{-\Delta/x_t}\chi(t,0)$$

$$\chi(t,0) = t^{\frac{2\Delta-d}{x_t}}\cancel{\chi}(1,0)$$

$$\gamma = \frac{2\Delta-d}{x_t} = \nu(2\Delta-d)$$

Correlation function

$$\langle S_I S_J\rangle = \ell^{2\Delta-2d}\underbrace{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\langle S_i S_j\rangle}_{\ell^{2d}\langle S_i S_j\rangle}$$

$$\langle S_I S_J\rangle = \ell^{2\Delta-2d}\,\ell^{2d}\langle S_i S_j\rangle$$

$$= \ell^{2\Delta}\langle S_i S_j\rangle$$

$$G(r_\ell, t_\ell, h_\ell) = \ell^{2\Delta}G(r,t,h) \qquad r_\ell = r/\ell$$

$$G(r/\ell, \ell^{x_t}t, \ell^{x_h}h) = \ell^{2\Delta}G(r,t,h)$$

$h=0 \quad G(\ell^{-1}r, \ell^{x_t}t, 0) = \ell^{2\Delta}G(r,t,0) \qquad \ell = r^{-1}$

$$= r^{+2\Delta}G(r,t,0)$$

$$G(r,t,0) = \frac{e^{-r/\xi}}{r^{d-2+\eta}}$$

$$G(r,t,0) = r^{-2\Delta} G(r_l, t_l)$$

$$\sim r^{-(d-2+\eta)} e^{-r/\xi}$$

$$\boxed{2\Delta = d-2+\eta}$$

در ادامه تلاش می‌کنیم که

$$t_l = l^{x_t} t$$

$$h_l = l^{x_h} h$$

x_h و x_t را محاسبه کنیم. یعنی

$$[K]_l = R_l [K]$$

فرض مقیاسی بودن بر اساس نتایج حاصل از آزمایش که کمیت‌های مشاهده‌پذیر مقیاسی رفتار می‌کردند

و Widom گفت ریشه چنین رفتارهایی در مقیاسی بودن توابع پتانسیل ترمودینامیکی است

که ما تئوریزه کردیم

$$f(t_l, h_l) \sim l^d f(t, h)$$

بعد روش Kadanoff در پیش گرفته شد ولی هیچ راهی برای محاسبه a, b یا پیدا کردن x_t و x_h ارائه نشد. همچنین بر روی این نکته تاکید شد که در نقطه بحرانی [illegible]

ولی اندازه نشین کوتاه برد داریم. یعنی تقارن مورد نظر ما این است که

سیستم تحت تبدیل مبتنی بر طول تغییر نمی‌کند.

(این عبارت شبیه این است که بگوییم تقارن انتقالی یعنی بقای اندازه حرکت)

پس به جای مطالعه سیستم در a ← آزادی la مطالعه می‌کنیم و با این کار ضرایب سیستم بصورت شکل عوض می‌شود

$$[K_l] = R_l[K]$$

و نهایتاً دیدیم که

$$N_l = l^{-d} N$$

$$\xi_l = l^{-1} \xi$$

$$t_l = l^{x_t} t$$

$$h_l = l^{x_h} h$$

$$f_l(t_l, h_l) = l^{d} f(t, h)$$

با داشتن x_t و x_h می‌توان سایر نماها را بدست آورد.