بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۲۹/۸/۱۴۰۱

5.3 : Phenomenological Landau Theory

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I \longrightarrow Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \mathcal{H}} \longrightarrow F = -K_B T \ln Z$$

سایر کمیت های مهم اندازه پذیر قابل محاسبه هستند.

$a_2 m^2 + a_4 m^4$

$$e^{-\beta F} = Z = \int Dm\, e^{-\beta L([m])} \qquad Z = \int Dm\, \underbrace{W([m])}$$

Landau free Energy

① Locality ② Symmetries ③ Stability

④ Analycity

$$\underbrace{L[m]} = \int d^d x\, \mathcal{L}([m, \underbrace{\partial_x m}, \ldots])$$

به صورت خطی بنویسیم

ضرایب ربط

$$\mathcal{L} = \sum \left\{ \overbrace{a_n}([K])\, m^n + b_n([K])\, \underbrace{(\partial m)}^n + c_n([K])\, \underbrace{(\partial^2 m)}^n \ldots \right\}$$

ضرایب جفت‌شدگی

پارامتر نظم

☆ از کجا می‌توان پی برد که عبارت بالا کار می‌کند؟ $[K] = \{t, h, u, \ldots\}$

پاسخ منفعلانه: چون پیش‌بینی آن با آزمایش سازگاری دارد. تا زمانی که با آزمایش سازگاری دارد مقبول است.

با مقدمه فوق الان کاری که می‌خواهیم دنبال کنیم در خصوص $\underline{a_n([K])}$ بحث کنیم. در بستر یک مطالعه موردی

$$\mathcal{L} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n([K]_A)\, m^n + \dots \right\}$$

① $a_0 =$ ثابت $\longrightarrow$ فقط اثری در تغییر مبدأ پتانسیل دارد

$a_0 = 0$

② $a_1, a_3, \dots a_{2n+1} = 0$ if Z_2-Symmetry

③ $L[m] = \int d^dx\, \mathcal{L}([m]) \longrightarrow$ Euler-lagrange Eq

$$\frac{dL}{dm} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} - \underbrace{\frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x m)}}_{\text{در اینجا صرف نظر شده است}} = 0$$

$$0 = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m}\right|_{m=m_0}$$

$$\mathcal{L} = a_1 m + a_2 m^2 + a_3 m^3 + a_4 m^4 + \dots$$

$(t>0, h=0)$

$$0 = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m}\right|_{m=m_0} = a_1 + 2a_2 m + 3a_3 m^2 + 4a_4 m^3 = 0$$

$$m = \begin{cases} 0 & \text{for } t>0,\ h=0 \\ m_0 & \text{for } t<0,\ h=0 \end{cases} \longrightarrow a_1 = 0$$

$\boxed{a_1 = -h}$ که قرار دادیم

الزاماً توصیف عمومی‌تری نیز برای کار کردن مدل در $t<0$ نیز بیابیم

④ $a_4 > 0 \longrightarrow |m| \not\to \infty \quad \min\{\mathcal{L}\}$

انتظار ما این است که در گذار فاز مرتبه دوم پیوسته در $t<0$ مقدار محدودی m داشته باشیم و m از مقدار $|m|=0$ به آهستگی زیاد شود

⑤ If $h \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L} = -hm + a_2 m^2 + a_3 m^3 + a_4 m^4$

معمولاً ۰ در نظر می‌گیریم مگر به دلایلی به آن نیاز داشته باشیم.

⑥
$$\begin{cases} a_2 < 0 ,\ a_4 > 0 & \text{for } t < 0 \qquad m_0 \neq 0 \\ a_2 > 0 ,\ a_4 > 0 & \text{for } t > 0 \qquad m_0 = 0 \\ a_2 > 0 ,\ a_4 < 0 & \longrightarrow \qquad m_0 \to \infty \end{cases}$$

