بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۱/۹/۱۴۰۱

Beyond Zero approximation

$$Z = \sum_{\{s\}''} \sum_{\{s\}'} e^{-\beta \mathcal{H}_{microscopic}} = \sum_{\{s\}''} W$$

$$e^{-\beta F} = Z = \int Dm \, e^{-\beta L[m]}$$

$\rightarrow$ Landau free Energy

$F \neq L$ in General case

$L[m] \rightarrow$ locality, Analyticity, Symmetries, Stability $\Big\}$ $\boxed{\text{Phenomenologically can be determined}}$

$$L[m] = \int d^d x \, \mathcal{L}(m, \partial_x m, \dots)$$

$$\mathcal{L} = \sum_n \left\{ a_n([K])\, m^n + b_n([K])\, (\partial_x m)^n + \dots \right\}$$

$$\underbrace{a_n,\ b_n,\ c_n,\ \dots}_{\text{صحبت کردیم}}$$

تعیین این کمیت که عمدتاً ناظر به انتظاراتی که ما داشتیم

از نتایج آزمایش به دست می‌آید

Zeroth approximation $\quad \left.\dfrac{\partial L}{\partial m}\right|_{m=m_0} = 0$

$$\begin{cases} [m] = [m]_0 + [\Delta m] \\ [\phi] = [\phi]_0 + [\psi] \\ [\eta] = [\eta]_0 + [\Delta \eta] \end{cases}$$

نمادگذاری های مختلف
ولی با هدف یکسان

perturbation

$$\begin{cases} L[m] = L[m]_0 + \Delta m \left.\frac{\partial L}{\partial m}\right|_{[m]=[m]_0} + \frac{(\Delta m)^2}{2!}\frac{\partial^2 L}{\partial m^2} + \cdots \\ L[\phi] = L[\phi]_0 + \psi \left.\frac{\partial L}{\partial \phi}\right|_{[\phi]=[\phi]_0} + \frac{\psi^2}{2!}\frac{\partial^2 L}{\partial \phi^2} + \cdots \end{cases}$$

$$L[m] = L[m]_0 + \frac{(\Delta m)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 L}{\partial m^2}\right|_{[m]=[m]_0} + O(\Delta m^3)$$

$$Z = e^{-\beta F} = \int Dm\, e^{-\beta L[m]} = \underbrace{e^{-\beta L[m]_0}}_{\text{تقریب مرتبه صفرم}} \underbrace{\int Dm\, e^{-\beta \frac{\Delta m^2}{2!}\frac{\partial^2 L}{\partial m^2} + \cdots}}_{\text{از این بخش صرف نظر کنیم}}$$

$$\beta F = \beta L[m]_0 = a_0 + a_1 m_0^1 + a_2 m_0^2 + a_3 m_0^3 + a_4 m_0^4 + \cdots$$

براساس همان تئوری لانداو طی تعیین می شوند

$t>0 \quad m_0 = 0 \longrightarrow$ نماهای بحرانی محاسبه می شوند

$t<0 \quad m_0 \neq 0 \longrightarrow$ نماهای بحرانی محاسبه می شوند

شبیه یک تابع گوسی است $\quad e^{-x^2}$

Gaussian approximation

Ex1: $d=1$, $\underset{\sim}{q}=1 \rightarrow$ تعداد میدان‌های مدنظر

$$Z=\int \underset{\sim}{d\phi}\, e^{-\beta L[\phi]} = \int d\phi\, e^{-\beta \int d^1x\, \mathcal{L}[\phi,\dots]}$$