بی‌اندازه می‌تواند بزرگ باشد

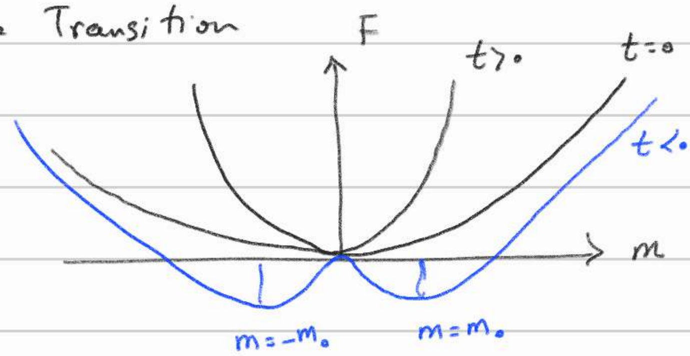
$$\left.\frac{dL}{dm}\right|_{m=m_0} = 0$$

⑦
$$\begin{cases} a_2 = a_2^{(0)} + a_2^{(1)} t + a_2^{(2)} t^2 + \cdots \\ a_4 = a_4^{(0)} + a_4^{(1)} t + a_4^{(2)} t^2 + \cdots \\ a_1 = -h \end{cases}$$

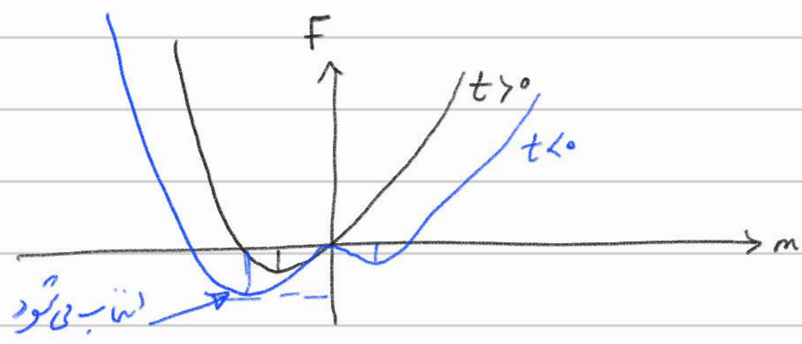
پس اکنون در بستر یک مسئله مشخص در خصوص a_n ها بحث می‌کنیم.

Ex 1: Continuous Phase Transition

در غیاب میدان مغناطیسی خارجی $h = 0$



$h < 0$ در



$$\mathcal{L} = -hm + a_2 m^2 + a_4 m^4 + (\nabla m)^2$$

صرف نظر کرده‌ایم چون انتظار نداریم که تفاوت چشمگیری در مقادیر m در نقاط مختلف
سیستم وجود داشته باشد

For $h=0$ $\quad \mathcal{L} = a_2 m^2 + a_4 m^4$

$$0 = \left.\frac{d\mathcal{L}}{dm}\right|_{m=m_0} \rightarrow \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m}\right|_{m=m_0} = 0 = 2a_2 m + 4a_4 m^3 = 0$$

$$m_0^2 = -\frac{2a_2}{4a_4} \Rightarrow \boxed{m_0 = \pm\sqrt{\frac{-a_2}{2a_4}}}$$

$$m_0 = \begin{cases} 0 & \text{for } t > 0 \ (h=0) \\ \pm\sqrt{\dfrac{-a_2}{2a_4}} & \text{for } t < 0 \ (h=0) \end{cases}$$

صرف نظر می‌کنیم

$$a_2(t) = a_2^{(0)} + a_2^{(1)} t + \cdots \quad , \quad a_4(t) = a_4^{(0)} + \cancel{a_4^{(1)} t} + \cdots$$

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{-a_2^{(0)} - a_2^{(1)} t - }{2a_4^{(0)}}}$$

$t = 0 \quad m_0(t=0) = 0 \Rightarrow \boxed{a_2^{(0)} = 0}$

$t < 0 \quad m_0(t<0) = \text{Real}$

$$a_2 = a_2^{(1)} t \longleftarrow \boxed{\begin{array}{l} a_2^{(1)} > 0 \\ a_4^{(0)} > 0 \end{array}} \Rightarrow a_2 < 0 \ (t<0)$$

جمع‌بندی

$$\boxed{\begin{array}{ll} a_1 = -h & a_2 = a_2^{(1)} t = t \\ & a_4 = a_4^{(0)} = cts \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \mathcal{L} = -hm + tm^2 + a_4 m^4 \\ a_4 > 0 \end{array}}$$

$$L = \int d^d x \, \mathcal{L} \quad , \quad e^{-\beta F} = Z = \int Dm \, e^{-\beta L[m]}$$

$$L[m] = L[m_0] + \cancel{\frac{\partial L}{\partial m}\Big|_{m=m_0} \overbrace{(m-m_0)}^{\varphi}} + \varphi^2 \frac{\partial^2 L}{\partial m^2}\Big|_{m=m_0} + \cdots$$