$\Delta\phi \equiv \psi \leftarrow$ اصول

$$L[\phi] = L[\phi]_0 + \frac{\overbrace{(\phi-\phi_0)^2}}{2!} \left.\frac{\partial^2 L}{\partial\phi^2}\right|_{\phi=\phi_0} + \mathcal{O}(\Delta\phi^3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \psi &= \phi-\phi_0 \\ d\phi &= d\psi \end{aligned}}$$

$$Z \simeq e^{-\beta L[\phi]_0} \int d\phi\, e^{-\beta \frac{\psi^2}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial\phi^2}}$$

$$\simeq e^{-\beta L[\phi]_0} \underbrace{\int d\psi\, e^{-\frac{\psi^2}{2\sigma^2}}}_{(2\pi)^{q/2}(\sigma^2)^{q/2} = \sqrt{2\pi\sigma^2}} + \cdots$$

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{1}{\beta \left.\frac{\partial^2 L}{\partial\phi^2}\right|_{\phi=\phi_0}}}$$

$$Z = e^{-\beta F} = e^{-\beta L[\phi]_0} (2\pi\sigma^2)^{1/2} = e^{-\beta L[\phi]_0 + \ln(2\pi\sigma^2)^{1/2}} + \cdots$$

$$-\beta F = -\beta L[\phi]_0 + \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) + \cdots$$

$$F = L[\phi]_0 - \frac{1}{2\beta}\ln\sigma^2 - \overbrace{\frac{1}{2\beta}\ln 2\pi}^{cts} + \cdots$$

$$F = L[\phi]_0 + \underbrace{\frac{\cancel{\beta}}{2\cancel{\beta}} \ln \left.\frac{\partial^2 L}{\partial\phi^2}\right|_{\phi=\phi_0}}_{\text{جمله تصحیحی که در انرژی آزاد ایجاد می‌کند.}} + \cdots \longrightarrow$$

$$\begin{cases} t>0 & \phi_0 = 0 \\ t<0 & \phi_0 \neq 0 \longrightarrow \left.\dfrac{\partial L}{\partial\phi}\right|_{\phi=\phi_0} = 0 \end{cases}$$

ناحیه‌ی بحرانی جالب می‌شود.

Ex2 d-Dimensional system

g-field $g>1$

Beyond Zeroth app.

میدان

$\{\phi_1^{(1)}, \phi_1^{(2)} \dots \phi_1^{(g)}; \phi_2^{(1)}, \phi_2^{(2)} \dots \dots\}$

مختصات

→ $F = ?$ ✓ $\to t>0$, $t<0$

$\boxed{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots = ?}$

Recall : Multivariate Gaussion function

mono-variate

$g=1$

$$f(\varphi) = e^{-\frac{\varphi^2}{2\sigma^2}} \qquad (\varphi - \bar{\varphi})^2$$

multi-variate

$g>1$

$$f([\varphi]) = e^{-\frac{\underset{1\times g}{[\varphi]^T} \cdot \underset{g\times g}{Cov^{-1}} \cdot \underset{g\times 1}{[\varphi]}}{2}}$$

$$[\varphi]^T = [\varphi_1 \dots \varphi_g]_{1\times g} \quad , \quad [\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \\ \varphi_g \end{bmatrix}_{g\times 1}$$

$$K^{-1} = Cov = \begin{bmatrix} \langle \varphi_1 \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle & \dots & \langle \varphi_1 \varphi_g \rangle \\ \langle \varphi_2 \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2 \varphi_2 \rangle & & \langle \varphi_2 \varphi_g \rangle \\ \vdots & & & \\ \langle \varphi_g \varphi_1 \rangle & & & \langle \varphi_g \varphi_g \rangle \end{bmatrix}_{g\times g}$$

show intraction between Degree of freedoms

$$\boxed{\sigma_n^2 \equiv \langle \varphi_n \varphi_n \rangle} \qquad \langle (\varphi_n - \bar{\varphi}_n)(\varphi_n - \bar{\varphi}_n) \rangle = \sigma_n^2$$

$$\langle \varphi_i \varphi_j \rangle = \delta_{ij} \longrightarrow$$ مدل بدون برهمکنش بین میدان‌های مختلف

$$\int D\varphi \, f([\varphi]) = (2\pi)^{g/2} \sqrt{Det(cov^{-1})}$$

$$Z = \int D\phi \; e^{-\beta L[\phi]} \quad , \quad [\phi] = [\phi]_0 + [\psi]$$

$$L[\phi] = L[\phi]_0 + \underbrace{[\psi]^T \frac{\partial L}{\partial [\phi]}\Big|_{[\phi]=[\phi]_0}}_{0} + \frac{1}{2}[\psi]^T \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial [\phi]^2} \cdot [\psi] + \dots$$

$$= L[\phi]_0 + \frac{1}{2}\sum_{ij}^{8} \psi_i \underbrace{\boxed{\frac{\partial^2 L}{\partial \phi_i \partial \phi_j}}}_{K_{ij} \equiv Cov^{-1}} \psi_j + \dots$$

$$\psi' = R\psi$$

$$\Lambda = RKR^T \implies \sum_{ij} \psi_i K_{ij} \psi_j = \sum_i \psi_i'^2 \lambda_i$$

$$K = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \longrightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_8 \end{bmatrix}$$

$$e^{-\beta F} = Z = e^{-\beta L[\phi]_0} \int \prod_{i=1}^{8} d\psi_i' \; e^{-\frac{\beta}{2}\sum_{i=1}^{8} \psi_i'^2 \lambda_i}$$

$$= e^{-\beta L[\phi]_0} \prod_{i=1}^{8} \left[\int d\psi_i' \; e^{-\frac{\beta}{2}\psi_i'^2 \lambda_i} \right]$$

$$= e^{-\beta L[\phi]_0} \frac{(2\pi)^{8/2}}{\beta^{8/2} (\mathrm{Det}\,\lambda)^{1/2}} = e^{-\beta L[\phi]_0 - \ln(\mathrm{Det}\,\lambda \; \beta^{8/2}) + \ln(2\pi^{8/2})}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ln \mathrm{Det}\,\lambda &= \sum_i \ln \lambda_i \\ &= \mathrm{Tr} \ln \lambda \end{aligned}}$$

$$F = L[\phi]_0 - \frac{1}{2} K_B T \sum_i \ln \frac{2\pi}{(\beta \lambda_i)}$$

$$\boxed{F = L[\phi]_0 + \frac{1}{2} K_B T \; \mathrm{Tr} \ln \lambda + cts}$$

در تقریب گوسی

Ⓐ $\underline{T > T_c}$ $(t > 0)$ $\longrightarrow$ $[\phi]_0 = 0$

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 + \psi = \psi(r)$$

فرض

$$L[\phi] = \int d^d x \left[a_2 \phi^2 + a_4 \cancel{\phi^4} + \underbrace{(\nabla\phi)^2}_{} + a_0 \right]$$

$T > T_c$
$(t > 0)$

$$L[\phi] = \int d^d x \left[a_0 + a_2 \psi^2(r) + (\nabla\psi)^2 \right]$$

$$L[\phi] = a_0 V^d + \int d^d x\, \psi(x) (a_2 - \nabla^2) \psi(x)$$

$$L[\phi] = L[\phi]_0 + \int d^d x\, \psi(x) (a_2 - \nabla^2) \psi(x)$$

$\sum_{ij}$

$$\boxed{K_{ij} = 2(a_2 - \nabla^2)\delta_{ij}}$$

Continuum limit

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \psi_i^T K_{ij} \psi_j$$

For $T > T_c$ $(t > 0)$ $(\phi_0 = 0)$ $\quad e^{-\beta F} = e^{-\beta L[\phi]_0 - \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \ln K + cts}$

$$\boxed{F = K_B T \left[\beta L[\phi]_0 + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \ln K - cts \right]}$$

$$F = K_B T \left[\beta a_0 V^d + \underbrace{\frac{1}{2} \operatorname{Tr} \ln \left(2(a_2 - \nabla^2) \right)}_{?} - cts \right]$$

$\psi = e^{-ikx}$

$$\operatorname{Tr} \ln 2(a_2 - \nabla^2) = \int d^d k \langle k | \ln 2(a_2 - \nabla^2) | k \rangle$$