$\varphi \ll 1 \quad t \to 0$

$$e^{-\beta F} = Z = \int Dm \, e^{-\beta \left\{ L[m_0] + \varphi^2 \frac{\partial^2 L}{\partial m^2} + \cdots \right\}}$$

$$= e^{-\beta L[m_0]} \underbrace{\int Dm \, \underbrace{e^{-\beta \varphi^2 \frac{\partial^2 L}{\partial m^2}}}_{} + \cdots}_{}$$

صرف نظر کنیم ← تقریب صفرم هستیم

$$\boxed{e^{-\beta F} \simeq e^{-\beta L[m_0]}}$$

تقریب صفرم $\quad F = L[m_0]$

سایر خواص ترمودینامیکی را با این تقریب بررسی کنیم

$$C = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\Big|_{m=m_0} = -T \frac{\partial^2 L}{\partial T^2}$$

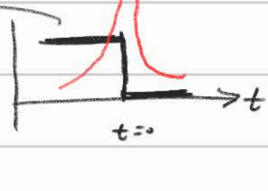
$t > 0 \ (T > T_c) \longrightarrow m_0 = 0 \longrightarrow \mathcal{L} = 0 \to L = 0 \to c =$ ثابت

$\mathcal{L}$

$t < 0 \ (T < T_c) \longrightarrow m_0 \neq 0 \longrightarrow \mathcal{L} = t m_0^2 + a_4^{(0)} m_0^4$

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{-t}{2a_4^{(0)}}}$$

آنچه آزمایش مشاهده شده



$\boxed{\alpha = 0} \leftarrow C(t<0) = cts$

آنچه در نظریه

معادل حالت نمای میدان متوسط است

for $h \neq 0$ $\quad \mathcal{L} = -hm + tm^2 + a_4^{(0)} m^4$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} = -h + 2tm + 4a_4^{(0)} m^3 \rightarrow \boxed{m_0 = \frac{h}{2t}}$$

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial h}\Big|_{t=0} \longrightarrow \chi \sim t^{-1} \rightarrow \boxed{\gamma = +1}$$

$m \to 0$

$$m\Big|_{t=0} \sim h^{\left(\frac{1}{\delta}\right)} \qquad \delta = ? \rightarrow \boxed{\delta = 3}$$

$$-h + \cancel{2tm} + 4a_4^{(0)} m^3 = 0 \qquad m \sim h^{1/3}$$

$t=0$

Ex 2: First order phase Transition

در بخش قبل تلاش کردیم بر اساس نتایج حاصل از آزمایش $\{a_n\}$ جوری تنظیم کنیم که یک گذار هموار در m رخ دهد. فرض می‌کنیم

$$\mathcal{L} = atm^2 + \frac{1}{2} bm^4 + cm^3 - hm$$

$a > 0$
$b > 0$
$c > 0$

for $h = 0$, $c \neq 0$

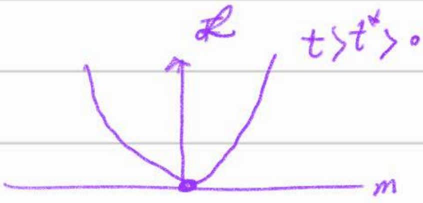
$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m}\Big|_{m=m_0} = 2atm_0 + 2bm_0^3 + 3cm_0^2 = 0$$

$$m_0 = \begin{cases} m_0 = 0 \\ m_0 = -\bar{c} \pm \sqrt{\bar{c}^2 - \frac{at}{b}} \end{cases} \qquad \bar{c} \equiv \frac{3c}{4b}$$

اگر این جمله مثبت باشد در نتیجه این جواب هم فیزیکی است.

$$\bar{c}^2 - \frac{at}{b} \geq 0 \longrightarrow \bar{c}^2 \geq \frac{at}{b} \qquad \boxed{\bar{c}^2 = \frac{a}{b} t^*}$$