عدد موج در فضای فوریه

$$= \int_{|k| \le a^{-1}} d^d k \ln 2(a_2 + k^2)$$

$|k| \le a^{-1} \leftarrow$ unit cell

$\boxed{\text{UV-Cutoff}}$

$$a_2 = t = \frac{(T-T_c)}{T_c}$$

ثابت

$$F = K_B T\left[\beta a_0 V^d + \frac{1}{2}\int_{|K|\leq a^{-1}} d^d K \ \ln 2(a_2 + K^2) \ - cts\right]$$

$$\to C = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = -T\left[\underbrace{\int_{|K|<a^{-1}} d^d K \frac{a_2'}{a_2+K^2}}_{?} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_{|K|<a^{-1}} d^d K \frac{a_2'^2}{(a_2+K^2)^2}}_{?}\right]$$

$$\boxed{a_2 = t}$$

$$I_1 \equiv \int d^d K \frac{1}{a_2 + K^2}$$

$$I_2 \equiv \int d^d K \frac{1}{(a_2+K^2)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_2 &\sim t \\ \xi &\sim t^{-1/2} \\ a_2 &\sim \xi^{-2} \end{aligned}}$$

$$I_1 = \int d^d K \frac{1}{\xi^{-2} + K^2} \sim [\xi^{2-d}]$$

$$I_2 = [\xi^{4-d}]$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{For } d=4 & \begin{cases} I_1 = \text{finite} \\ I_2 \sim \ln(\xi/a) \end{cases} \\ \text{For } 2<d<4 & \begin{cases} I_1 = \text{finite} \\ I_2 \sim \xi^{4-d} \end{cases} \end{array}\right\}$$

$C(t>0) =$ اصلاح شده

نسبت به حالت تقریب صفرم

$$\chi = ? \qquad \int d^d x\, G(x) = K_B T \chi$$

$\downarrow$

Fourier-Transform

$$\tilde{G}(K=0) = K_B T\, \tilde{\chi}(K=0)$$

ارتباط K^{-1} دارد $\to G(x) = \dfrac{1}{2(a_2 - \nabla^2)} \longrightarrow \tilde{G}(K) = \dfrac{1}{2(a_2+K^2)}$

Static Response function

مدنظر $K \to 0$, $x \to \infty$

$$\tilde{G}(0) = K_B T \tilde{\chi}(0) = \frac{1}{2a_2} = \frac{1}{2t} \sim t^{-1} \sim t^{-\gamma}$$

وابستگی زمانی

$\boxed{\gamma = 1}$

(B)

$T < T_c \quad (t < 0) \qquad [\phi]_0 \neq 0 \qquad [\phi]_0^2 = -\frac{a_2}{2a_4} \qquad \boxed{a_4 \neq 0}$

$[\phi] = [\phi]_0 + [\psi]$

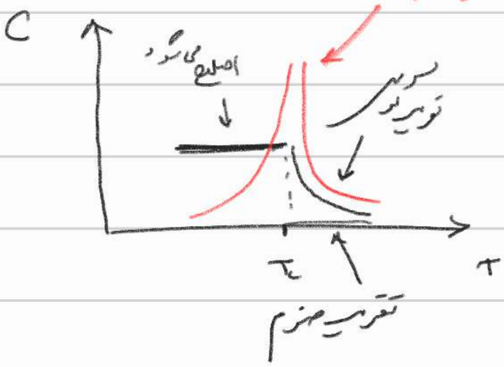
$$L[\phi] = L[\phi]_0 + \int d^d x \, \psi(x) \underbrace{\left[-2a_2 - \nabla^2\right]}_{} \psi(x)$$

$K_{ij} = 2(-2a_2 - \nabla^2)\,\delta_{ij}$

همه ضرایب قبل از جز

Exercise

$$\begin{cases} C = ? \\ G = ? \,,\ \chi = ? \end{cases}$$



Dynamical critical behavior

(K, ω)

Correlation function in Landau Theory.

Chapter 8 Goldenfeld

Section 6.3

Section 5-7

Section $\begin{Bmatrix} 6.3 \\ 6.4 \end{Bmatrix}$ Goldenfeld

توضیحات تکمیلی در

Chapter 8 Goldenfeld

Chapter 3 Kardar for

fluctuation

در جلسه بعد موضوع تحول زمانی افت و خیز پارامتر نظم و Slowing Down criticality بحث خواهد شد.

چند نکته در خصوص Gaussian functional.

نشان دادیم که

Point 1: $$Z = \underbrace{\int Dm}_{\sum_{\{S\}}} e^{-\beta L[m]}$$

$\sum_{\{S\}}$ و $\underbrace{\{S_1 - \quad S_N\}}_{\text{تعداد سایت S}}$ و البته بدیهی است که

اگر بعد فضای بیشتر شود در نتیجه تعداد سایت ها هم افزایش می یابد و در نتیجه $N(d)$ است

d: بعد سیستم

Point 2: $$L[m] = \int d^d x \, \mathcal{L}[m, \partial_x m, \ldots]$$

$$\mathcal{H} = -\sum_{ij} J_{ij} S_i S_j - h\sum S_i$$

در حالت پیوسته

$$\mathcal{H} = -\int \frac{d^d x_i \, d^d x_j}{(a)^d (a)^d} J(x_i, x_j) S(x_i) S(x_j) - \int \frac{d^d x}{(a)^d} h(x) S(x)$$

Point 3: Suppose that we have $g=1$ corresponds one-degree of freedom field

$[O(n=1)]$ $\quad m = m_{g=1}$ and $m = m_0 + \varphi$

$$L(m) = L(m_0) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial m}\Big|_{m=m_0}}_{0} \varphi + \frac{\varphi^2}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial m^2}\Big|_{m=m_0} + \mathcal{O}(\varphi^3)$$

$$Z = \int Dm \, e^{-\beta \left[L(m_0) + \frac{\varphi^2}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial m^2}\Big|_{m=m_0} + \dots \right]}$$

$$= \int \underbrace{dm_1 \, dm_2 \dots dm_N}_{\text{تعداد سایت ها}} \, e^{-\beta L}$$

$$= e^{-\beta N L[m_0]} \left(\int dm \, e^{-\beta \frac{\varphi^2}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial m^2}} \right)^N$$

$$\boxed{\sigma^2 \equiv \frac{1}{\beta \frac{\partial^2 L}{\partial m^2}}}$$

$$= e^{-\beta N L[m_0]} \left(\sqrt{2\pi \sigma^2} \right)^N \dots$$

$$= e^{-\beta N L[m_0] + \ln \left(\sqrt{2\pi\sigma^2} \right)^N \dots}$$

$$e^{-\beta F} = e^{N \left[-\beta L(m_0) + \ln(\sigma) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) \dots \right]}$$

$$f = \frac{F}{N} = L(m_0) - \frac{1}{\beta} \ln(\sigma) + cts$$

$$\boxed{f = L(m_0) - K_B T \ln(\sigma) + cts}$$

Point 4: Infinite Number of degree of freedom

توجه شود که می‌تواند به این صورت در نظر گرفته شود که در هر نقطه یک میدان ϕ نشسته باشد ولی چون $V \to \infty$

یعنی حد ترمودینامیک سیستم را بررسی کرده‌ایم پس $N \to \infty$ یعنی $\{\underbrace{\phi_1, \dots \phi_N}_{\text{تعداد آنها}}\}$ به بی‌نهایت می‌رود.

$$e^{-\beta F} = \int D\phi \, e^{-\beta L[\phi]}$$

$$L = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + a t \phi^2 + \frac{1}{2} b \phi^4 - h \phi \right]$$