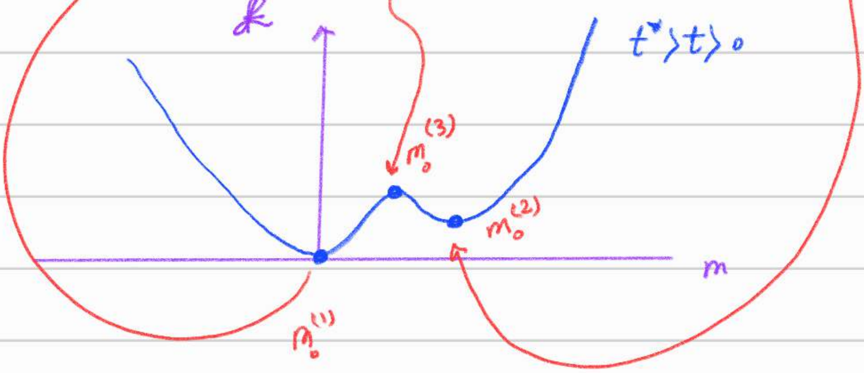
اگر $t<t^*$ باشد جمله زیر رادیکال مثبت است ← غیر از $m_0=0$. m_0 هم جواب است
حقیقی است



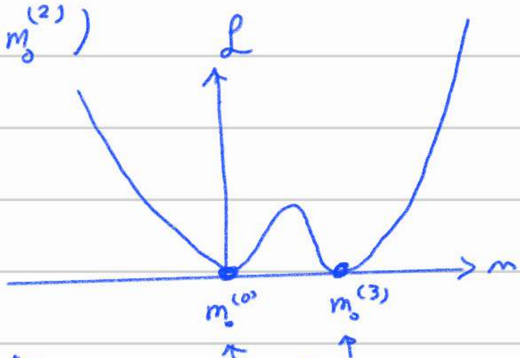
$T=T_c$

Ⓐ $t>t^*>0 \longrightarrow m_0=0$

Ⓑ $t^*>t>0 \longrightarrow \begin{cases} m_0^{(1)}=0 \\ m_0^{(2)}=-\bar{c}+\sqrt{\bar{c}^2-\frac{at}{b}} \\ m_0^{(3)}=-\bar{c}-\sqrt{\bar{c}^2-\frac{at}{b}} \end{cases}$

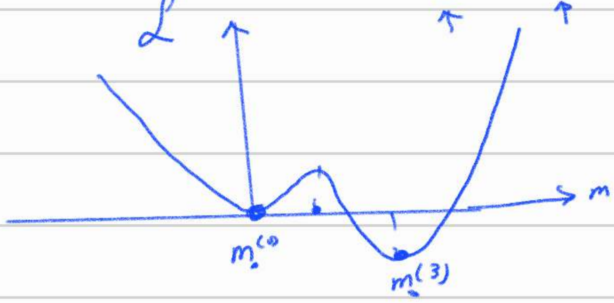


Ⓒ $t^*>t=t_1>0$ $\qquad \mathcal{L}(m_0^{(1)})=\mathcal{L}(m_0^{(2)})$



Ⓓ $t^*>t_1>\tilde{t}$

$t^*>t_1>0>t$



$$\mathcal{L}(m_0^{(2)})>\mathcal{L}(m_0^{(1)})>\mathcal{L}(m_0^{(3)})$$

فاز غالب $m_0^{(3)}$ است

Exercise $\mathcal{L} = am^2 + bm^4 + cm^6 - hm$

Tricritical Phase Transition

Ex 3 2.5 Kardar Book.

Discrete symmetry breaking and Domain Wall

$$\mathcal{H} = \int d^dx \left[\overbrace{\frac{K(\nabla m)^2}{2} + \frac{t m^2}{2} + u m^4 - hm}^{\mathcal{L}} \right] \qquad \boxed{m' = \partial_x m}$$

d=1 Euler-Lagrange Eq: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial m'} = 0$

$$\boxed{\frac{d^2 m}{dx^2} = t\, m(x) + 4u\, m^3(x)}$$

Boundary Conditions

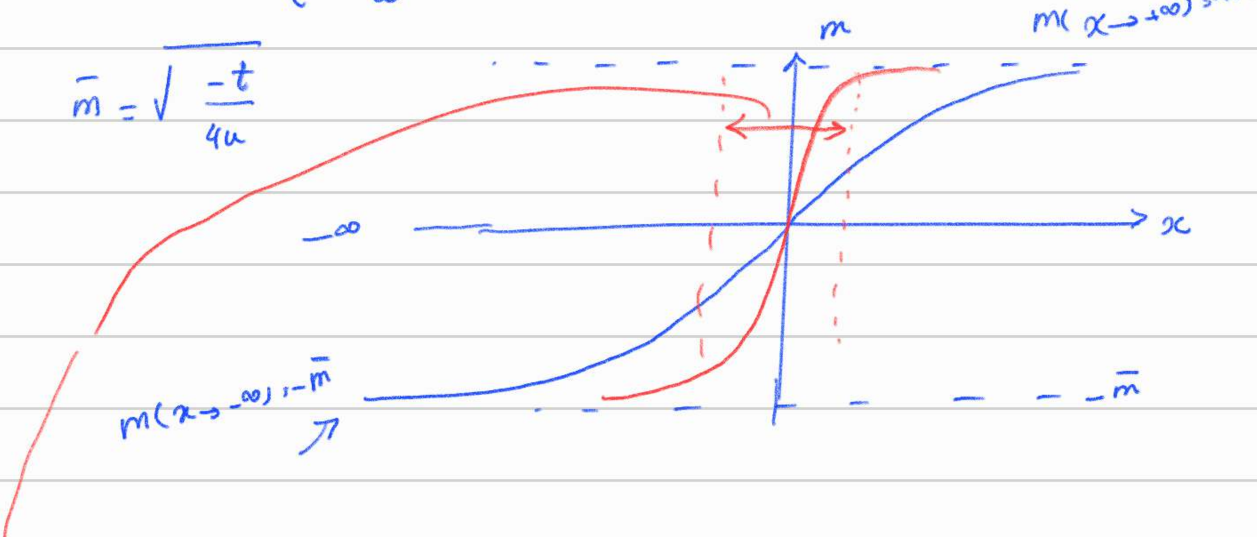
$m(x \to +\infty) = +\bar{m}$

$m(x \to -\infty) = -\bar{m}$

$x_0 = 0$

$$m(x) = \bar{m} \tanh\left[\frac{x - x_0}{w}\right] \qquad w \equiv \sqrt{\frac{2K}{-t}}$$

$$\bar{m} = \sqrt{\frac{-t}{4u}}$$



$$w = \sqrt{\frac{2K}{-t}} \sim t^{-1/2} \sim \xi$$

$t \to 0 \quad \xi \to \infty \qquad w \to \infty$

هزینه ساخت دیوار

$$\Delta F_w = F(m(x)) - F(\bar{m})$$

$$= \int d^d x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dm}{dx}\right)^2 + \frac{t}{2} \left(m^2(x) - \bar{m}^2 \right) + u \left(m^4(x) - \bar{m}^4 \right) \right]$$

$$\Delta F_w = -\frac{t}{2} \bar{m} \int d^d x \cosh^{-4} \left(\frac{x - x_0}{w} \right) \simeq -\frac{2}{3} t \bar{m}^2 w \sim t^{3/2}$$

$t > 0 \to \quad \Delta F_w < 0 \longrightarrow$ دوست دارد دیواره بسازد

نظم نداریم

در $t = 0$, $\Delta F_w = 0$, $\underline{w \to \infty}$. و قطبش نداریم.

$$e^{-\beta F} = Z = \int Dm \underbrace{e^{-\beta \mathcal{H}}}_{\text{وزن}} = \int Dm \underbrace{e^{-\beta \int d^d x \mathcal{L}}}_{\max\left(e^{-\beta \int d^d x \mathcal{L}}\right)}$$

$V \to \infty$

$$e^{-\beta F} \simeq \max\left(e^{-\beta \int d^d x \mathcal{L}}\right) = \underbrace{e^{-\beta \min\left[\int d^d x \mathcal{L}\right]}}_{\text{most probable configuration}}$$

saddle point app.

$$\left\{ \begin{array}{l} V \to \infty \\ \bar{m} \to 0 \end{array} \right\} \qquad e^{-\beta F} \simeq e^{-\beta \mathcal{H}_{min}(m = \bar{m})}$$