اگر در هر نقطه بیش از یک میدان باشد پس $q \neq 1 \longleftarrow$ Vector field

$$L = \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\nabla \vec{\phi})^2 + at\, \vec{\phi}^2 + \frac{1}{2} b (\vec{\phi}^2)^2 - \vec{h}\cdot\vec{\phi} \right]$$

$$\vec{\phi} = \phi_1 \hat{e}_1 + \phi_2 \hat{e}_2 + \dots \phi_q \hat{e}_q$$

$$\vec{\phi} = \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_\alpha \hat{e}_\alpha \longrightarrow$$ q-Vector field in d-Dimension $\left[\phi_a^{(d)} \right]$

با حالتی که درجات آزادی میدانها در یک نقطه $\underline{X}$ به جهت عرضی Transverse طبقه بندی می‌شود.

جهت طولی longitudinal

$$\underbrace{\underbrace{\vec{\phi} = \phi_\ell \hat{e}_\ell}_{\text{یک مؤلفه طولی}} + \underbrace{\sum_{\alpha=2}^{q} \phi_L^{(\alpha)} \hat{e}_\alpha}_{\text{بقیه مؤلفه‌ها عرضی هستند}}}_{\text{جمع کل } q \text{ تا است.}} = \underbrace{\vec{\phi}(X \in \mathbb{R}^{(d)})}_{\text{q-Vector field in d-Dimension}}$$

حال برمی‌گردیم به حالت $q=1$ و در d بعد

$$L = \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + at\, \phi^2 + \frac{1}{2} b \phi^4 - h\phi \right]$$

$$e^{-\beta F} = \int D\phi \; e^{-\beta \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + at\phi^2 + \frac{1}{2} b\phi^4 - h\phi \right]}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \phi = \phi_0 + \varphi & \text{for } t > 0 & \phi_0 = 0 \\ & \text{for } t < 0 & \phi_0 \neq 0 \end{array}}$$

چون جمله $\nabla\phi$ وجود دارد به فضای فوریه می‌رویم پس

$$\phi(x) = \frac{V^d}{(2\pi)^d} \int d^dK\, \phi(K)\, e^{i\bar{K}\cdot\bar{X}}$$

پس در حالتی که $\phi^4 \sim 0$, $h=0$ پس

$$L = \int d^dx \left\{ \frac{V^{2d}}{(2\pi)^{2d}} \int d^dK \int d^dK' \left[\frac{1}{2}(-\bar{K}\cdot\vec{K}') + at \right] \phi(k)\phi(k') \right] e^{i(\bar{K}+\bar{K}')\cdot x} \right\} + L[\phi_0]$$

می‌دانیم

پس $\displaystyle \frac{V^d}{(2\pi)^d} \int d^dx\, e^{i(\bar{K}+\bar{K}')\cdot x} = \delta_D(K+K')$

$$L = \frac{V^d}{(2\pi)^d} \int d^dK \left[\frac{1}{2}K^2 + at \right] |\phi(k)|^2 + L[\phi_0]$$

پس

$$e^{-\beta F} = \int \mathcal{D}\phi\; e^{-\frac{\beta V^d}{(2\pi)^d} \int d^dK \left[\frac{1}{2}K^2 + at \right] |\phi(k)|^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{برای Gaussian functional Integral داریم} \\[1em] \displaystyle \int \mathcal{D}\phi(x)\, e^{-\int d^dx\, d^dx' \frac{K_0(x,x')}{2} \phi(x)\phi(x')} \\[1em] \displaystyle \simeq \Big[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kernel.}}}{\mathrm{Det}(K_0)} \Big]^{-1/2} \end{array} \right\}$$

پس

$$e^{-\beta F} \simeq e^{-\beta L[\phi]_0}\; e^{-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{Det}\, K_0)}$$

$$\ln \mathrm{Det}(K_0) = \sum_K \ln K_0(k) = V^d \int \frac{d^dK}{(2\pi)^d} \ln(K^2 + \underbrace{2at}_{\xi^{-2}})$$

$$'' = \frac{V^d}{(2\pi)^d} \int_{|K| \leq a^{-1}} d^dK\, \ln(K^2 + \xi^{-2})$$